Bevis i undervising av realfagsmatematikk i vidaregåande skule

Ei kvalitativ studie av lærararar sine didaktiske refleksjonar kring bruk av bevis i matematikkundervisinga

Silje Tråi

Masteroppgåve i matematikkdidaktikk

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

Juni 2019

Forord

Snart er fem lærerike, utfordrande og ikkje minst kjekke studieår over, og eg kan endeleg kalla meg lektor. At eg snart har ei masteroppgåve i hendene er nesten litt uverkeleg, og det er mange å takka for at denne har blitt ein realitet.

Fyrst og fremst vil eg takke rettleiaren min, Trond Stølen Gustavsen, for god hjelp og støtte i arbeidet med masteroppgåva. Vidare vil eg takke alle lærarane som tok del i studien. Eg set stor pris på at de tok dykk tida til å delta på intervju, opna klasserommet dykkar for meg og for at dykk alle viste stor interesse for forskingsprosjektet mitt. Vil også takke Martine Myklevold og Kristine Tråi for korrekturlesing av oppgåva, hadde nok ikkje blitt eit like bra resultat utan.

Sist, men ikkje minst; tusen takk til alle dei fantastiske medstudentane mine for at dykk har gjort åra ved Universitetet i Bergen til ei så fin tid. Mykje lektorkjærleik frå meg!

Bergen, mai 2019

Silje Tråi

Samandrag
Bevis har spelt ei sentral rolle i utvikling av matematikken, og kan seiast å danne grunnlaget for kvifor matematikken er som den er. Bevisa viser kvifor formlar og teorem stemmer, men dei har fleire roller utover dette; dei formidlar metodane, verktøya, strategiane og konsepta som ofte vert sett på som essensen i matematikk. Bevis kan av denne grunn seiast å vere ein essensiell del av det å lære matematikk. Det er tidligare gjort lite forsking kring temaet bevis i den norske vidaregåande skulen, og det er ein del av dette tomrommet denne oppgåva har til hensikt å fylle. Formålet med oppgåva har vore å undersøke kva roller lærarar tillegg bevis i matematikk og korleis dei implementerer bevis i si undervising. Det har vore særleg ynskja å få innsikt i lærarar si oppfatning av bevis som læringsressurs; om arbeid med bevis er noko lærarar tenkjer kan fasilitere forståing av samanhengane i matematikken. Problemstillinga er: *Kva didaktiske refleksjonar gjer lærarar seg kring bruk av bevis i matematikkundervisinga?*

Det har vore ynskja å få ei djup innsikt i lærarar sine refleksjonar kring bevis i matematikkundervising, og ei kvalitativ tilnærming vart derfor nytta. Tre lærarar frå to ulike vidaregåande skular i Hordaland og Sogn og Fjordane har vore intervjua, i tillegg til at det er utført observasjon i kvar av lærarane sitt klasserom. I analyse av intervju og observasjon vart det nytta ei abduktiv tilnærming. Datamateriale vart analysert både ved hjelp av deduktive kodar med grunnlag i teori kring bevis si rolle i undervising, og induktive kodar utforma med grunnlag i datamaterialet.

Funn frå analysen tyder på at bevis spelar ei sentral rolle i undervising, då spesielt for å forklare matematiske samanhengar til elevar. Lærarane inkluderte bevis i si undervising av den grunn at dette kunne gje elevar innsikt i matematikken sin eigenart og fasilitere forståing av matematikk. Gjennom bevisa fekk elevane innsikt i argumentasjonen bak teorem, formlar og prosedyrar dei nytta i matematikken. Elevane kunne dermed sjå samanhengane mellom matematikken sine mange sider, samstundes som dette var noko som fremja kritisk- og metakognitiv tenking og djupnelæring. Bevis og bevisføring er noko lærarane hevda elevar streva med, det å motivere elevar til arbeid med bevis var derfor peika på som ei utfordring. I arbeid med bevis vart derfor visuelle representasjonar og forklaringar peika på som gode hjelpemiddel, då dette kunne gjere bevis meir tilgjengeleg for elevane. Bevis er ikkje i særleg grad prioritert i læreplanen, noko som gjorde tid til ei utfordring for lærarane. I førebuing til eksamen og gjennomgang av dei andre delane av pensum, var bevis noko som kunne felle vekk frå lærarane si undervising.

Innhald

Kapittel 1: Innleiing

1.1 Bakgrunn for studien, plassering i ein samfunnsmessig kontekst

Bevis har spelt ei sentral rolle i utviklinga av matematikken, og kan seiast å danne grunnlaget for kvifor matematikken er som den er. Det er bevisa som viser kvifor algoritmane og teorema stemmer, dei verifiserer og gjev evidens. Det er dette som ofte er konsensus blant matematikarar og filosofar; at bevisa verifiserer, dei etablerer sanninga av matematiske utsegn og setningar. Bevis har fleire roller utover dette; dei forklarar, kommuniserer, utforskar, systematiserer og gjev rom for intellektuelle utfordringar (Reid, & Knipping, 2010, s. 74-77). Bevis formidlar dei metodane, verktøya, strategiane og konsepta som ofte vert sett på som essensen i matematikk (Hanna & Barbeau, 2008, s. 345).

Bevis er med andre ord meir enn eit tema som skal lærast i matematikk, det er også ein essensiell del av det å lære matematikk. Som Schoenfeld (1994) påpeikar: *"Proof is not a thing separable from mathematics as it appears to be in our curricula; it is an essential component of doing, communicating, and recording mathematics."* (s. 76). Gjennom bevisa kan elevane få innsikt i den underliggande resonneringa og argumentasjonen bak alle formlar, prosedyrar og metodar ein nyttar når ein løyser oppgåver og problem i matematikk. Elevane kan gjennom bevisa få innsikt i kvifor formlane og prosedyrane er som dei er, framfor berre å vite korleis ein brukar dei. Dette gjer til at ein kan utvikle det Skemp (1976, s. 20) definerer som ei relasjonell forståing. Relasjonell forståing slik Skemp (1976, s. 26) definerer det inneber å byggje opp omgrepsmessige strukturar og sjå samanhengar i faget; med relasjonell forståing ser ein *korleis* oppgåva skal løysast samstundes som ein forstår *kvifor* det er slik. Bevis kan med andre ord medverke til ei utvikling av relasjonell forståing i matematikken, og det er nettopp dette som er motivasjonen min for å skrive om akkurat bevis. I mi eiga skulegang hadde eg i stor grad det Skemp (1976, s. 20) definerer som ei instrumentell forståing. Ei forståing som inneber det å lære formlar og reglar for korleis ein kan finne ei løysing på problem; ein veit *korleis* oppgåva skal løysast, men ikkje nødvendigvis kvifor det er slik. Det var akkurat dette eg kunne. Eg visste korleis oppgåvene og problema der eg kunne følgje ei prosedyre eg hadde brukt mange gangar før skulle løysast, men når eg traff på eit meir samansett problem eller eit problem eg tidlegare ikkje hadde sett visste eg ikkje korleis eg skulle gå fram. Desse passa ikkje inn i prosedyrane og metodane eg hadde lært meg.

I ei analyse av undervising si effekt på elevar si læring, peikar Hiebert og Grouws (2007) på ulike faktorar som kan fremje elevar si relasjonelle forståing. Her vert det å ha eit eksplisitt fokus på samanhengar mellom matematiske idear, fakta og prosedyrar i matematikkundervisinga (s. 383), samt det å la elevar streve med viktige matematiske idear (s. 387-388) nemnt som sentrale faktorar. Det er her eg tenkjer bevis kan spele ei sentral rolle. Matematiske bevis vert av Rav (1999) hevda å vere matematikarar sin måte å formidle det matematiske "maskineriet": *«Proofs are the mathematican´s way to display the mathematichal machinery for solving problems and to justify that proposed solution to a problems is indeed a solution»* (s. 13). Matematiske bevis er med andre ord berarar av matematisk kunnskap (Rav, 1999), og gjennom bevisa får ein innsikt i den underliggande argumentasjonen og samanhengane i matematikken. Det er nettopp dette Hiebert og Goruws (2007, s. 383) hevdar kan fremje ei relasjonell forståing hjå elevane.

I realfagsmatematikken i den norske vidaregåande skulen stiftar elevar kjennskap til bevis. Dette er nemnt som ein del av det *å kunne uttrykke seg munnleg og skriftleg i matematikk*, ein av dei fem grunnleggande ferdighetane. I læreplan for matematikk i realfag står det følgjande om den nemnte grunnleggande ferdigheten:

> *«Å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig i matematikk for realfag innebærer å formulere logiske resonnementer, forklare en tankegang og sette ord på oppdagelser, ideer og hypoteser. Det vil si å stille spørsmål, delta i samtaler og drøftinger av matematiske situasjoner og problemer og argumentere for egne løsningsforslag. Å formulere et matematisk bevis skriftlig med bruk av korrekt matematisk notasjon og logisk gyldige slutninger inngår. I tillegg betyr det å skrive matematiske symboluttrykk og sette opp eller tegne tabeller, diagrammer, grafer og geometriske figurer.»*
> (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 4).

Her ser ein at både det å kunne formulere logiske resonnement, forklare eigen tankegang, delta i diskusjonar og å formulere matematiske bevis er sentrale kunnskapar elevar som vel realfagsmatematikk skal sitje igjen med etter avslutta matematikkundervising.

Gjennom å studere oppgåvetypar i lærebøker (Heir, Engseth, Moe & Borgan, 2015; Sandvold et.al, 2015; Øgrim et.al, 2013) og eksamensoppgåver tidligare gjeve i matematikk ser ein at bevis i liten grad er prioritert, men at det her ved fleire anledningar gjeve oppgåver med formuleringa «forklar at», «grunngje» og «vis at». Det står ikkje direkte formulert i oppgåveteksten at ein her skal bevise, men oppgåvelyden indikerer at kompetanse innan bevis og bevisføring er sentralt. Her går kunnskapen utover det å ha ei instrumentell forståing, ein må bruke matematikken meir aktivt og ha innsikt i korleis matematikken heng saman.

Det er tidlegare gjort lite forsking på temaet bevis i den norske vidaregåande skulen. Vigdis Óskardóttir (2016) undersøkte lærebokforfattarar sine didaktiske refleksjonar kring bevis i undervisinga, men det er tidlegare ikkje forska på lærarar sine refleksjonar kring bevis i undervisingssamanheng. Det er dette tomrommet eg ynskjer å fylle med mi oppgåve; *kva refleksjonar gjer lærarar i vidaregåande skule seg om bruk av bevis i matematikkundervising?* Å skulle sjå på alle matematikkfag i den vidaregåande skulen vil krevje ei omfattande studie, det er difor gjort ei avgrensing av matematikkfaga i den vidaregåande skulen. Eg har her valt å fokusere på realfagsmatematikk (matematikkfaga 1T, R1 og R2), då det er her bevis er tillagt størst plass i læreplanen.

1.2 Konkret om forskingsspørsmål/problemstilling

Mi eiga skulegang og matematiske forståing er motivasjonen min til å skrive denne oppgåva. Korleis kan eg som lærar bidra til at mine framtidige elevar får ei meir relasjonell forståing framfor ei instrumentell forståing. Bevis er nemnt av blant anna Gila Hanna (1990; 2000) og Eric Knuth (2002a; 2002b) som sentralt for nettopp det å utvikle matematisk forståing, men kva tenkjer eigentleg lærarar om dette? Er bevis noko dei tenkjer vil kunne fremje matematisk forståing hjå elevar eller er det i større grad noko dei tenkjer vil vere ei utfordring for elevar og kanskje gjere dei mindre motiverte for å lære matematikk? Dette er dette eg ynskjer å finne ut av gjennom denne studien. Nærare beskrive vil masterprosjektet undersøke kva roller lærarar tillegger bevis i realfagsmatematikken, korleis dei implementerer bevis i undervisninga og kva moglegheiter og utfordringar dei ser med dette. Det er særleg ynskja å undersøke om lærarar oppfattar at bevis kan spille ei rolle i arbeidet med å legge til rette for at elevane kan utvikle forståing av samanhengane i matematikken. Her er det forventa at det er knytt ulike utfordringar til arbeid med bevis, og prosjektet vil også forsøke å beskrive nokre av dei viktigaste utfordringane læraren opplever at han møter i arbeidet. Dette leia til følgjande problemstilling *«Kva didaktiske refleksjonar gjer lærarar seg kring bruk av bevis i matematikkundervisinga?»*

For å svare på problemstillinga på ein meir nyansert og detaljert måte har eg utarbeidd dei følgjande tre forskingsspørsmåla:

1) Kva roller ser lærarar at bevis spelar i realfagsmatematikk?
2) Korleis implementerer lærarar bevis i si undervising?
3) Kva moglegheiter og utfordringar ser lærarar i å bruke arbeid med bevis for å legge til rette for at elevane kan utvikle matematikkforståing ?

For å best mogleg kunne svare på problemstillinga har eg valt å nytte ei kvalitativ tilnærming. Dette er den tilnærminga Vivi Nilssen (2012, s. 21) omtalar som den best eigna for å få innsikt i deltakarane sine tankar, meiningar, opplevingar og refleksjonar, som er akkurat det eg ynskjer i denne studien. Eg har til hensikt å få innsikt i kva lærarar tenkjer om bruken av bevis i undervising og korleis dette kan påverke elevar si læring. Det er difor vidare nytta semistrukturerte intervju i datainnsamlinga. Semistrukturerte intervju gjev intervjudeltakarane fridom i intervjuet. Dei kan her ta opp tema dei sjølve ynskjer å diskutere og oppfølgingsspørsmål vil kunne verte inkluderte etterkvart. Intervjuet blir meir ein samtale mellom intervjuar og intervjudeltakar, snarare enn berre fastlagte spørsmål intervjudeltakar skal svare på (Thagaard, 2013, s. 98). Slik vil intervjudeltakar si historie verte fortalt meir autentisk.

Vidare er observasjon også nytta i datainnsamlinga. Dette kjem av studien sin andre hensikt; å få innsikt i korleis lærarar implementerer bevis i si undervising. Observasjon gjev moglegheita til å direkte sjå kva som føregår og vil gje meir valide og autentiske data enn intervjuperson sine forteljingar (Cohen, Manion & Morrison, 2011, s. 456) I etterkant av observasjon og analyse av fyrste intervju vil det også verte utført eit andre intervju. Dette for å få svar på eventuelle tankar og spørsmål som dukkar opp i analyseprosessen.

I analyseprosessen er ei abduktiv tilnærming nytta. Dette er ei tilnærming som inkluderer både deduksjon og induksjon (Thagaard, 2013, s.198). Det er her nytta deduktive kodar med grunnlag i teori, samt induktive kodar med grunnlag i datamaterialet. Dette er gjort då det å skulle putte andre sine tankar inn i allereie eksisterande boksar kan vere vanskeleg og lite høveleg. Induktive kodar er difor utarbeidd med grunnlag i datamaterialet, som eit supplement til dei deduktive kodane med grunnlag i teori.

1.3 Oppbygging av oppgåva

Oppgåva er bygd opp av seks kapittel. I kapittel 2 vil det teoretiske grunnlaget for studien verte presentert. Eg vil her byrje med å beskrive matematiske bevis og kva som kjenneteiknar desse, før eg så tek for meg det sosialkonstruktivistiske læringsperspektivet som ligg til grunn for studien. Vidare vil eg kort gjere greie for matematiske bevis si historie, før eg går vidare med å beskrive matematiske bevis sine ulike roller. Eg vil deretter ta føre meg formelle og akseptable bevis og kva som ligg i desse to ulike formene for bevis; kva som kjenneteiknar dei, og kva som her er felles og kva som skil dei frå kvarandre. Til slutt vil eg ta føre meg bevis i undervisingssammenheng, samt aspekta ”kritisk tenking” og ”metakognisjon”.

Kapittel 3 i studien vil ta for seg metode og empiri. Her vil kontekst for datainnsamling og metodiske val som er gjort verte beskrive og gjort greie for. Før eg til slutt i dette kapittelet diskuterer studien sin kvalitet og etiske betraktningar.

Kapittel 4 vil ta for seg resultat og analyse. Dette kapittelet er delt i to. Fyrst vil eg beskrive den deskriptive analysen; kva tilnærmingar som er nytta og korleis kodar og kategoriar er utvikla. I den andre delen av dette kapittelet vil kodane verte nærmare beskrive. I tillegg vil funn frå datamateriale og korleis desse passar inn i dei ulike kodane verte presentert.

I kapittel 5 vil funna frå studien verte nærare diskutert og sett i lys av overordna teori og tidlegare forsking. Før eg til slutt vil sjå på studien med eit kritisk blikk. Avsluttande konklusjonar vil verte gjort i kapitel 6. Her ser eg på kva implikasjonar studien kan ha for matematikkundervising, før eg til slutt kjem med nokre forslag til vidare forsking.

Kapittel 2: Teori og relatert forsking

2.1 Teoretisk utgangspunkt – overordna teori

Kva er eit matematisk bevis?

Å gje ein eintydig definisjon på matematisk bevis kan vere vanskeleg. Som Reid og Knipping (2010, s.1) hevdar eksisterer det ikkje eit enkelt og uniformt sett med synspunkt kring kva som kjenneteiknar matematiske bevis, og matematikkdidaktikarar sine perspektiv på både bevis og bevisføring divergerer. Med dette som utgangspunkt utviklar matematikkdidaktikarar ulike forskingsagendaer og kan ende med motstridande resultat (Reid & Knipping, 2010, s. 35).

Divergensen i matematikkdidaktikarar sine perspektiv kan gje variasjonar i oppfatning kring forholdet mellom matematiske bevis og empiriske observasjonar, samt gje variasjonar i verdsetjing av både form og innhald i matematiske bevis. Medan nokre hevdar matematiske bevis er autonome frå empiriske argument, ser andre bevis som inngangen til empiriske undersøkingar (Reid & Knipping, 2010, s. 35). Den relative verdsetjinga av form og innhald kan igjen sprike frå å basere bevis på form åleine til å fokusere på bevis som formuavhengig. Den store diversiteten i matematikkdidaktikarar sine perspektiv på kva som kjenneteiknar matematiske bevis kan gje implikasjonar for undervisinga knytt til temaet (Reid & Knipping, 2010, s. 36).

Gila Hanna er ein av dei som har medverka til forsking på bevis i skulen. Gjennom si forsking har ho minna forskarar innan matematikkdidaktikk på at ein i diskusjonen av bevis burde leggje merke til viktigheten av beviset si rolle i matematisk praksis. Hanna tek utgangspunkt i ein sosialkonstruktivistisk filosofi (Reid & Knipping, 2010, s. 50). Ho skriv:

> «*It is clear that any mathematical truth arrived at through a proof or series of proof is contingent truth, rather than absolute truth, in the series of proofs is contingent truth, rather than absolute truth, in the sense that its validity hinges upon other assumed mathematical truths and rules of reasoning.*» (Hanna, 1996, s. 32, referert i Reid & Knipping, 2010, s. 50)

Ho hevdar med andre ord at matematikk og matematiske funn har kome fram gjennom bevis er ei mogleg sanning, men ikkje ei absolutt sanning, i den forstand at validiteten her avhenger av tidlegare antatt matematiske sanningar og reglar for resonnering. Kvart bevis er basert på forståing, eksplisitt eller implisitt, av kva som kan vere antatt som gjeve og kva argument som er akseptable, og desse spørsmåla kan svarast på berre i kontekst av teori.

Eit av Hanna sine bidrag til matematikkdidaktikken er skiljet mellom formelle, overtydande bevis og forklarande bevis. Dette er alle bevis som må vere deduktive i den forstand at dei nyttar reglar for inferens akseptert av matematikarar, men hennar syn på kva som kan karakteriserast som eit bevis er vidare enn mange andre. Bevis treng i følgje Hanna ikkje å vere rigorøse eller fullført, ho diskuterer bevis som tekst, ikkje som diskurs eller resonnering.

Hanna kan som nemnt seiast å ha ein sosialkonstruktivistisk filosofi (Reid & Knipping, 2010, s. 50). Sosialkonstruktivismen ser på læring som individuell tileigning, samstundes som det sosiale miljøet rundt eleven vert hevda å kunne påverke den individuelle utviklinga (Skott, Hansen & Jess, 2014). For å forklare det sosialkonstruktivistiske perspektivet på læring nyttar Skott et al. (2014) to metaforar: *læring som tileigning* og *læring som deltaking.* Desse vil her verte gjort kort rede for.

Læring som tileigning
Læring som tileigning vert av Skott et al. (2014, s. 63) diskutert i samanheng med den radikale konstruktivismen. Eit læringsperspektiv som dei siste tiåra har hatt stor betyding i matematikkdidaktikken, der det blant anna har spelt ei avgjerande rolle i formuleringa av at elevane i skulen skal lære matematikk med forståing (Skott et al., 2014, s. 63). Læring med forståing har fokus på elevar si aktive oppbygging av kunnskap. Innanfor dette læringsperspektivet er det ikkje tilstrekkeleg at elevar beherskar prosedyrar om ein ikkje forstår det faglege innhaldet i dei og har kjennskap til når og kvifor dei vert nytta (Skott et al., 2014, s. 64). Det er sentralt at elevar klarar å konstruere ein samanheng mellom ulike omgrep og metodar, slik at matematikken kan stå fram som ein heilskap og ikkje som ei lang rekkje isolerande reglar og omgrep (Skott et al., 2014, s. 65). Den radikale konstruktivismen bygger på prinsippet om at kunnskap vert konstruert hjå kvart enkelt individ, det er noko kvar enkelt bygger opp på bakgrunn av dei erfaringar dei gjer seg (von Glaserfeld,. 1995, s. 1, referert i Skott et al., 2014, s. 70). Kunnskap er noko som finst i hovudet til kvar enkelt, følgelig vil det å overta andre si forståing i ferdig form ikkje vere mogleg. Ein må konstruere kunnskap på bakgrunn av sine erfaringar, så om ein forstår eit fenomen i samsvar med verda eller andre si forståing er umogeleg å vite (Skott et al., 2014, s. 70). Ein kan likevel gjennom

kommunikasjon setje ord på det ein tenkjer og forstår, og partane kan utvikle ei antatt felles forståing (Skott et al., 2014, s. 88).

Læring som deltaking

Frå denne synsvinkelen er ikkje læring eit spørsmål om å fyrst bygge ei individuell forståing av omgrep og prosedyrar for så å arbeide saman om desse, her hevdar ein snarare det motsette; at kunnskapsbygging springer frå det sosiale til det individuelle (Skott et al., 2014, s. 93). Læring dreiar seg om å vere ein del av eit fellesskap. Omgrep vert utvikla i sosiale praksisar og språket spelar ei sentral rolle i kunnskapsutviklinga (Skott et al., 2014, s. 93). Lev Vygotsky var ein av dei fremste teoretikarane i pedagogisk samanheng på dette feltet, og er ein sentral referanse for deltakarmetaforen i det sosialkonstruktivistiske læringsperspektivet (Skott et al., 2014, s. 93). Noko av det Vygotsky var særs oppteken av var samspel og kommunikasjon, og korleis elevar utviklar sine kunnskapar og verdiar i interaksjon med andre. Vygotsky meiner at utviklinga springer frå det sosiale til det individuelle, og at ein difor må lære å utføre ei handling i samspel med andre før ein kan klare å utføre handlinga åleine (Imsen, 2006, s. 258-259). Refleksjon er ikkje noko som berre skjer individuelt, men det oppstår i diskusjon med andre. Ei deltaking frå fleire partar er essensielt, for som Anna Sfard hevdar er ein avhengig av deltaking frå andre når ein er på veg inn i ein matematisk diskurs som ein enda ikkje har individualisert (Skott et al., 2014, s. 96). Det er umogeleg å gjennomføre eit ritual utan å forstå det fullstendig i byrjinga, men når ein etterkvart utviklar ei forståing og individualiserer rutina kan ein overta og lære korleis eit gjeve problem kan tilarbeidast (Skott et al., 2014, s. 96-97, s. 105). Språket spelar her ei sentral rolle. Det er ved hjelp av språket tenkinga vert strukturert og språket spelar difor ei sentral rolle i omgrepsdanninga hjå elevar (Skott et al., 2014, s. 101-102).

Sosialkonstruktivismen

Den radikale konstruktivismen og læring som deltaking kan verke som to uforenelege perspektiv, men det kan likevel gje meining å ta omsyn til begge. Skott et al. (2014, s. 133) peikar i denne samanheng på korleis dei to perspektiva utfyller kvarandre. Det deltakingsorienterte perspektivet kan i motsetjing til den radikale konstruktivismen ikkje forklare individuelle skilnadar i elevar si forståing. Samstundes har dette perspektivet sitt syn på kommunikasjon og sosial interaksjon potensial for læring som ikkje den radikale konstruktivismen kan forklare (Skott et al., 2014, s. 133). Begge perspektiva er difor sentrale for å forklare datamaterialet.

Historie

Matematikk har ei sterk historisk forankring, og matematiske bevis har spelt ei viktig rolle i utviklinga av matematikken (Hanna & de Villiers, 2008, s. 329). Reid og Knipping (2010, s. 3-4) omtalar det dei kallar eit standardsyn på bevis og beviset si historie. Dette synet seier at bevis har sitt opphav hjå grekarane, og då spesielt Thales. Fleire teorem og aksiom er assosiert med Thales. Dette er ikkje fordi han nødvendigvis oppdaga desse, men fordi han beviste dei. Tidlegare var matematikk gjort utan bevis, og mange har betrakta kvifor akkurat grekarane bestemte seg for å byrje å nytte bevis i matematikken. Her kjem det fram synspunkt om at det demokratiske samfunnet som vaks fram i området rundt Athen verdsette logiske argument. I staden for å basere matematikken på observasjonar og eksperiment, baserte grekarane matematikken på logiske argument og refleksjonar kring deira eiga resonnering og matematiske metodar (Reid & Knipping, 2010, s. 4). Matematiske bevis har med andre ord spelt ei sentral rolle i matematikken heilt tilbake til grekarane si tid, og har herifrå utvikla seg til den typen formell matematikk basert på teori og logisk deduksjon me kjenner i dag (Hanna & de Villiers, 2008, s. 329).

Matematiske bevis har utvikla seg gjennom historia og kan seiast å vere kulturelt bunde. Det kan seiast å vere påverka av andre sine oppfatningar og misoppfatningar av matematikk, og dette vil kunne variere ikkje berre mellom kulturar, men også innad i ein kultur (Sibley, 2008, s. 365). Det som vert rekna som matematisk bevis av nokre er ikkje nødvendigvis det for andre (Sibley, 2008, s. 365). Generasjonar kan også ha ulik oppfatning av kva som kan kvalifiserast som bevis; det som for ein generasjon vert rekna som matematisk bevis treng ikkje nødvendigvis gjere det same for påfølgjande generasjonar (Reid & Knipping, 2010, s. 3). Ved å studere skilnadane og utviklinga innan bevis og bevisføring gjennom historia kan ein oppdage nye måtar å både oppfatte bevis på og nye metodar for bevisføring. Dette kan gje direkte implikasjonar for undervising og læring av bevis.

Eit av verka har hatt påverknad for matematikken er *Elementa,* hovudverket til den greske matematikaren Euklid (Reid & Knipping, 2010, s. 24). *Elementa* vart skriven i antikken og hadde ei epokeavgjerande betyding for matematikkens utvikling (Reid & Knipping, 2010, s. 16). Verket består av 13 bøker der det kjem fram definisjonar, proposisjonar, aksiom og bevis; her vart matematikken sitt grunnlag og dei elementære delar ein hadde kome fram til på Euklid si tid systematisert (Katz, 2014, s. 52). *Elementa* er kanskje ei av verdshistoria sine mest kjente bøker, og den har hatt stor innflytelse i matematikken sin utvikling (Katz, 2014, s. 50)

Beviset sine ulike roller

Matematikarar har lenge sett at bevis kan spele fleire ulike roller. Som Davis og Hersh skriv:

> *Proof serves many purposes simultaneously. In being exposed to the scrutiny and judgement of a new audience, the proof is subject to a constant process of criticism and revalidation. Errors, ambiguities, and misunderstandings are cleared up by constant exposure. Proof is respectability. Proof is the seal of authority. [..] Proof increases understanding by revealing the heart of the matter. Proof suggest new mathematics.* (1981, s. 151, referert i Reid & Knipping, 2010, s. 73)

Bevis har med andre ord fleire hensikter; det kan nyttast for å verifisere matematiske utsegn, bidra med å utvikle forståing og kommunisere ny matematikk. Gjennom konstant eksponering vil bevis også kunne vere open for kritikk og revidering. I tillegg vil det kunne gje forskarar nye idear, omgrep og strategiar for å oppdage ny matematikk (Reid & Knipping, 2010, s. 73).

Reid og Knipping (2010, s. 74-77) peikar på nokre sentrale roller bevis spelar: bevis kan bidra som verktøy til verifisering, forklaring, utforsking, systematisering og kommunikasjon, samt vere bidragsgivande til nye intellektuelle utfordringar. Desse rollane vil her verte nærare beskrive.

Verifisering

de Villiers (1990, referert i Reid & Knipping, 2010, s. 74) hevdar at verifisering av matematiske utsegn og påstandar tradisjonelt er den eigenskapen ved bevis som har vorte sett på som mest sentral. Ideen bak å bruke bevis for å verifisere matematiske påstandar er å fjerne tvil og skepsis kring den matematiske påstanden, enten for seg sjølv eller ovanfor andre: «*convince youself, convince a friend, convince an enemy*» (Mason, Burto & Stacey, 1982, s. 95, referert i Reid og Knipping, 2010, s. 74). Ei av dei mest kraftfulle eigenskapane ved denne rolla til bevis ligg i generaliteten til konklusjonen – det faktum at beviset etablerer sanninga til eit utsegn for alle situasjonar som oppfyller dei gitte krava (Knuth, 2002b, s. 386).

Forklaring

The role of proof, in his opinion, is not to "check-off" that a statement is correct. The role is to give insight into why the statement is correct (Lipton og Reagan, 2013, s. 36). Lipton og Reagan referer her til Michael Atiyah, ein dei hevdar er ein av verdas største matematikarar (Lipton & Reagan, 2013, s. 35). Med dette utsagnet hevdar Atiyah med andre ord at beviset si rolle ikkje er å verifisere at eit matematisk utsagn er sant, men at det skal gje innsikt i *kvifor* det må vere det. Det er dette som er beviset si forklarande rolle (Hanna, 2000, s. 8). Forklarande bevis viser, til skilnad frå verifiserande bevis, både at eit matematisk teorem stemmer samt kvifor det stemmer. Dette vert sett på som fordelaktig i undervising, då denne typen bevis i større grad kan bidra til personleg forståing (Hanna & de Villiers, 2008, s. 330).

Undersøking/utforsking

Bevisføring er eit viktig aspekt for undersøking og utforsking innan matematikk. Gjennom deduktiv bevisføring kan nye resultat kome fram (de Villiers 1990, refrert i Reid & Knipping 2010, s. 76). Reid og Knipping (2010, s. 76) viser eit døme på at arbeid med bevis kan føre til nye resultat. Reid (2010) gav sine masterstudentar i oppgåve å bevise at summen av to oddetal er eit partal. I denne samanheng var det ein elev som viste dette ved å seie at summen av $2n - 1$ og $2n + 1$ vil gje eit partal; $(2n - 1) + (2n + 1) = 2(2n)$. Her vart to påfølgjande oddetal nytta for å verifisere dette utsegnet, og då kom det fram eit nytt resultat: summen av to påfølgjande oddetal vil vere ein multippel av 4 – ein hadde her utforska og funne noko nytt. Ein kan seie at bevis er ein metode for å utvikle ny kunnskap; ein metode der ein nyttar definisjonar, aksiom og kjente teorem for å bevise nye (Reid & Knipping, 2010, s. 76).

Systematisering

Systematisering vert av Bell (1976, s. 24) hevda å vere den mest karakteristiske matematiske rolla til bevis. Denne rolla omhandlar organisering av resultat til eit deduktivt system av aksiom, omgrep og teorem, samt mindre resultat utvikla frå desse (Bell, 1976, s. 24). de Villiers (1990, referert i Reid & Knipping, 2010, s. 76) nemner også systematisering som ein av bevis sine sentrale roller. Han peikar på systematisering sin signifikans i definering av resultat og teorem. Bevis har i han sine auge ei unik rolle i utviklinga av klarheit. Det er nødvendig for å identifisere avvik, samt vil systematiseringa kunne lede til ei redefinering av aksiom og definisjonar som bevis bygger på (Reid & Knipping, 2010, s. 76).

Kommunikasjon

Publisering av bevis i journalar er den primære måten matematiske resultat vert kommunisert til andre. Vidare er kommunikasjon av bevis sentralt i undervising i universitetssamanheng – det er slik matematiske funn og kunnskap vert formidla til studentane (Reid & Knipping, 2010, s. 77). de Villiers (1990) hevdar bevis er ein form for diskurs; «*[...] proof is a unique way of communicating mathematical results between proffesional mathematicians, between lecturers and students, between teachers and pupils, and among students and pupils themselves»* (s. 22, referert i Reid & Knipping, 2010, s. 77). Kommunikasjon av bevis er med andre ord ein sentral del av matematikken på fleire plan.

Intellektuelle utfordring

de Villiers (1990 referert i Reid & Knipping, s. 77-78) peikar på at bevis gjev matematikarar intellektuelle utfordringar og at det i den forstand spelar ei rolle for sjølvrealisering. I ein analogi fra Mallory`s kommentar om å bestige Mount Everest skriv han følgande: "*it is often not the existence of the mountain that is in doubt (the truth of the result), but whether (and how) one can conquer (prove) it"* (de Villiers, 1999, s. 8, referert i Reid og Knipping, 2010, s. 78). Det er med andre ord ikkje alltid tvil om at resultata i matematikken stemmer, spørsmålet er heller om og korleis ein kan bevise det. I denne samanhengen utfordrar bevisa matematikarar, gjev dei intellektuell stamina, grunn for oppfinnsemd og om ein klarar å gjennomføre eit bevis også ei kjensle av sjølvrealisering. Det er dette som er bevis si rolle som intellektuell utfordring; klarar ein å nytte sin matematiske kompetanse til å bevise eit utsegn eller vil ein måtte anta at det stemmer?

Bevis sine andre roller i matematikk

Andre roller inkluderer estetikk, konstruksjon av empirisk teori, klarhet i definisjon eller konsekvensen av antagelsar og innleming av definisjon av fakta i eit nytt rammeverk (Reid & Knipping, 2010, s. 77). Desse er ikkje nærare definert då tidlegare forsking ikkje peikar på desse som sentrale i undervisingssamanheng

Formelle og akseptable bevis

Bevis kan ha ei rekke ulike meiningar, og vil kunne variere alt etter kva disiplin som er involvert, men ein ting er felles: å spesifisere antagelsar og gje passande argument støtta av ei valid resonnering for å kunne ta ei slutning (Hanna & de Villiers, 2008, s. 329). I diskusjonen av bevis i matematikkundervising er det til hjelp å skilje mellom ulike framstillingar av bevis. Hanna (1990, s. 6) deler bevis inn i tre aspekt; formelle bevis, akseptable bevis og bevis i undervising.

Formelle bevis

Formelle bevis kjenneteiknast ved streng notasjon og matematisk nøyaktighet. Gjennom formelle bevis vert ei gjeve setning bevist ved hjelp av ein endeleg sekvens setjingar som logisk bygger på kvarandre (Hanna & Villiers, 2008, s. 330). Med ein slik formalisme vil sanninga til eit utsegn avhenge av aksiom og deduktive slutningar som kjem fram i beviset, den vil ikkje vere prega av menneskelig skjønn (Hanna, 1990, s. 6). Det er ein type bevis prega av høg grad av rigorøsitet og deduktiv tenking, der det psykologiske aspektet ved bevis på mange måtar er eliminert (Hanna, 1990, s. 6). Dette vil skape ein felles måte å føre formelle bevis på, noko som vil kunne gjere det enklare for framtidige generasjonar å forstå tidlegare matematiske funn og ved hjelp av bevisa kunne byggje vidare på den kunnskapen dei innehar (Hemmi, 2010, s. 273). Formelle bevis er med andre ord bidragsgivande i utviklinga av ny matematisk kunnskap. Her kan framtidige generasjonar nytte det andre har funne ut, før dei skal til å oppdage nye matematiske samanhengar og kunnskap.

Formelle bevis er som nemnt kjenneteikna av rigorøs oppbygging, deduktiv resonnering, streng notasjon og matematisk nøyaktighet, men formelle bevis er så mykje meir enn ei sekvens korrekte matematiske setningar. Kanskje viktigast av alt er dei ei sekvens matematiske setningar som gjev innsikt i matematiske idear som kan underbygge forståing, og då spesielt forståing av kvifor den gitte matematiske setninga må vere sann (Hanna & de Villiers, 2008, s. 330). Det er denne delen som er mest sentral i matematikkundervising; at ein nyttar bevis og bevisføring for å fremje forståing hjå elevane, og ikkje då berre for å vise at ei matematisk setning eller teorem er sant, men også kvifor det må vere sant (Hanna & de Villiers, 2008, s. 330).

Bevis for at summen av dei fyrste n positive heiltalla er $n(n+1)/2$

Me viser dette ved hjelp av induksjon

Fyrst definerer me $S(n) \coloneqq 1 + 2 + \cdots + n$ til å vere summen av dei fyrste n positive heiltalla.

For $n = 1$ er det sant at $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Anta at det er sant for ein tilfeldig k, altså at

$$S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ta så i betraktning

$$S(k+1) = S(k) + (k+1)$$

$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Derfor, vil utsegnet vere sant for $k+1$ dersom der er sant for k. Ved induksjon, vil utsegnet då vere sant for alle n. (Adaptert frå Knuth, 2002a, s. 384).

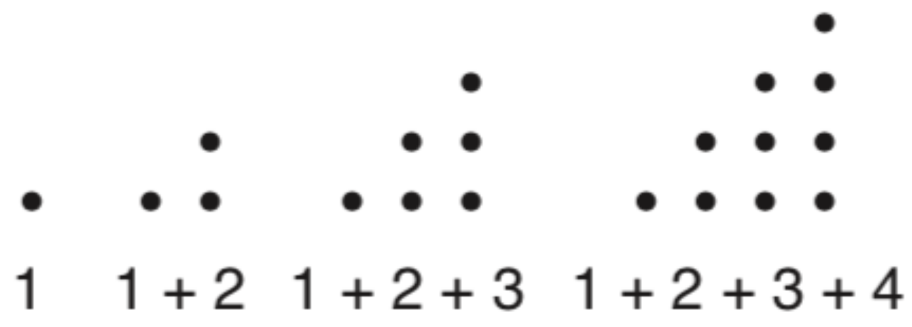
I dømet ovanfor ser ein at induksjon er nytta for å bevise summen av dei n fyrste heiltala er $(n+1)/2$. Det er her nytta ei endeleg sekvens setningar som byggjer på kvarande og ei logisk resonnering for å trekke ei slutning. Det er eit bevis prega av høg grad rigorøsitet og deduktiv tenking, og vil difor etter mi meining vere eit formelt bevis.

Akseptable bevis

I siste halvdel av 1900-tallet byrja matematikarar og matematikkdidaktikarar å revurdere rolla av aksiomatiske strukturar og formelle bevis. Bevis av ulik grad formalitet har blitt sagt å kunne ha same grad av aksept og validitet (Hanna, 1990, s. 7-8). Bevis som gjev grunnlag for forståing og signifikans vert av Hanna (1990, s. 8) hevda å vere eit ideelt bevis. Det er denne forma for bevis ho definerer som *akseptable bevis.* Denne typen bevis skil seg frå formelle bevis då oppbygging og språkbruk er mindre formelt. Medan formelle bevis på si side kjenneteiknast av streng notasjon, matematisk nøyaktighet og høg grad av rigorøsitet, vil akseptable bevis kunne seiast å vere meir uformelle. Det er mindre krav til formell oppbygging og tankegangen er i større grad induktiv (Hanna, 1990, s. 8). Denne typen bevis består i likskap med formelle bevis av rigorøse argument og er akseptert av matematikarar, men det er her lågare krav til oppbygging og deduktiv resonnering. Denne typen bevis opnar opp for eit meir naturleg språk og gjev større rom for forklaringar og visualiseringar (Hanna, 1990, s. 8).

Medan formelle bevis med si rigorøse oppbygging og deduktive tankegang på mange måtar eliminerer bevis si psykologiske side og gjev lite rom for menneskelig skjønn, er ikkje dette tilfelle ved akseptable bevis. Ved å opne opp for forklaringar og visualiseringar gjer det til at bevisa kan tolkast ulikt frå person til person, noko Heinze (2010, s. 101-102) hevdar kan gjere denne typen bevis til individuelle tankeeksperiment. Aksepten av denne typen bevis er basert på personlig vurdering og eit bevis sin signifikans vil kunne vurderast ulikt i ulike fagmiljø (Heinze, 2010, s. 101-102). Også formelle bevis vil kunne vurderast ulike i ulike fagmiljø, det er her ikkje eit klart skilje mellom formelle og akseptable bevis. Det som derimot skil desse typane bevis er bruken av forklaringar ved hjelp av ord og visualiseringar. Dette er noko ein berre vil finne i det Hanna (1990) definerer som akseptable bevis og ikkje dei det som av Hanna vert definert som formelle bevis.

Døme på bevis som viser at summen av dei fyrste n positive heiltala er lik $(n + 1)/2$:
Me kan representere summen av dei fyrste n positive heiltala som trekanttall.



Her vil prikkane forme ein likebeina trekant, der det n-te triangelet inneheld

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \text{ prikkar.}$$

Ved å legge ein likebeina trekant av same storleik over dei allereie eksisterande trekantane slik at diagonalane overlappar vil produsere eit kvadrat med $n^2 + n$ prikkar, der dei n ekstra prikkane vil vere den overlappande diagonalen. For å illustrere, vil figuren under representere den fjerde likebeina trekanten og ein anna likebeina trekant av same storleik overlagt slik at diagonalane overlappar. I dette tilfellet vil eit kvadrat med 4^2 pluss 4 ekstra prikkar grunna den overfallande diagonalen verte produsert.

Difor vil det i det generelle tilfellet, der ein nyttar den n-te trekanten, verte produsert eit kvadrat med $n^2 + n$ prikkar.
Dette gjev

$$2S(n) = n^2 + n$$

Som vidare gir

$$S(n) = \frac{n^2 + n}{2}$$

(Adaptert frå Knuth, 2002a, s. 487)

Dømet ovanfor er eit bevis for summen av dei n fyrste heiltalla, og på lik linje med dømet tidlegare verifiserer dette at setninga stemmer, men i staden for induksjon er det her nytta visualiseringar og forklaringar i prosessen. Dette vil difor vere eit døme på eit akseptabelt bevis. Dette vil også i følgje Kntuh (2002a, s. 487-488) kunne seiast å vere eit forklarande bevis og eit bevis der bevis si forklarande rolle i større grad kjem fram, noko han hevdar er positivt i undervising då det i større grad fasiliterer til matematisk forståing og læring.

Bevis i undervising

Bevis sine ulike funksjonar i matematikk og matematikkundervising har vore diskutert blant forskarar og didaktikarar over fleire år. Konsensus mellom matematikarar og filosofar er ofte at bevis er sentralt i matematikken primært fordi bevis etablerer sanninga av matematiske utsegn (Hanna & Barbeau, 2008, s. 329; de Villers, 1990, referert i Reid & Knipping, 2010, s. 74). Denne typen bevis viser *at* eit teorem eller matematisk utsegn stemmer – det verifiserer og gjev evidens (Knuth, 2002a, s. 487). Dette er det som av Reid og Knipping vert definert som bevis si verifiserande rolle. Bevis har, som nemnt fleire roller utover dette, bevis forklarar, kommuniserer, utforskar, systematiserer og gjev rom for intellektuelle utfordringar (Reid, & Knipping, 2010, s. 74-77). Ein kan seie at bevis formidlar dei metodane, verktøya, strategiane og konsepta som ofte vert sett på som essensen i matematikk (Hanna & Barbeau, 2008, s. 345). Som Rav (1999) hevdar: *«Proofs are the mathematican´s way to display the mathematichal machinery for solving problems and to justify that proposed solution to a problems is indeed a solution»* (s. 13). Bevis kan seiast å vere berarar av matematisk kunnskap (Rav, 1999, s. 13).

Det eksisterer fleire metaforar for bevis si rolle i matematikken. Manin (1992) samanliknar aksiom, teorem og definisjonar med områder i landsskapet og bevis som vegane mellom dei - han hevdar: *«Axioms, definitions and theorems are spots in the mathscape, local attractions and crossroads. Proofs are the roads themselves, the paths and highways. Every itinerary has its own sightseeing qualities, which may be more important than the fact that it leads from A to B»* (referert i Hanna, 2000, s. 7). Denne metaforen snakkar i følgje Hanna (2000, s. 7) direkte til matematikkundervisinga. Formelle bevis med sin strenge matematiske notasjon og deduktive resonnering er viktige for å kunne avgjere om eit utsegn er sant eller ikkje, men det er fyrst og fremst når læraren formidlar bevis på ein måte som kan leie til forståing av matematikken sine mange abstrakte aksiom, teorem og definisjonar at bevisa verkeleg får fram sitt potensiale. Det er med andre ord når bevis sine «sightseeing» eigenskapar kjem fram i undervisinga at bevis kan fasilitere til læring og forståing (Hanna, 2000, s. 7). Når bevis blir brukt ikkje berre til å vise *at* noko stemmer, men også til å vise *kvifor* det stemmer.

Verifisering vs forklaring

I skulen er det bevis som verifikasjon og forklaring ein møter fyrst (Hanna, 2000, s. 8). Som nemnt er det ein konsensus blant matematikarar og filosofar at det er bevis si verifiserande rolle som er den primære årsaka til at bevis er sentralt i matematikken. Innan didaktisk forsking er det på den andre sida fleire argument for at det er bevis si forklarande rolle som er den primære (Hanna, 2000, s. 8; Hersh, 1993, s. 396). Som den tidlegare presidenten i Mathematical Association of America hevdar: *«the emphasis on proof should be more on its educatioal value than on formal correctness. Time need not be wasted on the technical details of proofs, or even on entire proofs, that do not lead to understanding or insight.»* (referert i Knuth, 2002, s. 487). I følgje Mathematial Association of America burde ein med andre ord ikkje bruke så mykje tid på å vise *at* noko stemmer, men i staden bruke tid på bevis som bidreg til forståing og innsikt i *kvifor* noko stemmer.

Det er spørsmålet om *kvifor* som av Hanna (2000, s. 8) vert sett på som det fundamentale ved bevis, og det spørsmålet bevis burde svare på i undervisingssamanheng. Bevis burde leggast fram som forklaring av matematiske utsegn, det er fyrst då bevisa sitt fulle potensiale i undervising kjem fram. Av denne grunn hevdar Hanna (1990, s. 12) det i undervisingssamanheng er fordelaktig å velje akseptable bevis, då det er desse som i størst grad gjev innsikt i spørsmålet om *kvifor*. Knuth (2002a, s. 487) støttar Hanna i sitt utsegn om at akseptable bevis er fordelaktig i undervising. Akseptable bevis vert av Knuth (2002a, s. 487) hevda å underbygge forståing av matematikk i større grad enn formelle bevis. Akseptable bevis gjev betre innsikt i den underliggande argumentasjonen i beviset og vil då i større grad fasilitere forståing (Knuth, 2002a, s. 487).

Tidlegare er det gjeve to ulike dømer av bevis for utsegnet «summen av dei fyrste n heiltalla er lik $\frac{n(n+1)}{2}$». Begge desse bevisa vil kunne reknast som valide bevis, då dei begge beviser *at* utsegnet stemmer. Det som derimot skil dei to bevisa er argumentasjonen for *kvifor* summen av dei n fyrste heiltalla må vere lik $\frac{n(n+1)}{2}$. I det akseptable beviset er det gjennom ein visuell representasjon vist at n^2 er eit resultat av arealet til kvadratet av prikkane og at dei ekstra n prikkane er eit resultat frå den overlappande diagonalen. Vidare hevdar Knuth (2002a, s. 487-488) at ein gjennom å leggje to trekantar saman for å danne eit kvadrat med sider n^2 tydeleggjer *kvifor* ein må dele på 2. Konklusjonen i det akseptable beviset byggjer med andre ord ikkje berre på deduktive argument, men på geometriske representasjonar. Dette er eit bevis som i større grad forklarar *kvifor* utsegnet er sant, då det her baserer seg på visuelle representasjonar i tillegg til den analytiske bevisføringa. Av denne grunn vil denne typen bevis i større grad bidra til forståing og vere meir eigna i undervisingssamanheng enn det formelle beviset (Knuth, 2002a, s. 488).

Utforsking vs bevis

Framvekst av dynamiske programvarer som grafteiknarar og andre digitale verktøy har opna opp for fleire moglegheiter til utforsking i matematikkundervising, og då spesielt innan geometri (Hanna, 2000, s. 12). Dynamiske programvarer gjev moglegheita til å utføre geometriske konstruksjonar med høg grad av nøyaktighet og vidare utforske konstruksjonane sine eigenskapar. Det kan seiast å vere eit verktøy for utforsking som kan gje elevar innsikt i signifikansen til teorem, teste hypotesar og kanskje til og med oppdage nye eigenskapar (Hanna, 2000, s. 12). Dynamiske programvarer har med andre ord stort potensiale som verktøy for utforsking (Hanna, 2000, s. 12).

Til dømes vil ein kunne gjere nytte av dynamiske programvarer i beviset for at midtnormalen til kvar av sidene i ein vilkårleg trekant vil krysse i eit punkt. Ved å her konstruere ein trekant i ei dynamisk programvare og trekke midtnormalen til alle sidene vil ein kunne sjå at desse kryssar i eit punkt. Om ein så drar i eit av hjørna i trekanten vil trekanten endre seg, men ein vil sjå at midtnormalane framleis kryssar i same punkt – ein har her nytta den dynamiske programvara til å utforske teoremet og utvikla evidens for at teoremet er sant (Hanna, 2000, s. 13). Elevar går i følgje Hanna (2000, s. 13-14) ofte til konklusjonen om at dei no har bevist teoremet, men det vil ikkje vere tilfelle. Bruken av den dynamiske programvara vil kunne skape eit mentalt bilete av teoremet og kunne gje implikasjonar for at det stemmer, men det vil ikkje bevise det. Utforsking og nyttegjering av dynamiske programvarer kan med andre ord ikkje erstatte deduktive bevis, men det kan fungere som eit supplement (Hanna, 2000, s. 14).

Utforsking var ei sentral del av matematikken lenge før datamaskiner og dynamiske programvarer vart utvikla (Hanna, 2000, s. 14), og er som nemnt ei av bevis sine sentrale roller. Gjennom utforsking gjer ein nemleg bruk av deduktiv resonnering, som kan seiast å vere sjølve fundamentet til bevis (Hanna, 2000, s. 14). Til trass for at utforsking og bevisføring er to separate aktivitetar utfyller dei kvarandre og vil begge vere nødvendig i matematikken. Utforsking ledar til oppdaging medan bevisføring verifiserer og forklarar (Hanna, 2014, s. 14).

Visualisering og visuelle bevis

Diagram og andre visuelle representasjonar har lenge vore brukt i undervising for å fasilitere forståing. (Hanna, 2000, s. 15). Visualiseringar har på mange måtar vore sett på som heuristiske akkompagnement til bevis, på den måten at visualiseringar kan inspirere både teoremet og tilnærminga i beviset (Hanna, 2000, s. 15). Dei siste tiåra har det derimot blitt gjort forsking på om bruk av visuelle representasjonar i matematikk og matematikkundervising ikkje berre kan nyttast som visuelle hjelpemiddel og evidens for matematiske utsegn, men også som grunngiving og verifisering (Hanna, 2000, s. 15). Det blir med andre ord forska på: *kan visuelle representasjonar nyttast som matematiske bevis?*

Borwein og Jörgenson frå CECM, Centre for Experimental and Constructive Mathematics, er nokre av dei som har forska på visuelle representasjonar si rolle i matematikk og om desse kan nyttast som matematiske bevis. Dei to spørsmåla dei stilte seg var: *«Can it contribute directly to the body of mathematical knowledge?»* og *«Can an image act as a form of visuel proof?».* (Hanna, 2000, s. 16). Til begge desse spørsmåla var svaret deira ja. Borwein og Jörgenson hevdar nemleg at visuelle representasjonar har kvalifikasjonar som gjer til at dei kan nyttast som matematiske bevis. Dette grunnar Borwein og Jörgenson i at visuelle representasjonar viser det same som eit tradisjonelt matematisk bevis, men i staden for å vere ei sekvens av logisk deduktive setjingar er dei visuelle representasjonane eit statisk bilete. Dette statiske biletet kan innehalde same informasjonen som eit setjingsbasert bevis, men til skilnad frå det setningsbaserte beviset «leiar ikkje» den visuelle representasjonen lesaren gjennom informasjonen. I staden legg det opp til at lesaren sjølv må sjå kva informasjon som er sentralt og kva informasjon som ikkje er det (Hanna, 2000, s. 16). Visuelle representasjonar som kan fungere som visuelle bevis er av denne grunn få, og har ein tendens til å vere avgrensa i generalitet og omfang (Hanna, 2000, s. 16).

Resonnering i matematikk

Å resonnere blir av språkrådet definert til å bety "å tenkje (over), å slutte (seg til)" (Språkrådet & UiB, 2019). Det at elevar resonnerer i matematikk kan dermed seies å vere evna til å tenkje over og reflekterer kring det matematiske innhaldet i oppgåver og aktivitetar ein utfører. Eit matematisk resonnement vert av Niss og Højgaard Jensen (2002, s. 54) definert som ei kjede skriftlege eller munnlege argument som vert gjeve for å støtte ein påstand. Resonnering kan difor seiast å stå i nær relasjon til bevis, då resonnering i likskap med bevis omhandlar logisk tenking kring konsept og situasjonar (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 129).

Ein skil ofte mellom fire ulike typar resonnering: deduktiv resonnering, induktiv resonnering, abduktiv resonnering og resonnering ved anaologi (Reid & Knipping, 2010, s. 83). Ein måte å skilje mellom desse er å sjå på korleis dei nyttar tilfelle, reglar og resultat. Ved ei deduktiv resonnering vil tilfelle og regel kunne implisere eit resultat. Sokrates er eit menneske, alle menneske er dødelige, derfor: Sokrates er dødelig, vil vere eit døme på ei deduktiv resonnering. Deduktiv resonnering kan seiast å vere ei kjede av deduksjonar. Induktiv resonnering handlar imidlertid om å generalisere enkelttilfelle. Her har ein fleire liknande tilfelle og samsvarande resultat som ein generaliserer. Om ein har tilfella «Sokrates er dødelig», «Truls er eit dødelig», «Mia er dødelig» kan ein ved induktiv resonnering generalisere til at «menneske er dødelige». Abduktiv resonnering vil kunne seiast å vere å resonnere baklengs. Her byrjar ein med eit resultat og ein reglel som kan leie til eit tilfelle. «Stella er eit dyr» og «Hundar er dyr» vil ved ei abduktiv resonnering kunne gje tilfellet «Stella er ein hund». Til skilnad frå deduktiv resonnering vil verken ei induktiv eller abduktiv resonnering verifisere ein påstand. Ved induktiv resonnering vil ein kunne gjere ei generalisering frå mange samsvarande resultat, medan ein ved ei abduktiv resonnering vil kunne forklare og utforske eit tilfelle. Resonnering ved anologi skil seg frå dei tre ovannemnte. Denne typen resonnering involverer det å bruke ein velkjent situasjon til å hevde noko om ein mindre kjent situasjon. Ein kan her gå frå eit tilfelle til eit nytt tilfelle, frå eit kjent resultat til eit nytt resultat (Reid & Knipping, 2010, s. 83-84).

Deduktiv resonnering kan seiast å vere basisen i bevis og det å utvikle elevar si evne til å resonnere deduktivt kan difor sjåast på som eit av måla med å undervise bevis (Reid & Knipping, 2010, s. 84). Bruken av deduktiv resonnering i klasserommet er i mange tilfelle kompleks og vanskeleg å analysere. I dei fleste tilfelle er deduktiv resonnering assosiert med det å skulle verifisere matematiske utsegn, men deduktiv resonnering kan også spele andre rollar. Det kan i nokre tilfelle verte brukt for å forklare. I tilfelle det er ikkje er nokon tvil om at eit matematisk utsegn er sant eller ikkje kan deduktiv resonnering og dei reglane ein nyttar for å kunne implisere resultatet verte brukt for å forklare kvifor ein vil få det resultatet ein får (Reid & Knipping, 2010, s. 87).

Resonnementkompetanse, eller det å kunne resonnere matematisk vert av Niss og Højgaard Jensen (2002, s. 43) nemnt som sentralt for å utvikle matematisk kompetanse. Resonnementskompetanse slik Niss og Højgaard Jensen definerer det omhandlar det å kunne følgje og bedømme eit matematisk resonnement. Resonnementskompetansane handlar med andre ord om å kunne vite og forstå kjeder av argument framstilt av andre enten skriftleg eller munnleg. Det å forstå kva eit matematisk bevis er og korleis dette skil seg frå andre former for matematiske resonnement vert av Niss og Højgaard Jensen peika på som eit viktig element. Ein må kunne avgjere når matematiske resonnement utgjer eit bevis og når det ikkje gjer det.

Her inngår det å forstå den logiske betydinga av eit moteksempel, kunne avdekke dei berande ideane i eit matematiske bevis og kunne skilje mellom hovudpunkt og detaljar, mellom idear og teknikalitetar. Utover dette er omhandlar resonnementskompetansen om å kome fram til og gjennomføre uformelle og formelle resonnement.

Matematisk argumentasjon

Bevis og argumentasjon kan seiast å vere to sider av same sak, for som Stylianides (2007, s. 291) hevdar er bevis matematiske argument.

> *Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:*
>
> - *It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;*
> - *It employs form of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and*
> - *It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community*.

Bevis kan med andre ord seiast å vere eit matematisk argument i den forstand at ein i bevisføringa nyttar ei sekvens påstandar for eller imot eit matematisk utsegn. Ein nyttar her påstandar, resonnering og uttrykksform som er akseptert i eit fagleg fellesskap. Det er her ein kan seie bevisa er eit argument. Matematisk argumentasjon referer i følgje Umland og Sriraman (2014, s. 44) til *«the process of making an argument, that is, drawing conclusions based on a chain of reasoning”*. Og det er akkurat dette bevisføring handlar om, ein nyttar resonnering basert på aksepterte påstandar og argumenterer for kvifor eit utsagn må vere riktig.

Det er derimot ulike typar resonnering og argument som kan utgjere eit bevis, og det å skilje mellom dei ulike formene for resonnering og argumentasjon i bevis og bevisføring er det Reid og Knipping (2010, s. 129) ser på som eit av dei viktigaste resultata innan didaktisk forsking på bevis. For å beskrive dei ulike formene for resonnering og argumentasjon ein kan nytte i bevisføring viser dei til Balacheff si klassifisering av argumentasjon (Reid og Knipping, 2010,

s. 129). Balacheff (1988, s. 217) skil mellom to ulike typar bevis; pragmatiske og konseptuelle. Pragmatiske bevis vert kjenneteikna av konkretisering og faktiske handlingar, ein kan nytte til dømes teikningar, analogiar og fysiske objekt i bevisføringa (Balacheff, 1988, s. 217). Konseptuelle bevis baserer seg i motsetjing til pragmatiske bevis ikkje på konkrete tilfelle eller handlingar, denne typen bevis er basert på formuleringar av dei aktuelle eigenskapane det vert spurt om og forholdet mellom dei (Balacheff, 1988, s. 217). Basert på argumentasjon vert desse bevisa klassifisert i fire undergrupper: *naiv empirisme, avgjerande eksperiment, generiske eksempel og tankeeksperiment* (Balacheff, 1988, s. 218). *Naiv empirisme* er her kjenneteikna av at sanninga av ein påstand vert etablert etter å ha verifisert fleire hendingar (Balacheff, 1988, s. 218). *Avgjerande eksperiment* er på si side tilfella der ein påstand er verifisert på grunnlag av å teste eit spesielt tilfelle som er valt å vere «typisk» i den forstand at det ikkje har nokon tydelege spesielle eigenskapar (Balacheff, 1988, s. 218-219). *Naiv empirisme* og *avgjerande eksperiment* kan då seiast å vere to typar «bevisføring» der sanninga av ein påstand ikkje vert etablert, men resonnementa er godkjent som bevis av dei som produserer dei. *Generiske eksempel* er tilfella der ei hending eller eit tilfelle er nytta for så å verte generalisert; her vert det spesielle tilfellet brukt for å stå for alle tilfelle i eit generelt argument (Balacheff, 1988, s. 219). Vidare er *tankeeksperiment* tilfella der resonnering er fråkopla spesifikke hendingar og handlingar, og det berre er mentale operasjonar innvolvert i resonneringa (Balacheff, 1988, s. 219).

Gjennom skildringa i førre avsnitt kjem det fram at det for Balacheff er handlingar, bruk av spesifikke hendingar og språk som er det sentrale i klassifisering av argumentasjon i bevisføringa (Reid og Knipping, 2010, s. 130). Bevis basert på spesifikke hendingar og tilfelle vil falle under dei tre kategoriane *naiv empirisme, avgjerande eksperiment* og *generiske eksempel*. Medan bevis der argumentasjonen i større grad baserer seg på mentale operasjonar og formuleringar av dei matematiske eigenskapane det vert spurt om vil *tanke eksperiment* og *matematiske bevis*. Reid og Knipping (2010, s. 130) hevdar dette kan overførast til fire breie kategoriar for å skilje argumentasjon og korleis det blir brukt: *empiriske argument, generiske argument, symbolske argument og formelle argument. Empiriske argument* er tilfella der spesifikke eksempel er nytta, men ikkje representert generelt. *Generiske argument* representerer tilfella der eksempel vert nytta som representasjon, medan *symbolske argument* er tilfella der ord og symbol er brukt for representasjon. Dei *formelle argumenta* skil deg ut ved at ord og symbol her er nytta utan å representere noko.

Argumentasjon er ofte kopla saman med bevis i matematikkdidaktisk forsking (Reid & Knipping, 2010, s. 153), og har dei siste åra fått eit auka fokus i matematikkundervising (Hanna, 2014, s. 406). Duval (1999) peikar på to punkt for det auka fokuset på argumentasjon i matematikkundervising:

- *The recognition in the disciplines of philosophy and linguistics that natural languages rather than formal languages are the basis for human thought and communication*
- *The recognition in mathematics education of the importance of social processes in learning* (referert I Reid & Knipping, 2010, s. 153)

Det kan med andre ord seiast å vere argumentasjon sitt meir naturlege språk og viktigheten av sosial samhandling i undervising som er årsaka til det auka fokuset på argumentasjon i matematikkundervisinga. Hanna (2014, s. 406) hevdar det er forskingsresultat som viser at elevar har stort utbytte av matematisk argumentasjon som er årsaka til at argumentasjon til stadighet får større plass i matematikkundervisinga.

Matematisk forståing

I matematikken skil ein gjerne mellom instrumentell og relasjonell forståing, der instrumentell forståing ofte vert kopla opp mot tradisjonelle undervisingsformer medan relasjonell forståing vert sett i samanheng med meir undersøkande undervisingsformer (Nosrati & Wæge, 2015, s. 4). Instrumentell forståing ofte inneber det å lære formlar og reglar for korleis finne løysing på problem; ein veit *korleis* oppgåva skal løysast. Relasjonell forståing inneber på si side å byggje opp omgrepsmessige strukturar og sjå samanhengar i faget; med relasjonell forståing ser ein *korleis* oppgåva skal løysast samstundes som ein forstår *kvifor* det er slik (Skemp, 1976, s. 20). Skemp (1976, s. 25-26) samanliknar skilnaden mellom desse to forståingane med det å skulle ta vegval. Om ein har instrumentell forståing og får ei rute ein skal velje kan ein klare å kome seg fram til endestoppet, men om ein på eit tidspunkt her går feil veit ein plutseleg ikkje kva ein skal gjere. Ein person som då har utvikla relasjonell forståing vil ha fleire nye moglege ruter ein då kan følgje, ein har eit heilt rutenett over byen som personen med instrumentell forståing ikkje har. Går denne personen feil vil han framleis vite kvar ein er og vil kunne finne fram til riktig endestopp og til og med kanskje lære noko på vegen.

Anologien mellom dette og læring i matematikk er ganske tett. Elevar med ei instrumentell forståing har opparbeida ei rekkje prosedyrar og instruksar som gjer til at dei kan kome seg frå spesifikke startposisjonar (oppgåver) til endepunkt (svar på oppgåvene) (Nosrati & Wæge, 2015, s. 4). Elevane har derimot ikkje utvikla ei underliggande forståing av relasjonen mellom dei ulike stega og endepunkta, her er dei avhengige av vegleiing frå andre om dei skal finne ein «ny måte å komme seg fram på» (Nosrati & Wæge, 2015, s. 4). Det er her elevar med ei relasjonell forståing skil seg frå elevar med ei instrumentell forståing. Desse har i større grad ei forståing av dei underliggande relasjonane. Dei har opparbeida seg ei rekkje mentale strukturar og vil kunne klare å finne uendeleg mange måtar å kome seg frå eit startpunkt til eit sluttpunkt utan vegleiing frå andre (Nosrati & Wæge, 2015, s. 4).

Korleis kan ein så fremje ei relasjonell forståing hjå elevane? I ei analyse av forsking om undervisinga sin effekt på elevane si læring gjort av Hiebert og Grouwes (2007) kom det fram to faktorar ved matematikkundervising som kan vere med på å fremje elevar si relasjonelle forståing: eksplisitt fokus på samanhengar mellom matematiske idear, fakta og prosedyrar (s. 383) og å la elevar få streve med matematiske idear (s. 387-388). Å ha eit eksplisitt fokus på samanhengar mellom matematiske idear, fakta og prosedyrar kan innebere å la elevane arbeide med oppgåver der dei må diskutere den matematiske meininga bak prosedyrane, koreleis matematiske problem byggjer på kvarande og arbeide med samanhengar mellom ulike matematiske idear og korleis dette har samanheng med kunnskap dei har opparbeida seg tidlegare. Bevis og då spesielt arbeid med generiske eksempel som vert diskutert seinare kan sjåast i samanheng med nettopp dette. Det å la elevane streve med matematiske idear handlar om å la elevane gjere ein innsats for å forstå matematikken – dei må bruke energi for å finne ut noko dei ikkje umiddelbart ser løysinga på (Hiebert & Gouwes, 2007, s. 383). Matematisk diskusjon og kommunikasjon vert peika på som sentralt i denne prosessen og som heilt avgjerande for å utvikle ei relasjonell forståing i matematikk. Dette kjem også fram hjå Carpenter, Franke og Levi (2003, s. 6, referert i Nosrati & Wæge, 2015, s. 8):

> *Students who learn to articuale and justify their own mathematical ideas, reason through their own and others mathematical explanations, and provide a rational for their answers develope a deep understanding that is crucial to their future success in mathematics and related fields.*

Det å kunne verifisere og argumentere for sine eigne matematiske idear og gjennom både eigne og andre sine matematiske forklaringar kunne gje ei rasjonell løysing på problem vil kunne utvikle ei djupare forståing og er nødvendig for suksess i både matematikk og andre områder seinare. Til trass for at det fyrst er ved ei relasjonell forståing elevar verkeleg utviklar ei evne til å forstå og kunne nytte matematikken, peikar Skemp (1926) på at ei instrumentell forståing også har sine fordelar. Gjennom ei instrumentell forståing vil elevar kunne svare på fleire matematiske problem; dei veit korleis gjennom å ha fått ei instrumentell forståing av prosedyrar og reglar. Elevane vil då kunne få nokre riktige svar ned på papiret, noko som kan gje ei kjensle av meistring. Dette er noko Skemp (1926, s. 23) peikar på at ein ikkje skal undervurdere.

Metakognisjon

Sjølvforståing er nemnt som eit av formåla med matematikkundervising, og i denne prosessen er metakognisjon og medvit nemnt som sentale omgrep i den matematikkdidaktiske litteraturen (Nosrati & Wæge, 2015, s. 6). Metakognisjon kan seiast å vere det å «tenkje på å tenkje»; at ein blir meir medvit sin eigen tankegang (Furnes & Norman, 2013, s. 120-21; Nosrati & Wæge, 2015, s. 6). Det å la elevar venje seg til å tenkje over ein eigen tankegang i matematiske samanhengar har vist seg å ha ein positiv effekt for elevar si læring, og metakognisjon vert difor sett på som eit verktøy for å fremje læring av matematikk (Nosrati & Wæge, 2015, s. 6).

Medvit er ikkje på same måten som metakognisjon underlagt matematikken, dette er snarare eit mål i seg sjølv og eit mål matematikk kan leie til (Nosrati & Wæge, s. 7). Som Powell (2007, s. 203 referert i Nosrati & Wæge, 2015, s. 7) hevda:

> *[...] mathematical situastins are proposed to learners who, invited to participate actively, become aware, little ny little, of the relationships that struture the situastions, and at the same time understand better the dynamics of their own mental functions.*

Elevar må med andre ord få moglegheita til å tenkje og reflektere over sine eigne tankeprosessar slik at dei betre kan forstå og handtere hindringar dei støter på (Nosrati & Wæge, s. 7). Dette er ikkje noko som er eit mål berre i matematikken, men også i samfunnet generelt og i utdanninga av elevar. Skulen utdanne elevar til å bli sjølvstendige, kritiske og innovative samfunnsborgarar – ein skal ikkje utdanne berre for å lære vekk kunnskapar og ferdigheitar, men ein skal utdanne for å danne. Det å gjere elevar meir medvit sin eigen tankegang er eit sentralt element her.

Kritisk tenking

I læreplanverket sin overordna del står det følgjande: *Skolen skal bidra til at elevene blir nysgjerrige og stiller spørsmål, utvikler vitenskapelig og kritisk tenkning og handler med etisk bevissthet. [...]Opplæringen skal gje elevene en forståelse av kritisk og vitenskapelig tenkning.* (Utdanningsdirektoratet, 2018, s. 7). Det å kunne tenkje kritisk og å kunne nytte fornufta på ei undersøkande og systematisk måte i møte med praktiske utfordringar, ytringar og kunnskapsformer er med andre ord ein sentral del av kompetansen elevar skal sitje igjen med etter avslutta utdanning.

For å kunne delta som kritisk medborgar i eit demokratisk samfunn er det avgjerande at ein kan forstå innhaldet i politiske debattar; lese og tolke grafar og diagram, vurdere statistisk materiale og kunne vurdere og utføre enkle formlar og berekningar. I tillegg til at ein med eit kritisk syn må kunne reflektere kring resultata og informasjonen ein leser og debatterer kring i eit demokratisk samfunn. Ein må som kritisk medborgar kunne avgjere kva informasjon som er påliteleg og ikkje. Dette er alle prosessar og oppgåver som krev matematisk kompetanse utover det å bruke formlar og løyse algoritmar. For å delta er det avgjerande at ein utviklar eit sjølvstendig forhold til matematikk. Det er her ein føresetnad at ein utviklar ei matematisk forståing og ei evne til å kunne drøfte og resonnere kring matematisk kunnskap og matematiske problem. I tillegg til å utvikle ei evne til å kunne bruke den matematiske kompetansen kritisk i samfunnet. Som Smestad (2015, s.2) skriver i sin artikkel; ein må kunne bruke matematikken slik ein handverkar brukar innhaldet i verktøykassen, ikkje slik ein ville brukt ein unbrakonøkkel etter oppskrifta i ein IKEA pakke. Matematikk er meir enn formlar og algoritmar, og det å utvikle matematisk kompetanse er meir enn å kunne matematiske prosedyrar og metodar. Det er gjennom matematisk kompetanse ein utviklar ei evne til å forstå og kritisk vurdere det demokratiske systemet, og det er i prosessen kor ein utviklar matematisk kompetanse og ei evne til kritisk tenking arbeid med bevis vert sett på som sentralt.

2.2 Substansielle teoriar inkludert anna empirisk forsking på temaet

Denne masteroppgåva har til hensikt å få innsikt i lærarar sine refleksjonar kring bruk av bevis i undervisinga. Det er tidlegare gjort lite forsking på bevis si rolle i norsk skule, men Vigdis Óskardóttir (2016) undersøkte bevis i lærebøker for matematikk R1. I denne studien var det tre lærebokforfattarar sine didaktiske refleksjonar kring bevis som var forska på; kva refleksjonar lærebokforfattarane hadde kring temaet bevis når det gjeld elevar si læring og oppbygging av læreboka i matematikk R1 (Óskardóttir, 2016, s. 3). Gjennom studien kom det fram at bevis spelar ei sentral rolle i undervisingssamanheng, men at bevis var eit tema lærebokforfattarane opplevde fleire elevar streva med. Dette påverka deira framstilling av bevis i lærebøkene: dei plasserte formelle bevis mot slutten av eit delkapittel og nytta forklaringar, visuelle representasjonar og eksemplifisering når dei skulle introdusere elevar for nye matematiske teorem og utsegner (Óskardóttir, 2016, s. 62). Formelle bevis vart grunna sitt rigorøse språk og deduktive tilnærming av lærebokforfattarane hevda å forstyrre elevar si læring, dette er ei måte å føre bevis på som krev både tid og modning av elevane. Om ei slik framstilling av bevis møter elevane tidlig i arbeid med eit nytt tema er dette noko lærebokforfattarane peikar på kan vere eit hinder for elevane sin motivasjon i faget (Òskardóttir, 2016, s. 62-63). Av denne grunn nytta lærebokforfattarane forklaringar og visuelle representasjonar i samband med bevis, dette var noko lærebokforfattarane hevda kunne ha ei positiv effekt på elevar si læring; elevane kunne her lettar følgje og forstå beviset (Óskardóttir, 2016, s. 64). Formelle bevis vart likevel prioritert med i lærebøkene, desse er ein viktig del av matematikken. Gjennom dei formelle bevisa får elevane innsikt i matematikken sin eigenart, desse må difor vere tilgjengeleg for dei som ynskjer det (Óskardóttir, 2016, s. 65-66).

Lærebøkene og derav også bruken av bevis i desse skal treffe mange: det skal appellere til elevar, lærarar, læreplan og øvrige lesarar. Hovudfokuset skal vere på elevane si læring, men det er også mange andre faktorar som skal takast omsyn til: ein har ein læreplan som skal følgjast og ein eksamen å førebu elevane på. Det å utforme ei bok som tok omsyn til dette samstundes som den appellerer til læraren var noko lærebokforfattarane såg på som ei utfordring (Óskardóttir, 2016, s. 76). Bevis utgjer ein liten del av læreplanen og vert heller ikkje i stor grad testa på eksamen, noko som påverkar lærebokforfattarar si utforming av lærebøkene (Óskardóttir, 2016, s. 75). Dette vert av lærebokforfattarane også hevda å påverke læraren si bruk av bevis i undervising, dette vert noko dei fokuserer lite på (Óskardóttir, 2016, s. 75).

David S. Dickerson og Helen M. Doerr (2012) undersøkte lærarar sine perspektiv på bruk av bevis i undervisinga. Dette var ei kvalitativ studie med sytten ulike lærarar frå ti ulike High Schools nordaust i USA (Dickerson & Doerr, 2012, s. 714), noko som vil svare til den norske vidaregåande skulen. Lærarane som var med i studien hadde ulik erfaring frå undervising, nokre hadde 5 års erfaring medan andre over 35 års erfaring frå undervising på dette nivået. Vidare varierte utvalet både på kjønn og undervising i privat og offentlig sektor (Dickerson & Doerr, 2012, s. 714). Studien viste to hovudfunn. For det fyrste kom det fram at lærarane såg underbygging av elevar si matematiske forståing som den primære hensikta til bevis i undervising (Dickerson & Doerr, 2012, s. 716). Lærar sine indikasjonar for kvifor matematiske bevis kunne fasilitere forståing var ein diskusjon Dickerson og Doerr (2012, s.

716) hevda kunne passe i to kategoriar: utvikling av matematiske «thinking skills» og utvikling av generaliserte og overførbare «thinking skills». Bevisa gjev elevane djupare innsikt i matematikken sitt innhald og logikken bak; gjennom bevisa får elevane innsikt i dei underliggande resonnementa bak alle teorem, formlar og prosedyrar, dei viser *«where it all comes from»* (Dickerson & Doerr, 2012, s. 717). Noko som av lærarane i studien vart hevda å fasilitere matematisk forståing (Dickerson & Doerr, 2012, s. 718). Arbeid med resonnementa i bevis vart av lærarane vidare hevda å kunne forbetre elevane sine tankeprosessar, som ein lærar hevda: *«It helps their thought processes [...] it helps them think logically. You can´t just shake the bag and everything falls out nice and neat, you know, you gotta know how to put pieces toghether»* (Dickerson & Doerr, 2012, s. 719). Arbeid med matematiske bevis og dei underliggande resonnementa elevane gjennom desse får innsikt i vil kunne gje elevane ei forståing av matematikken sine ulike delar og ei forståing av korleis desse heng saman; ein kan gjennom arbeid med bevis sjå samanhengane i matematikken og putte alle dei små delane saman til ein heilskap (Dickerson & Doerr, 2012, s. 719). Fjorten av dei seksten lærarane peika vidare på korleis arbeid med bevis utvika «thinking skills» som kan overførast til andre områder (Dickerson & Doerr, 2012, s. 720). Dette vart her grunna i at elevar gjennom arbeid med bevis kunne utvikle logiske, kritiske og metakognitive «thinkig skills» (Dickerson & Doerr, 2012, s. 720). Dette vart poengtert å vere bidragsgivande lenge etter elevane er ferdig i skulen og den matematiske kunnskapen kanskje er gløymt eller tenkt på som irrelevant. Som ein lærar i studien seier til sine elevar «*if you never use it again, at least you have developed your ability to think*» (Dickerson & Doerr, 2012, s. 720).

Det andre hovudfunnet i studien vart av Dickerson og Doerr (2012, s. 717) hevda å vere at lærarar hadde ulike tankar om bruk og framstilling av bevis i undervising. Lærarar med mindre erfaring hevda at bevis i vidaregande skule skulle holde seg til strengt språk og resonnering, medan meir erfarne lærarar hevda bevis basert på konkrete eller viseulle eigenskapar hadde større læringspotensiale og var difor meir hensiktsmessig i den vidaregåande skulen (Dickerson & Doerr, 2012, s. 717)

Denne studien har også til hensikt å finne ut kva rolle lærarar tenkjer bevis spelar i undervisingssamanheng. Dette var noko Knuth (2002b) hadde fokus på i si studie, her ynskja han å finne ut kva oppfatning lærarar hadde av bevis (Knuth, 2002b, s. 380). Dette var eit studie med semistrukturerte intervju som primær datainnsamlingsmetode, der data vart samla inn i to delar. Fyrst var fokuset på lærarar si oppfatning av bevis i matematikk og deretter på lærarane si oppfatning av bevis i skulen (Knuth, 2002b, s. 382).

Lærarane i denne studien såg på bevis si verifiserande rolle som den sentrale i matematikken, dei hevda bevis si primære rolle var i etablere sanninga av matematiske påstandar og utsegn (Knuth, 2002b, s. 386). Her kom det fram to ulike perspektiv på korleis bevis skulle verifisere påstandar; elleve av dei seksten lærarane i studien peika her på logiske og deduktive argument, medan dei resterande fem lærarane hevda sanninga vart etablert gjennom meir generelle og overtydande argument. Lærarane var med andre ord samde om at bevis si primære rolle var å verifisere påstandar, men dei hadde ulike oppfatning av generaliteta i bevis sine konklusjonar (Knuth, 2002b, s. 389). Lærarane si oppfatning av bevis si forklarande rolle var også spurt om i denne studien, og her kom det fram resultat som kan stride imot tidlegare teori. Knuth hevdar at overfladiske resultat frå studien kan tyde på at lærarane såg forklaring som ei av bevis sine roller, men vidare kommentarar tyder på dette ikkje er tilfelle. Som han skriv:

> *On the surface, these teachers´comments suggest that they do indeed view explanation as a role of proof; however, their comments pertained more to understanding how one proceeded from the premise to the conclution of a proof – a procedural focus – rather than to understand the underlaying mathematical relationships illuminated by the proof* (Knuth, 2002b, s. 389-390).

Her ser ein bevis si forklarande rolle av lærarane i større grad vert oppfatta som å forstå korleis ein går fram frå premiss til konklusjon snarare enn å forstå dei underliggande matematiske samanhengane. Det er dette som strider i mot tidlegare teori og forsking, her vert bevis si forklarande rolle sett på som det å forklare *kvifor* eit matematisk utsegn er sant og gjennom dette fremje forståing og gje innsikt i matematiske samanhengar (Knuth, 2002b, s. 390).

Tolv av dei seksten lærarane i studien uttrykte også at kommunikasjon var ei av bevis sine sentrale roller i undervisingssamanheng (Knuth, 2002b, s. 390). Dette grunna dei i at bevis ofte er eit produkt av sosial interaksjon. Bevis er ein måte å kommunisere og overtyde andre om si tolking, som ein seier: *”proofs are a method to convince them that your thinking is correct”* (Knuth, 2002b, s. 390). Vidare vart det å utvikle og systematisere kunnskap av lærarane oppfatta som ei av bevis sine roller i matematikken. Åtte av lærarane uttrykte at deira syn på bevis var at det spelte ei sentral rolle i utvikling og systematisering av matematisk kunnskap (Knuth, 2002b, s. 390). Desse vart av Knuth presentert saman, då lærarane samanfatta desse rollane i stor grad i sine utsegn. Det kom her fram at lærarane såg på bevis som sentralt i utviklinga av kunnskap og at denne kunnskapen vert ein del av eit større kunnskapssystem (Knuth, 2002b, s. 390). Som to lærarar uttrykker: *"Math is a building block. Everything is based upon what was proven before", "We can start with something we know. We can og to something we don´t know and add to that system. And then if we start with things we do know we can add things to this system by showing that it logically follow".* (Knuth, 2002b, s. 390).

Her ser ein tydeleg det overnemnte, at lærarane såg på bevis som sentralt i utviklinga av ny kunnskap og at bevis er det den eksisterande matematiske kunnskapen er bygd på. Det som derimot er mindre tydeleg her er om lærarane ser kunnskapen utvikla ved bevis som ein del av eit deduktivt system av definisjonar, aksiom og teorem (Knuth, 2002b, s. 391). Denne studien undersøkte også kva lærarar oppfatta å vere eit valid bevis, men sidan dette ikkje er ein sentral del av mi studie er dette ikkje prioritert å diskutere her.

2.3 Forventingar til kva ein vil finne ut frå gjennomgang av teori og anna relatert forsking

Tidlegare forsking kan indikere at bevis og bevisføring er noko fleire elevar har vanskar med, og då spesielt formelle bevis med sitt rigorøse språk og deduktive tilnærming. Bruk av visuelle representasjonar og forklaringar i arbeid med bevis er difor peika på som hensiktsmessig i undervisingssamanheng. Dette er noko som kan gjere bevisa meir tilgjengelege for elevane, dei kan lettare følgje og forstå beviset (Óskardóttir, 2016; Dickerson & Doerr, 2012). Noko ein også ser igjen i teorien, Knuth (2002a) og Hanna (1990, 2000) peikar begge på visuelle representasjonar og forklaringar i arbeid med bevis som læringsfremjande. Gjennom å inkludere forklaringar og visuelle representasjonar i bevisføringa vil elevane i større grad få innsikt i *kvifor* det matematiske utsegnet stemmer og gjennom dette kunne fasilitere forståing av matematikken (Knuth, 2002a; Hanna, 1990; Hanna, 2000). Det er igjen dette som av Knuth (2002a) og Hanna (1990; 2000) vert peika på som bevis si sentrale rolle i undervisingssamanheng; bevisa skal forklare samanhengane i matematikken og gje elevane innsikt i *kvifor* dei matematiske teorema, formlane og setningane er som dei er. Hensikta med bevis er å fasilitere forståing av matematikken, og det er fyrst når ein legg bevisa fram på ein måte som kan gje elevane innsikt i spørsmålet om *kvifor* læringspotensialet kjem fram (Knuth, 2002a; Hanna 1990; Hanna, 2000). At bevisa si hensikt er å fasilitere forståing kom også fram i Dickerson og Doerr (2012) si studie. Dette vart her grunna i to kategoriar: utviklinga av matematiske «thinking skills» og utvikling av generaliserte «thinking skills» som er overførbare til andre felt. Her vart det i tillegg til det ovannemnde poengter at arbeid med bevis fremja logisk-, kritisk- og metakognitiv tenking, og at elevane gjennom dette kunne overføre sine kunnskapar frå matematikken til andre sider i samfunnet. Dette tenkjer eg kan implisere at visuelle representasjonar og forklaringar kjem fram som sentrale faktorar ved bruk av bevis i undervisingssamanheng også i mi studie. Samt at matematisk forståing og logisk-, kritisk-, og metakognitiv tenking kan kome fram som faktorar bevis kan fasilitere i undervisingssamanheng.

Hanna (1990; 2000) og Knuth (2002a) peikar vidare på bevis si forklarande rolle som den sentrale i undervisingssamanheng. At bevisa skal gje elevar innsikt i den underliggande argumentasjonen bak dei matematiske teorema, formlane og setningar. Det er spørsmålet om *kvifor* som er det fundamentale i undervisingssamanheng og det spørsmålet bevisa skal svare på. Motstridande resultat kom fram i Knuth (2002b) si studie, her var det bevis si verifiserande rolle som stod fram som den primære i undervisingssamanheng, og det er også ein konsensus blant matematikarar at det er dette som er bevis si primære rolle. Tidlegare forsking og teori tenkjer eg då ikkje kan gje nokon klar indikator på kva eg vil finne i mi studie, sidan det her eksisterer motstridande resultat.

Ytre faktorar vert i Óskardóttir (2016) si studie peika på å påverke lærebokforfattarane si utforming av lærebøkene. Det vert her poengtert at bevis er ein liten del av læreplanen i norsk skule og heller ikkje noko som i stor grad vert testa på eksamen, noko som difor påverkar bevis si stilling i lærebøkene. Bevis er også noko som krev tid og modning av eleven, dette er noko fleire elevar har vanskar med. Når dette då heller ikkje vert vurdert i stor grad hevdar lærebokforfattarane at lærarar ofte vel å bruke si tid på å førebu elevar til eksamen framfor å fokusere på bevis i si undervising. Læreplan, vurdering og tid er noko lærarar også må høve seg til, noko som gjer til at dette også kan kome opp som ytre faktorar som påverkar bruk av bevis i undervising i mi studie.

Kapittel 3: Metode og empiri

3.1 Undersøkingsdesign

Dette masterprosjektet har til hensikt å belyse problemstillinga «Kva didaktiske refleksjonar gjer lærarar seg kring bruk av bevis i matematikkundervisinga?»

For å svare på problemstillinga er følgjande forskingsspørsmål utforma:

1) Kva roller ser lærarar at bevis spelar i realfagsmatematikken?
2) Korleis implementerer lærarar bevis i si undervising?
3) Kva moglegheiter og utfordringar ser lærarar i å bruke arbeid med bevis for å legge til rette for at elevane kan utvikle matematikkforståing ?

For å svare på forskingsspørsmål og problemstilling er det sentralt å få innsikt i lærarar sine refleksjonar og erfaringar kring bruk av bevis i matematikkundervisinga. Til dette vert ei kvalitativ tilnærming av Nilssen (2012, s. 21) beskrive som best eigna, då ei slik tilnærming opnar opp for detaljerte og grundige beskrivingar. Alle er berarar av erfaringar og kunnskap, og den kvalitative forskinga fokuserer nettopp på å forstå og gje innsikt i informantar sine tankar, meiningar, opplevingar og refleksjonar (Nilssen, 2012, s. 21). Kvalitative forskingsintervju har som hensikt å få fram nettopp dette – det søker å forstå verda sett frå intervjupersonen si side (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 20). Av denne grunn er kvalitative forskingsintervju brukt som datainnsamlingsmetode i dette masterprosjektet. Prosjektet har også som hensikt å få innsikt i korleis lærarar implementerer bevis i si undervising. For å få betre innsikt i dette spørsmålet er også observasjon nytta som datainnsamlingsmetode. Observasjon gjev moglegheita til å direkte sjå kva som føregår og vil gje meir valide og autentiske data enn intervjuperson sine forteljingar åleine (Cohen et al., 2011, s. 456). Som Robson (2002, s. 310) hevdar kan kva personar fortel vere forskjellig frå kva som faktisk skjer, og observasjon vil då vere ein metode for å få innsikt i dette (Robson, 2002, s. 310). I etterkant av observasjon og analyse av intervju vil det også verte utført eit andre intervju. Dette for å få svar på eventuelle tankar og spørsmål som dukkar opp i prosessen.

Skjematisk framstilt.

1) Intervju, vedlagt intervjuguide (vedlegg 4, del 1)
2) Observasjon
3) Intervju, vedlagt intervjuguide (vedlegg 4, del 2)

Det er her nytta ei metodetriangulering; fleire ulike metodar i datainnsamlinga. Dette er noko som av Johannesen, Tufte og Christoffersen (2010, s. 230) vert peika på som eit sentralt tiltak for å auke studien sin truverdighet. Ein får sett fleire aspekt ved deltakarane sine haldningar, tankar og refleksjonar kring temaet, noko som vil gje eit betre bilete av røynda og derav ei meir truverdig analyse og resultat. Dette er årsaka til at eg ikkje har nøya meg med berre intervju som datainnsamlingsmetode, men også inkludert observasjon for så til slutt å ha eit andre intervju. Gjennom observasjon vil eg kunne få eit betre bilete av korleis elevane implementerer bevis i si undervising, og det andre intervjuet vil kunne rette opp i eventuelle uklarheiter frå dei to fyrste delane av datainnsamlinga. Her kan spørsmål som dukka opp gjennom arbeidet med analysen av intervju ein og observasjon verte nærare diskutert. Lærarane sine tankar og refleksjonar kan då komme tydligare fram, og det er då dette som vert formidla til lesaren gjennom oppgåva.

3.2 Datainnsamlingsmetode

3.2.1 Intervju

Forskingsintervju er eit fleksibelt verktøy for datainnsamling som gjer det mogeleg å nytte multisensoriske kanalar: verbalt, ikkje-verbalt, munnleg og høyrt (Cohen et al., 2011, s. 409). Intervju gjev rom for spontanitet, i tillegg til at det opnar opp for svar på komplekse og djupe problem (Cohen et al., 2011, s. 409). Intervju er med andre ord eit kraftig reiskap for forskarar (Cohen et al., 2011, s. 409).

I kvalitativ forsking skil ein mellom tre typar intervju; strukturerte-, semistrukturerte-, og ustrukturerte intervju (Krumsvik, 2014, s. 124). Semistrukturerte intervju er ei intervjuform som ofte vert nytta når tema skal verte forsøkt forstått utifrå intervjudeltakaren sitt perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). Det er dette eg ynskjer i mi studie, og semistrukturerte intervju er difor utført som ein del av mi datainnsamling. Dette er ei intervjuform som baserer seg på ein delvis strukturert intervjuguide; emna som forskaren ynskjer å ta opp er bestemt på førehand, men rekkefølgja emna vert stilt i vert bestemt undervegs (Thagaard, 2013, s. 98). Semistrukturerte intervju opnar også opp for at intervjudeltakar kan ta opp tema dei sjølv ynskjer å diskutere, og for at intervjuar kan stille oppfølgingsspørsmål. På denne måten kan forskaren følgje intervjupersonen si forteljing samstundes som ein sørger for at tema som er viktig i forhold til problemstillinga vert tatt opp (Thagaard, 2013, s. 98). Kunnskap vert her produsert i samspel mellom intervjuar og intervjudeltakar (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46).

Kvale og Brinkmann (2015, s. 46) peikar på korleis strukturen til forskingsintervjuet kan minne om den daglegdagse samtalen, men at det her er viktig å hugse på at dette ikkje er det same. Forskingsintervju involverer også ein bestemt metode og spørjeteknikk (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). Eit forskingsintervju har ei hensikt, det er her spørsmål ein ynskjer å finne svar på (Cohen et al., 2011, s. 409).

Utforming av intervjuguide

Kvale og Brinkmann (2015, s. 137) peikar på seks steg for å planlegge og gjennomføre ei intervjustudie: tematisere, designe, intervjue, transkribere, analysere, verifisere og rapportere. Tematisere er den fyrste delen av ei intervjustudie. Det er her hensikta med studien kjem fram, det teoretiske grunnlaget innhenta og valet av datainnsamlingsmetode vert bestemt (Cohen et al., 2011, s. 415). Vidare følgjer designet av studien, nærare bestemt utarbeiding av intervjuguide og planlegging av intervju. Dette involverer å omsetje problemstilling og forskingsspørsmål til spørsmåla som vil utgjere hovuddelen av intervjuet.

I forkant av å utarbeide intervjuguide leste eg teori og tidlegare forsking. Dette inkluderte blant anna teori om bevis sine ulike rollar i matematikken, ulike typar bevis og artiklar om korleis bruk av bevis i undervising kan påverke elevar si læring. Vidare leste eg gjennom tre ulike studiar som dreia seg om bevis i undervisingssamanheng. Óskardottir (2016) som her undersøkte bevis i norske lærebøker, Dickerson og Doerr (2012) som forska på High School lærarar sine refleksjonar om bruk av bevis i undervising og Knuth (2002a) som såg på lærarar sine oppfatningar av bevis. Gjennom dette fekk eg innsikt i teori om temaet, samt kva resultat som tidlegare har kome fram i liknande studiar. Dette er noko som av Cohen et al. (2011, s. 415) vert sett på som særs sentral. Spørsmåla i intervjuguiden vil utgjere grunnlaget for innsamla data. Det er difor viktig at spørsmåla her reflekterer tilbake på problemstillinga og temaet for studien (Cohen et al., 2011, s. 415). Vidare er det å lese teori og tidlegare forsking viktig for å kunne stille dei riktige oppfølgingsspørsmåla. Produksjonen av data i denne type forskingsintervju går utover det å overhalde reglar. Det er avhengig av intervjuar sine ferdighetar og personlige vurderingar av korleis spørsmåla vert stilt (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 99). For å stille gode oppfølgingsspørsmål er det viktig at intervjuar har kunnskap om intervjutemaet. Kvaliteten på den produserte dataen i eit kvalitativt forskingsintervju vil derav avhenge av kvaliteten på intervjuar sine kunnskapar og ferdigheter om temaet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 99). Eg såg også på intervjuguide utarbeidd av Óskardóttir (2016) i forkant av hennar studie. Dette gav meg innsikt i kva som var spurt om i ei liknande studie tidlegare og denne vart nytta som inspirasjonskjelde når eg no skulle utarbeide ein intervjuguide for mi studie.

Intervjuet skal som nemnt reflektere tilbake på problemstillinga og temaet for studien, derav vart dei tre forskingsspørsmåla nytta som grunnlag for intervjuguiden. Det var forskingsspørsmåla som utgjorde kjernen i intervjuet og desse som gav grunnlag for hovudspørsmåla i intervjuguiden. Til hovudsspørsmåla vart det vidare lagt til oppfølgingsspørsmål, dette for å kunne utdjupe spørsmålet eller hjelpe intervjudeltakar dersom nokre av spørsmåla var vanskelege å svare på. Utover dette var det også stilt oppfølgingsspørsmål som ikkje stod i intervjuguiden. Dette var spørsmål som førte vidare på tankar, idear og refleksjonar som intervjupersonane kom med. Dette vert av Kvale og Brinkmann (2015, s. 170) sett på som bidragsgivande til intervjuet; desto friare intervjuar klarar å vere desto meir spontane og levande svar vil ein kunne få frå informantane.

Gjennomføring av intervjua

Det neste steget i prosessen er gjennomføring av intervjuet. I denne delen peikar Cohen et al. (2011, s. 421) på informasjonsflyt som særs sentralt før oppstart. Det er viktig å informere intervjudeltakar om hensikta med intervjuet og intervjuet sin struktur; kva som skal skje og korleis. I tillegg må vedkommande informerast om korleis intervjuet skal bli tatt opp og gje tillating til det. (Cohen et al., 2011, s. 421). I forkant av intervjuet vart det difor sendt ut informasjonsskriv til alle deltakarane. Her kunne intervjudeltakarane lese gjennom, vurdere om dei ynskja å vere med og om ynskjeleg også reflektere litt rundt forskingsspørsmåla før intervjuet. På intervjuet vart også dette informasjonsskrivet tatt med i tillegg til samtykkeskjema. Slik hadde intervjudeltakar moglegheit til å lese gjennom informasjonsskrivet ein gong til før dei gav sitt samtykke for deltaking i masterprosjektet.

Lokasjon for intervjuet vart bestemt av intervjudeltakar, dette er noko Johannesen et al. (2010) ser på som viktig for å skape ein avslappa stemning under intervjuet al.le intervjua vart av lærarane sine ynskjer utført på deira arbeidsplass. Det vart gjort lydopptak av intervjuet, men då dette er ei datainnsamlingsmetode som vil neglisjere viseulle og ikkje-verbale aspekt ved intervjuet (Cohen et al., 2011, s. 426) vart det rett i etterkant skrive notatar. Viktige aspekt som ikkje kom med på lydopptaket vart notert ned og seinare nytta for å få betre inntrykk av dynamikken i intervjuet.

I intervjuet er det læraren sine refleksjonar som er ynskjeleg å få fram, det er difor viktig at ein som intervjuar ikkje viser sitt bias eller haldningar i forhold til problemstillinga. Dette kan påverke intervjudeltakaren sine svar noko som ikkje er ynskjeleg (Cohen et al., 2011, s. 421). Dette vart tatt omsyn til gjennom heile intervjuet. Intervjua var som nemnt semistrukturerte noko som gjorde til at tema som vart følgt opp varierte frå intervju til intervju, alt etter kva læraren ynskja å diskutere. Lærarane var alle godt forberedt til intervjuet, dei hadde reflektert over forskingsspørsmåla i forkant, og nokre hadde også notert seg ned stikkord og tatt med dømer på undervisingsopplegg knytt til temaet bevis. Dette gjorde til at intervjua tok ulike retningar og ulike oppfølgingsspørsmål vart stilt. Alle intervjua vart avslutta med å spørje læraren om den hadde fleire refleksjonar rundt temaet som ikkje enda hadde blitt tatt opp. Slik kunne eg forsikre meg om at dei hadde fått sagt det dei ynskja om temaet.

I etterkant av observasjon vart det gjennomført ein andre runde med intervju. Her var det utarbeidd ein individuell intervjuguide for dei tre deltakarane, der spørsmåla var basert på observasjonar i undervisingstimen og eventuelle uklarhetar frå intervju ein. Dette gav moglegheita til å spørje vidare om noko var uklart frå det fyrste intervjuet og anledning til å få ei utdjuping om tema.

Transkribering

Transkribering er ein avgjerande del av intervjuprosessen, det er her tale vert skrive om til tekst noko som gjev moglegheit for tap av data og reduksjon av kompleksitet (Cohen et al., 2011, s. 426). Intervju er på mange måtar ein sosial setting, kor det er naturleg at det er kommunikasjon utover det verbale.Ved å velje å ta lydopptak av intervjuet i staden for film vil dette gjere til at ein filterer ut viktige kontekstuelle faktorar; det neglisjerer visuelle og ikkje-verbale aspekt ved intervjuet. Ein mistar faktorar som kroppsspråk, gester, mimikk og blikkontakt (Cohen et al., 2011, s. 426). Med andre ord er det fleire sentrale element i eit intervju som ikkje kjem med på lydopptak. Til trass for dette har eg valt å ta lydopptak for så å transkribere desse. Det å transkribere filmopptak er langt meir tidkrevjande enn lydopptak (Cohen et al., 2011, s. 426), og med tidsramma på masteroppgåva er dette noko som då ikkje vart prioritert.

Til trass for at transkribering av lydopptak er mindre omfattande enn filmopptak er det likevel tidkrevjande, ein time med opptak kan ta fire til seks timar å transkribere (Nilssen, 2012, s. 47). Tidsaspektet gjer til at nokre vel å la andre transkribere intervju, men fordelane med å transkribere sjølv er så mange at dette ikkje var grunn nok til å overlate denne oppgåva til nokon andre. Gjennom transkriberingsprosessen vert ein nemleg godt kjent med datamaterialet. Det kjem her fram idear til kodar for å analysere, ord som gjentar seg og viktige setningar vert lett synlege og konteksten i transkripsjonen vert kjent. Ein får med andre ord eit slags eigarforhold til datamaterialet, og gjennom prosessen gjer ein seg gjerne opp tankar, idear og refleksjonar om kva datamateriale fortel (Nilssen, 2012, s. 47). Det å la andre transkribere intervjuet vil også vere ei etisk utfordring, alle som deltar i prosjektet har gått med på å samarbeide med deg, det er til deg dei fortel si historie og lar deg få innblikk i sine handlingar (Nilssen, 2012, s. 48). Dersom ein skulle la andre transkribere, må ein gjere intervjudeltakar merksam på dette. Dette kunne ha påverka svara i intervjuet, i tillegg til at ein har ansvar for å forvisse seg om at den som transkriberer er merksam på taushetsplikta (Nilssen, 2012, s. 48-49). Å la andre transkribere vil kunne påverke pålitelegheten til datamateriale og prosjektet, noko eg kjem tilbake til i delkapittel 3.4.1.

3.2.2 Observasjon

Observasjon som datainnsamlingsmetode er meir enn berre å sjå, det er ei systematisk observering av menneske, hendingar, oppførsel og rutiner (Cohen et al., 2011, s. 456). Det er ein metode som gjev moglegheita til å samle «live» data frå naturlige sosiale situasjonar og gje direkte innsikt i kva som skjer i situasjonen. Det som faktisk skjer i ein klasseromssituasjon kan avvike frå det som vert fortalt av ein anna, og observasjon vil kunne hjelpe med å oppdage desse variasjonane (Cohen et al., 2011, s. 456). Observasjon vil med andre ord kunne gje meir valide og autentisk data enn intervju åleine.

Gjennomføring av observasjon

Dette prosjektet har som nemnt til hensikt å få innsikt i lærarar sine tankar og refleksjonar kring bruk av bevis i matematikkundervisinga. Eit av forskingsspørsmåla er korleis lærarar implementerer bevis i si undervisinga og det er for å betre kunne svare på dette spørsmålet observasjon er brukt som datainnsamlingsmetode. I forkant av observasjon vart lærarane i studien bedt om å fortelje nokre undervisingstimar der bevis var ein sentral del, slik eg lettare kunne observere korleis læraren implementerte bevis i undervisinga si og korleis elevane tok det heile i mot.

Undervisingstimen som vart observert vart også videofilma etter tillating var innhenta av både lærar og elev. Dette for å ha moglegheita til å sjå tilbake på undervisingstimen i etterkant. Her kunne aspekt eg ikkje fekk med meg i sjølve undervisingstimen verte oppdaga og det gav moglegheita til å diskutere element frå timen saman med lærar i det andre intervjuet. Læraren kunne då sjå situasjonen og kome med sine refleksjonar og tankar knytt til dette; kva som var hensikta med å legge fram beviset på denne måten, tankar kring korleis det vart tatt imot hjå elevane og eventuelt om det var noko læraren i etterkant tenkjer hadde vore betre om vart gjort annleis.

Transkripsjon av video er som nemnt tidlegare ein tidkrevjande prosess (Cohen et al., 2011, s. 426) og med tidsramma på masterprosjektet vart dette valt vekk. Observasjon vart i hovudsak gjennomført for å få eit betre inntrykk av korleis læraren implementerte bevis i undervisinga. Dette vart brukt til å bygge opp under det lærarane fortalte i intervjuet som er hovud-datamateriale i dette prosjektet. I etterkant av observasjon vart det skrive logg og ei slags oppsummering av det som kom fram under observasjonen. Det vart notert korleis læraren implementerte bevis i undervisinga, i tillegg til tankar og refleksjonar kring korleis dette vart tatt imot og arbeida med av elevane.

3.3 Einingar som er studert

Det er tre lærarar med i denne studien, alle med lang erfaring frå vidaregåande skule. Kvaliteten på studien vil avhenge av intervjupersonane. Gode intervjupersonar er samarbeidsvillige, motiverte, veltalande og kunnskapsrike (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 198). Dei gjev ærlege, konsise og samanhengande svar, held seg til intervjutemaet og sporar ikkje av gang på gang. Gode intervjupersonar er med andre ord personar med erfaring, kunnskap og interesse for intervjutemaet. Dette vart tatt i betraktning i utvalsprosessen for deltakararar til denne studien, og dei tre nemnte lærarane vart difor utplukka. Desse var forventa å ha utvikla tankar og idear knytt til bevis i undervisinga, og derav kompetente til å gje ærlege, konsise og samanhengande svar og refleksjonar kring intervjutemaet.

Dei tre lærarane valt til å delta i studien er frå to ulike skular, ein i Hordaland og ein i Sogn og Fjordane. Lærarane med i studien er alle tre høgt utdanna lærarar, der også to har erfaring utover den vidaregåande skulen. Ein av lærarane i studien, seinare referert under pseudonymet Truls arbeider med vidareutdanning av lærarar og deltek i utarbeidinga av eksamen for programfag i matematikk. Læraren seinare referert under pseudonymet Håkon har også tidlegare erfaring frå høgare utdanning. Han har arbeida ved ex-phil senteret ved eit universitet i Noreg, samt deltatt i utarbeiding av læreplanar for dei norske IB-skulane.

Utdanninga i den norske vidaregåande skulen går normalt over 3-4 år. Her vel ein om ein ynskjer å gå eit studieførebuande utdanningsløp, desse varer normalt 3 år, eller om ein ynskjer å gå eit yrkesfaglig utdanningsløp, med to år skule og to år i lære (Utdanningsdirektoratet, u.ua). Lærarane i studien underviser alle ved studieførebuande utdanningsløp og det er elevar ved dette utdanningsløpet oppgåva dreiar seg om. Nærare bestemt elevar ved studieførebuande utdanningsløp som vel å fordjupe seg i matematikk. I sitt fyrste år ved det studieførebuande utdanningsløpet vel elevane mellom matematikkfaga 1T og 1P. Faget matematikk 1P inneheld ei meir praktisk retta matematikk, medan faget matematikk 1T har eit meir teoretisk innhald (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9-11). Når elevane kjem til sitt andre år i det studieførebuande utdanningsløpet må dei velje retning, dei vel her om dei ynskjer retninga realfag eller språk, samfunnsfag og økonomi (Utdanningsdirektoratet, u.ub). Ein kan også velje fag innan begge desse retningane, men elevar som vel realfagsmatematikk vel dette ofte i kombinasjon med andre realfag. Elevane som då vel realfagsmatematikk har i sitt andre år i utdanningsløpet faget matematikk R1 og i sitt tredje år faget matematikk R2 (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 2). Dei fleste elevar som vel å gå vidare med realfag vel matematikk 1T sitt fyrste år i utdanningsløpet, då dette vil vere ein fordel. Her vert ein introdusert for matematiske samanhengar og kunnskapar ein i faga matematikk R1 og matematikk R2 byggjer vidare på. Fleire elevar vel på grunnlag av dette kombinasjonen matematikk 1T, matematikk R1 og matematikk R2. Det er denne kombinasjonen eg har valt å referere til som realfagsmatematikk, og dei matematikkfaga denne studien dreiar seg om. Skuleåret denne studien føregår underviser Truls matematikk 1T, Håkon matematikk R1 og læraren seinare referert til under pseudonymet Ola matematikk R2. Her ser ein det er valt ein lærar frå kvart av dei tre matematikkfaga. Dette er valt på grunnlag av at eg ynskjer innsikt i korleis bevis vert implementert i undervisinga i kvart av dei tre matematikkfaga.

3.4 Kvalitet i studien

I samband med kvalitet i kvantitativ forsking snakkar ein ofte om reliabilitet og validitet. Johannesen et al. (2010, s.229) hevdar dette ikkje passar i kvalitative studiar, til dette er ikkje datagrunnlaget generelt nok; det er for få deltakarar med. Innan kvantitative studiar si kvalitet er det meir passande å snakke om studien si pålitelegheit, truverdighet, overførbarhet og bekreftbarhet (Johannesen et al., 2010, s. 229). Desse aspekta vil verte nærare diskutert i dette delkapittelet, og omgrepa overførbarhet og bekreftbarhet vil her verte nytta i mangel på ei god nynorsk omsetjing.

3.4.1 Pålitelegheit

Reliabilitet og pålitelegheit knytt seg til datamaterialet: kva data som vert brukt, korleis det vert samla inn og korleis det vert bearbeidd (Johannesen et al., 2010, s. 229). Det omhandlar med andre ord forskingsresultata sin konsistens og i kva grad resultata kan reproduserast av andre forskarar på seinare tidspunkt (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). I kvantitative undersøkingar er reliabilitet kritisk og det finst fleire ulike måtar å teste datamateriale sin reliabilitet på. Slike krav til reliabilitet finn ein ikkje igjen i kvalitativ forsking då dette er lite hensiktsmessig (Johannesen et al., 2010, 229). Som Nilssen (2012, s. 62) hevdar har alle studiar eit teoretisk rammeverk, dette er teorien som omgir studien, men ikkje nødvendigvis teorien som vert nytta for å tolke eller forklare funna. Det er eit rammeverk som er utleia frå forforståinga og haldningane som forskaren tek med seg inn i forskinga. Dette rammeverket vil påverke alle delar av studien – det er linsa du ser verda gjennom, det som bestemmer kva som pirrar nysgjerrigheten i deg og kva spørsmål du stiller (Nilssen, 2012, s. 62). Det teoretiske rammeverket påverkar kva retning studien går i, kva du ser når du observerer, kva spørsmål som vert lagt til i intervjuguiden og kva du vel å gå vidare med. Det er med på å prege store delar av studien, noko som gjer til at kvalitativ forskingsdata ikkje vil vere tolka på akkurat same måte av fleire ulike personar.

Det er i denne studien føretatt semistrukturerte intervju, ei intervjuform som gjev intervjudeltakarane større fridom i intervjuet til å kunne ta opp tema dei sjølv ynskjer å diskutere. Det vart i denne samanheng utarbeidd ein intervjuguide. Nøkkelspørsmåla som vart stilt var difor dei same i alle intervjua, men oppfølgingsspørsmåla varierte frå intervju til intervju. Dette grunna intervjudeltakarane sin fridom i intervjuet. Dei fekk her komme med sine ytringar og synspunkt og oppfølgingsspørsmål vart stilt på grunnlag av dette. Kvale og Brinkmann (2015, s. 276) peikar på spørsmåla i intervjuet som eit sentralt element for studien sin pålitelighet. Det er viktig at ein som intervjuar ikkje stiller spørsmål som er leiande, ein vil då kunne påverke intervjudeltakar sine svar. Til trass for at intervjuguiden er utforma av meg og derav kan ha vore påverka av mi forforståing og haldningar tenkjer eg ikkje dette har hatt særleg grad av påverknad for intervjuet. Det kjem tydeleg fram i transkripsjonen at spørsmåla stilt tek utgangspunkt i deltakarane sine ytringar og ikkje mine meiningar. Dømer på oppfølgingsspørsmål stilt er *«tenkjer du her at forklarande bevis eller meir verifiserande bevis er mest hensiktsmessig i undervisingssamanheng?»* og *«stjernemarkering, kva legg du i det?».* Både i desse døma og i intervjuguiden vedlagt ser ein at spørsmåla er objektive og i større grad ber preg av det intervjudeltakarar vel å ta opp enn mi forforståing og haldningar. Noko Kvale og Brinkmann (2015, s. 276) peikar på som sentralt for å få ei pålitelig studie.

Transkripsjonen av intervjua vart utført av meg. Fyrst vart alle lydfilene høyrt gjennom ein gang, samstundes som eg utførte ein direkte transkripsjon. Deretter vart alle lydfilene høyrt gjennom ein andre gang medan eg kunne lese av min eigen transkripsjon. Her kunne eventuelle feil og manglar verte retta opp i slik at intervjudeltakar si historie vart gjenfortalt på best mogleg måte. Dette er noko Kvale og Brinkmann (2015, s. 211) hevdar er sentralt for transkripsjonen sin pålitelighet; alt etter kor godt ein høyrer etter, skriv av lydopptaket og vel å setje punktum og komma vil kunne påverke informasjonen som kjem fram i det transkriberte intervjuet og derav studien sin pålitelighet. Cohen et al. (2011, s. 426) peikar som nemnt på korleis ein ved å velje å ta lydopptak framfor video av intervju filtrerte ut viktige konstekstuelle faktorar; ein neglisjerer visuelle og ikkje-verbale aspekt ved intervjuet. I etterkant av intervjua vart det difor skrive logg. Her vart ikkje verbale aspekt frå intervjuet skrive ned, i tillegg til umiddelbare tankar kring intervjudeltakar si oppfatning av temaet. Dette kunne så nyttast for å bygge opp under at det som kom fram i transkripsjonen. Eg kunne då i større grad påsjå at funna frå transkripsjonen reflekterte tilbake på inntrykket eg fekk av intervjudeltakar sine haldningar til temaet under intervjuet.

I metodedelen av denne oppgåva er intervjuprosessen nøye beskrive. Det kjem fram korleis intervju og observasjon er gjennomført, korleis informasjonen er kontrollert og korleis mine eigne fordommar kan vere med på å prege studien. Å gje ei beskriving av konteksten og ei detaljert framstilling av framgangsmåten vil kunne vere med å styrke pålitelegheita til studien (Johannesen et al, 2010, s. 230). Dette vil gje lesarane innsikt i alle steg og val gjort i forskinga og derav moglegheita til å vurdere om gjennomføringa er påliteleg (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276).

3.4.2 Truverdighet

Validitet i kvantitativ forsking omhandlar tolking av observasjonar: om desse stemmer overeins med datamateriale og samsvarar med tidlegare forsking. Ein stiller her spørsmål til studien sin gyldighet. Truverdighet er det Johannesen et al. (2010, s. 230) hevdar står til kvantitative undersøkingar sin validitet. Innan kvantitative undersøkingar sin validitet spør ein seg spørsmålet om studien måler det ein tenkjer den måler, og om det er ein samanheng mellom det innsamla datamateriale og det fenomenet som skal undersøkast. Dette kan ein ikkje måle på same måte i kvalitative undersøkingar då materialet her ikkje kan kvantifiserast (Johannesen et al., 2010, s. 230). Validitet i kvalitative undersøkingar dreiar seg om metoden undersøker det den har til hensikt å undersøke og i kva grad observasjonane og funna speglar det som interesserar oss (Johannesen et al., 2010, s. 230). Med andre ord i kva grad framgangsmåten, datamaterialet, analysen og funna samsvarar, reflekterer formålet med studien og representerer røynda. Det er dette Johannesen et al.(2010, s. 230) refererer til som kvalitative studiar sin truverdighet.

For å auke lesarane sin truverdigheit til studien og aktuelle funn, er det nytta kodar og kategoriar for å analysere. Desse er beskrive og grunngjeve i kapittel 4. Det kjem her fram korleis kodane og kategoriane er utarbeidd og kvifor dette er hensiktsmessig med tanke på kva studien har til hensikt å svare på. Vidare er det nytta sitat frå datamateriale for å grunngje korleis det som kjem fram her passar med kodane og kategoriane som er utarbeidd og samt for å kunne tydeleggjere kva som ligg i dei ulike kodane og kategoriane.

Sitata nytta for å grunngje kodane og kategoriane nytta for å analysere datamateriale kjem direkte frå transkripsjonen. Transkripsjonen sin truverdighet er difor sentral i spørsmålet om studien sin truverdighet. Det å skulle vurdere transkripsjonen sin truverdighet er meir komplisert enn å vurdere påliteligheten (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 212). Spørsmålet «kva er ein truverdig transkripsjon?» er umogeleg svare på, då det ikkje finst nokon sann objektiv omsetjing frå munnleg til skriftleg språk (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 212). Det ein derimot kan stille spørsmål ved er «kva er ein nyttig transkripsjon for mi forsking?». Her er strengt ordrette transkripsjonar nødvendige for å kunne utføre lingvistisk analyse, i tillegg er det sentralt å inkludere pausar, gjentakingar og tonefall med tanke på den psykologiske fortolkinga (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 212). Desse aspekta er forsøkt inkludert ved å representere pausar og gjentakingar i transkripsjonen. Transkripsjonen er med andre ord skriven i ein litterær stil noko som kan bidra til at intervjudeltakaren si historie vert direkte formidla, og av den grunn vil transkripsjonen kunne gje eit betre bilete av deira tankar og refleksjonar kring temaet. Utover sjølve transkripsjonen er det også skrive logg i etterkant av intervju. Dette vil gje eit betre bilete av deltakarane sine haldningar til temaet, og informasjonen som kjem fram i dei transkriberte intervjua lettare å tolke.

Vidare er det i studien nytta både intervju og observasjon som ei del av datainnsamlinga. Ei slik metodetriangulering, vert av Johannesen et al. (2010, s. 230) peika på som eit sentralt tiltak nettopp for å auke studien sin truverdighet. Ein får her sett fleire aspekt ved deltakarane sine haldningar, tankar og refleksjonar kring temaet, noko som vil gje eit betre bilete av røynda og ei meir truverdig analyse og resultat.

3.4.3 Overførbarhet

Ein kvalitativ studie sin overførbarhet omhandlar kor vidt dei tolkingar, forklaringar, omgrep og beskrivingar som kjem fram kan vere nyttige på andre områder enn akkurat der dei vert studert (Johannesen et al., 2010, s. 231). I analysen er det i denne oppgåva beskrive korleis vurderingar som er gjort, kva analyseverktøy som er brukt og kvifor dette er passande nettopp for denne studien. Noko Kvale og Brinkmann (2015, s. 291) hevdar vil auke studien sin overførbarhet. Overførbarhet avhenger av i kva grad trekka som vert samanlikna er relevante, noko som krev ei innhaldsrik og djuptgripande beskriving (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 291)

I studien er det nytta eit lite utval. Funna i studien baserer seg på tre lærarar sine tankar og refleksjonar, noko som vil kunne verke negativt inn på studien sin overførbarhet. Kvale og Brinkmann (2015, s. 148) peikar på at det i intervjustudiar er mest vanleg å ha med mellom 5 og 25 deltakarar. Med tre intervjudeltakarar kan denne studien seiast å ha få intervjudeltakarar og funna av den grunn mindre overførbare. Å inkludere berre tre deltakarar i studien var ei vurdering gjort på bakgrunn av tid og omfang på studien. Det vart her gjort ei prioritering på grunnlag av djupn; ved å inkludere berre tre deltakarar opna det opp for moglegheita til å få større innsikt i kvar og ein sine tankar og refleksjonar kring temaet. Eg kunne då utføre både intervju og observasjon, i tillegg til å ha eit andre intervju for å klare opp eventuelle uklarheiter frå dei to fyrste delane av datainnsamlinga. Med tida tilgjengeleg ville ikkje dette vore mogeleg om eg skulle ha hatt fleire deltakarar, og dette gjekk då på kostnad av tal delakarar og gjorde difor studien mindre overførbar.

Lærarane i studien er alle tre høgt utdanna lærarar med erfaring utover det ein kan forvente at lærarar i vidaregåande skule har. Dette kan påverke studien sin overførbarhet. Utvalet i studien vil ikkje vil vere representativt for den gjennomsnittlege læraren ved vidaregåande skule. Funna i denne studien vil difor kunne seie noko om lærarar sine refleksjonar og tankar kring bruk av bevis i matematikkundervisinga, men det vil ikkje vere representativt for alle lærarar. Til dette er lærargruppa brukt for datainnsamling for spesifikk. Til trass for dette vil dei utfordringane desse lærarane møter og dei moglegheiter dei ser med bruk av bevis i undervisinga kunne seiast å vere overførbart. Klassane og elevsamansetjinga vil ikkje variere mykje frå elevgruppa ein finn i andre klasserom. Mykje av det som kjem fram i denne studien vil derav kunne vere representativt også for andre lærarar enn dei i studien.

3.4.4 Bekreftbarhet

I kvalitative studiar er det forventa at forskarar bringer eit unikt perspektiv inn i sine studiar, men det er viktig at funna i studiane er eit resultat av forskinga og ikkje eit resultat av forskaren sine subjektive haldningar (Johannesen et al., 2010, s. 232). Dette skal sikrast av studien sin bekreftbarhet. Bekreftbarhet svarar til objektivitetskriteriet i kvalitativ forsking og seier noko om kva grad studien kan bekreftast av andre tilsvarande undersøkingar (Johannesen et al., 2010, s. 232).

I forkant av studien vart det lest teori knytt til metode for kvalitative undersøkingar og då spesielt gjennomføringa av intervjustudiar: kva utfordringar som er knytt til intervjustudiar og kva aspekt som er sentrale å tenkje over i førebuinga av ein slik studie. Dette er noko som av Johannesen et al. (2010, s. 232) vert peika på som sentralt for å sikre studien sin bekreftbarhet. Dei peikar på korleis tidlegare erfaringar, fordommar og oppfatningar kan påverke tolkinga og tilnærminga i prosjektet. Det er av den grunn viktig at ein i klargjering av ei slik undersøking evner å vere sjølvkritisk og ikkje lar sine haldningar påverke intervjuet (Johannesen et al., 2010, s. 232). Det vart også lest teori og forsking knytt til temaet bevis i forkant av studien. Tolkingane i studien vil då kunne verte vurdert i samsvar med både teori og tidlegare forsking, noko Johannesen et al. (2010, s. 232) peikar på som sentralt for studien sin bekreftbarhet.

I kapittel 4 av denne oppgåva vil analyse prosessen verte beskrive. Det vil her verte gjeve ei grunngjeving av kva type analyse som har blitt gjort og korleis kodar og kategoriar er utforma. I tillegg vil det verte gjeve sitat frå datamateriale som vil kunne eksemplifisere og spesifisere kodane brukt i analyseprosessen. Det å beskrive alle slutningar i analyseprosessen vil gjere til at lesarane kan følgje og vurdere desse, noko som vil auke studien sin bekreftbarhet (Johannesen et al., 2010, s. 232). Kodeprosessen er planlagt utført to gangar: fyrst ein gang på papir der fargemarkeringar er gjort med bakgrunn i kategoriane, deretter i det digitale programmet Nvivo der det er koda meir spesifikt etter alle kategoriane. Det å bruke digitale program i kodeprosessen er noko Nilssen (2012, s. 119) peikar på som til god hjelp. Kodane og kategoriane som er brukt i oppgåva er diskutert med to didaktikarar på fagfeltet, for å bekrefte om desse er passande til oppgåva sin tematikk. Dette vil også styrke studien sin bekreftbarhet.

3.5 Etikk

Forskingsintervju er gjennomsyra av etiske problem (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 35). Det er her knytt etiske problem til alle stega i prosessen: tematisering, planlegging, intervjusituasjon, transkribering, analysering, verifisering og rapportering (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 97). Desse er forsøkt tatt omsyn til gjennom heile forskingsprosessen.
I studien er det utført intervju og observasjon, der lyd- og filmopptak har vore utført. I samband med dette har det ikkje vore registrert personlege data, og både lyd- og videofilene frå all datainnsamling er det berre eg som har hatt tilgang til. Lydfilene vart i etterkant av intervju transkribert, desse filene er ikkje delt med nokon andre enn rettleiar. Dette for å oppretthalde deltakarane sin konfidensialitet, noko som av Kvale og Brinkmann (2015, s. 97) vert sett på som særs viktig i kvalitative studiar. Ein må ta omsyn til deltakaren; deltaking i studien skal ikkje vere øydeleggande. I forkant av studien vart det i samband med dette utarbeidd eit informasjonsskriv kor deltakarane vart informert om problemstilling, forskingsspørsmål, rammene for studien og kva den skulle brukast til. Det vart også utarbeidd eit samtykkebrev der deltakrane fekk bekrefta sin anonymitet, informasjon om korleis denne ville bli ivaretatt og at dei til ei kvar tid hadde moglegheita til å trekke seg utan spesiell grunn. Intervjudeltakarane visste då korleis data om dei ville bli behandla og kva studien dei vart spurt om å delta i innebar.

Meldeplikt og konsesjon er også sentralt for denne studien. Norsk senter for forskingsdeltaking (NSD) vart difor kontakta og søknad om gjennomføring av studien vart sendt inn. Denne vart i etterkant godkjent og retningslinjene for personvern som her kom fram er tatt omsyn til gjennom alle delar av studien.

Intervjusituasjonen sine konsekvensar for intervjudeltakaren reiser også etiske spørsmål. Det er viktig at intervjusituasjonen ikkje gjev konsekvensar for intervjudeltakar. Informasjonen som kjem fram i forskingsintervju vil avhenge av den sosiale relasjonen mellom intervjuar og intervjuperson (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 35). Ein relasjon som vil avhenge av at intervjuar skapar rom for at intervjupersonen kan snakke fritt og trygt. Det må vere ein balanse mellom intervjuar sitt ynskje om å innhente interessant informasjon og respekt for intervjupersonen sin integritet – det må vere ein balanse mellom det å innhente informasjon og vere etisk forsvarleg (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 35). For å få intervjuperson til å gje opne og ærlege svar er det ofte nødvendig at intervjuar gjev litt av seg sjølv; om ein som intervjuar er strengt upersonleg vil ein ikkje kunne forvente at intervjuperson gjev eit opent svar (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 35). Det er ein hårfin balanse om å ikkje vere for upersonleg og ikkje la intervjupersonen kjenne seg krenka – ein må kalibrere sosial avstand utan å få intervjupersonen til å kjenne seg som eit insekt under eit mikroskop (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 35).

Vidare er det sentralt at anonymiteten til intervjudeltakarane vert oppretthaldt også i verifisering og rapportering (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 97). Som forskar må ein her ta omsyn til det etiske ansvaret ein har knytt til å rapportere kunnskap på ein sikker og verifisert måte som ikkje bryt med deltakarane sin anonymitet. Med tanke på at det i studien er tre lærarar som alle uttrykkjer tankar, haldningar og refleksjonar, kan anonymitet vere ei utfordring. For å sikre deltakarane sin anonymitet på best mogleg måte vil alle sitat frå transkripsjonen verte skrive på standardisert nynorsk, for at det ikkje skal vere mogeleg å kjenne igjen deltakarane på dialekt. Vidare vil ikkje deltakarane sine namn verte brukt i studien, dei har alle fått eit pseudonym: Truls, Håkon og Ola.

Kapittel 4: Analyse og resultat

4.1 Deskriptiv analyse

Etter at data har vorte samla inn og transkribert er det neste steget i prosessen å analysere dette (Cohen et al., 2011, s. 427). I analyseprosessen kan ein ha ulike tilnærmingar. Nilssen (2012, s. 78) peikar på to ulike tilnærmingar i kvalitative studiar: induktiv og deduktiv. Induktiv tilnærming refererer til ein analyse med grunnlag i det empiriske datamaterialet. Ei deduktiv tilnærming er på den andre sida kjenneteikna av å ha omgrep og teori frå tidlegare forsking som grunnlag for analysen (Nilssen, 2012, s. 78). Etter gjennomgang av datamateriale var det tydeleg at ei deduktiv tilnærming, der all data vert forsøkt kopla opp til eksisterande omgrep og teori, ikkje ville fange opp alle aspekt. Det vart difor valt ei tilnærming med grunnlag både i omgrep og teori frå tidlegare forsking og eigen empiri; ei abduktiv tilnærming. Abduktiv tilnærming er ei tilnærming der ein nyttar både induksjon og deduksjon, ein analyserer med grunnlag både i omgrep og teori frå tidlegare forsking og eigen empiri (Thagaard, 2013, s. 198).

Koding er fyrste steg i prosessen med å redusere ei stor mengde datamaterial til nokre få kategoriar, tema eller dimensjonar som fangar essensen i materialet. Det er ein metode for å omsetje informasjonen som kom fram i intervju til spesifikke kategoriar, samt ein måte å organisere tankar kring datamaterial og forskingsnotatar. Det er dette som er sjølve kjernen i analyseprosessen (Nilssen, 2012, s. 78). I den deduktive tilnærminga i analysen vart datamateriale forsøkt kategorisert med grunnlag i Reid og Knipping sine ulike rollar for bevis; verifisere, forklare, systematisere, kommunisere og utfordre intellektuelt. Dette er nærare utdjupa i delkapittel 4.1.2. Å analysere datamaterial med ei induktiv tilnærming føregår i tre steg; open koding, aksial koding og selektiv koding (Nilssen, 2012, s. 78-79). I utarbeiding av dei empiriske kodane nytta for å analysere er desse tre stega følgt. Dette er nærare utdjupa i delkapittel 4.1.3.

4.1.2 Deduktiv tilnærming

Deduktiv tilnærming er som nemnt ei tilnærming der kodar og analyse er basert på tidlegare teori og forsking. I den deduktive tilnærminga i analyseprosessen er difor Reid og Knipping (2010) sine rollar for bevis nytta. Reid og Knipping (2010, s. 74-77) peikar på verifisering, forklaring, systematisering, kommunikasjon, utforsking og fleire andre aspekt som sentrale roller bevis kan spele i matematikk. Då dette er ei studie av bevis si rolle i matematikkundervising er det ikkje alle rollene Reid og Knipping nemner som står sentralt og kom derav ikkje fram i datamaterialet. Det er difor utført ei selektering, noko som gjorde til at kodane som stod igjen var dei nemnt i tabell 4.1.

Tabell 4.1: Deduktive kodar

Kodar
Verifisere
Forklare
Intellektuell utfordring
Utforske/undersøke
Kommunisere

4.1.3 Induktiv tilnærming

For å utarbeide induktive kodar er det brukt ein metode som av Nilssen (2012, s. 78) vert kalla open koding. Dette er ei tilnærming til forskingsmetoden «grounded theory» som består av tre steg: open koding, aksial koding og selektiv koding. Desse er nærare beskrive under. I forkant av denne prosessen såg eg på Óskardóttir (2016) si masteroppgåve. Ho undersøkte som nemnt i noko grad det same som eg skal undersøke. Denne vart difor nytta som inspirasjonskjelde til utvikling av kodar for analyse.

Open koding

Kodingsprosessen i kvalitative studiar byrjar med open koding av datamateriale (Nilssen, 2012, s. 78). Dette inneber å møte datamateriale med eit opent sinn og ei open haldning til kva det seier deg. Målet er her å setje eiga forståing av temaet til side og la datamateriale tale for seg, men dette er på mange måtar eit ideal det er vanskeleg å innfri (Nilssen, 2012, s. 78). Dette kjem av at ein som forskar kjem inn med eit sett haldningar, tankar og idear – ein har som forskar ei forforståing som kjem til å prege alle delar av studien også analysen (Nilssen, 2012, s. 62).

Ideen om open koding kjem frå forskingsmetoden «grounded theory» som vart utvikla av Glaser og Strauss på 1960-tallet (Nilssen, 2012, s. 78). Glaser (1996) beskriv grounded theory som *«a systematic generation of a theory from data»* (referert i Cohen et al., 2011, s. 598). Det er med andre ord ein induktiv prosess eller ein metode der nye teoretiske idear vert utvikla med grunnlag i empiriske data. Det er dette som også er grunnlaget for den opne kodinga; her vert kodar utvikla ved gjennomgang av datamateriale (Nilssen, 2012, s. 79). Gjennom open koding vert dei viktigaste mønstera i datamateriale identifisert, klassifisert og sett namn på – ein analyserer kjerneinnhaldet i intervju, tekstar eller observasjonar for å bestemme kva som er signifikant (Nilssen, 2012, s. 82). For å utvikle kodar gjekk eg gjennom dei transkriberte intervjua, merka viktige ytringar, uttrykk og setningar som gikk igjen. I tillegg noterte eg ned handlingar som vart utført og meiningar eg såg på som sentrale og signifikante for å svare på problemstillingar. Ei slik gjennomgang ville kunne gje meg ei heilskapleg oversikt over datamateriale og ei fyrste forståing av kva det fortel meg. Det vil også gje opphav til ord, uttrykk og omgrep som skildrar godt, og som då vil kunne vere passande kategoriar. Open koding av dei transkriberte intervjua gav opphav til kodane i tabell 4.2.

Aksial koding

Ved open koding er det vanleg å sitje igjen med mange kodar, som no må systematiserast eller grupperast i tema, dimensjonar eller kategoriar for at datamengda skal vere handterleg (Nilssen, 2012, s. 78-79). Denne delen av kodingsprosessen vert av Nilssen (2012, s. 79) definert som aksial koding. Her vert dei empiriske kodane kategorisert til underkategoriar, slik at forklaringane vert meir presise og fullstendige (Nilssen, 2012, s. 79). Allereie under den opne kodinga er det vanleg at ein byrjar å få oversikt over korleis dei ulike kodane forheld seg til kvarandre og kva underkategoriar som kan vere aktuelle (Nilssen, 2012, s. 79). Grunna storleiken og kompleksiteten til studien min gav datamateriale opphav til fleire kodar, men desse tala sterkt for seg sjølv. Underkategoriar vart dirfor sett på som overflødig og ikkje nødvendig for å gjere ein god analyse. Dette er difor ikkje tatt med. Kodane vart derimot systematisert i kjernekategoriar som føregår i Nilssen (2012, s, 78-79) sitt tredje steg i analyseprosessen, *selektiv koding.*

Selektiv koding

Selektiv koding er det siste av dei tre stega i Nilssen (2012, s. 78-79) sin tre-stegs modell. Dette er delen der ein forsøker å finne kjernekategoriar og systematisk relatere desse til underkategoriar (Nilssen, 2012, s. 78-79). Sidan eg grunna studien si storleik og datamateriale sin kompleksitet har valt å ikkje inkludere underkategoriar var det kodane som i denne prosessen vart forsøkt systematisk relatert ved hjelp av kjernekategoriar. Kjernekategoriar viser til forskinga sitt hovudtema, det er dette Glaser (2001, s. 209, referert i Nilssen, 2012, s. 79) hevdar grounded theory handlar om: *«grounded theory is a theory about a core* *category»*. I utarbeiding av kjernekategoriar i min kodeprosess nytta eg det empiriske datamaterialet. Dei to intervjua som utgjer hovuddelen av datamateriale er begge utvikla med basis i forskingsspørsmåla, noko som gjer at dei tre forskingsspørsmåla var bidragsgivande i utviklinga av kjernekategoriar. Utover delen av datamateriale som er analysert med grunnlag i teori og tidlegare forsking, kan datamateriale og forskingsspørsmåla som her er ynskja å svare på seiast å vere todelt. På ei side forsøker eg å finne svar på lærarar sin bruk av bevis i undervisinga, og på den andre sida kva moglegheiter og utfordringar lærarar ser med bruk av bevis i undervising knytt til elevar si læring. Utifrå dette kom eg fram til tre kjernekategoriar; implementering av bevis i undervising, moglegheiter ved bruk av bevis i undervising og utfordringar ved bruk av bevis i undervising. Datamateriale viste også at lærarane såg fleire ytre faktorar som påverka bruken av bevis i undervisinga, dette gjorde til at eg utvikla ein fjerde kjernekategori: avgrensande ytre faktorar.

Tabell 4.2: Induktive kodar og kategoriar

Kodar	Kjernekategoriar
Bruk av formelle bevis	Implementering av bevis i undervising
Bruk av akseptable bevis	
Bruk av generiske eksempel	
Samarbeid	
Matematisk forståing	Moglegheiter ved bruk av bevis i undervising
Argumentasjon	
Matematisk tenking og resonnering	
Metakognisjon	
Kritisk tenking	
Djupnelæring	
Matematikkens eigenart	
Fagleg skilje	Utfordringar ved bruk av bevis i undervising
Tid	
Motivasjon	
Læreplan	Avgrensande ytre faktorar
Vurdering	
Lærarrolla	

4.2 Teoretisk analyse og resultat

Forskingsspørsmåla denne studien forsøker svare på dreiar seg i stor grad om lærarar sine tankar og refleksjonar. Lærarar sine tankar og refleksjonar er vanskeleg å passe inn i allereie eksisterande forsking og teori, det å setje individ sine tankar inn i allereie eksisterande boksar kan vere vanskeleg og lite høveleg. Deduktive kodar åleine var difor vurdert til å ikkje få med alle aspekt av datamaterialet, noko som gjorde til at eg i analysen nytta ei abduktiv tilnærming. Det er nytta deduktive kodar med basis i teori og induktive kodar utarbeidd frå datamaterialet, som beskrive ovanfor. Kodane utarbeidd ved deduksjon og induksjon vil verte gjort greie for høvesvis i delkapittel 4.2.1 og 4.2.2. Her vil også funn frå studien verte presentert.

4.2.1 Kodar utarbeidd ved deduksjon

Dei deduktive kodane har sitt grunnlag i Reid og Knipping (2010) sine roller for bevis i matematikk. Då dette er ei studie som dreier seg om undervising og lærarar sine refleksjonar kring bevis var det ikkje alle av Reid og Knipping (2010) sine rollar som kom fram i datamateriale. Det er difor gjort ei selektering, og eg enda opp med dei deduktive kodane; verifisering, forklaring, utforsking, kommunikasjon og intellektuell utfordring.

4.2.1.1 Bevis si rolle i undervising

Beviset si rolle er å verifisere

Ideen bak å bruke bevis for å verifisere er å fjerne tvil og skepsis kring matematiske utsegner – ein viser *at* eit matematisk utsegn stemmer. Det at beviset si rolle i undervising er nettopp det å verifisere matematiske utsegner er det som ligg til grunn for denne koden. Dette kom derimot ikkje tydeleg fram i datamaterialet, lærarane impliserte snarare det motsette; at bevis si rolle er å gje elevar innsikt i den underliggande argumentasjonen og dei matematiske samanhengane. Dette kom til uttrykk hjå alle lærarane, men Truls formulerte det slik: *«ikkje sjølve det å ha bevist det, men argumentasjonen som ligge i beviset er noko veldig fint».* Dette tenkjer eg støttar det ovannemnde; at bevis si rolle i undervising ikkje er å verifisere matematiske utsegner, men å vise elevane argumentasjonen som ligg til grunn. Lærarane hevda vidare at dei fleste elevar allereie trur på at dei matematiske utsegnene stemmer, dei treng ikkje eit bevis for å verte overtyda. Dette kjem tydeleg fram i ein av Truls sine formuleringar: *«Dei trur jo at volumet av ei kule er* $\frac{4}{3}\pi r^3$*, det har dei trudd på sidan dei gjekk i 9.klasse og såg formelen. Dei har ikkje noko bevis på det før de går i R2, men dei har trudd på det heile vegen. Dei leve i ein sånn matematisk religiøs forståing dei fleste elevar da i* *akkurat veldig mange ting, læraren har jo sagt det, det står jo i boka, så da er det jo sant».* Elevane treng med andre ord ikkje eit bevis for å vite at eit matematisk utsegn, ein formel eller eit teorem stemmer, dette er noko dei trur på etter å ha lest det i matematikkboka eller blitt fortalt av læraren. Bevisa si rolle er snarare å forklare elevane *kvifor* det stemmer.

Beviset si rolle er å forklare matematiske samanhengar

Bevis si forklarande rolle skil seg frå den verifiserande. Det sentrale ved denne rolla er ikkje å vise *at* eit matematisk utsegn stemmer, men *kvifor* det stemmer. Dette er ei rolle som av matematikkdidaktikarar tidlegare har vore sett på som den sentrale i undervisingssamanheng, då det å forklare *kvifor* kan bidra til personleg forståing (Hanna, 1990; Hanna, 2000; Knuth, 2002a). Dette er noko Truls også impliserer, som han seier:

> «*Utan at det er bevis, så blir det berre setningar og rekning. Setning, eksempel der du regner på dette her [...].Bevis, for kva er eit bevis? Det er jo argument, det er logisk gyldige argument som føre deg frå ein startstad til ein sluttstad sant, det er jo det beviset er. Og den argumentasjonen, det er den som er viktig i seg sjølv, ikkje det at du kan beviset eller at du har pugga beviset, men det er den argumentasjonen som føregår inni der, kva som er gyldig, kva som er gyldige slutningar [...]. Det er ideane bak som må vera viktige, så eg prøve å få med beviser der ideen er viktig, og der eg prøve få tankerekka med i større grad enn detaljbevis og bevis med masse bokstavar inni.».*

Her ser ein Truls er oppteken av argumentasjonen i bevisa. Det er den som er den sentrale ikkje det at du har bevist utsegnet, men at elevane gjennom beviset har fått innsikt i argumentasjonen som ligg bak det matematiske utsegnet. Og at det i undervisingssamanheng er viktig å ta med bevis der ideane bak er viktige, bevis der argumentasjonen og tankerekka bak kjem tydelig fram. Dette tenkjer eg impliserer at Truls si oppfatning av bevis si rolle i undervising er nettopp det å forklare.

Også Håkon poengterer viktigheten av beviset si forklarande rolle i undervising. Han seier:

> *«Og så er det då det med at når du kjem inn i bevis, så ofte eleven får sånn fokus på; det her er jo så sjølvsagt, eg ser jo det her, eg ser jo at vinkelen er 90 grader der. Ja, men viss det er ein som ikkje ser det da, korleis ville du forklart det da? Og så stoppe det opp sant. Difor seier det at du er nødt å prøve å gjere det eintydig det som på ein måte ligg i intuisjonen din, det er der på en måte beviset si rolle er da som eg synes er en veldig viktig, viktig i matematikkforståelsen.»*

Her ser ein at det er når eleven skal prøve å forklare *kvifor,* kvifor er det slik at den vinkelen det er snakk om i oppgåva er 90º? Det er då eleven støyter på eit problem. Eleven ser at dette er tilfelle, men klarar ikkje å setje ord på kvifor det må vere slik. Og som Håkon seier er det her beviset si rolle i undervisinga kjem inn; det skal forklare *kvifor.*

Intellektuelle utfordringar

Ei av bevis sine roller i matematikken er i følgje Reid og Knipping (2010, s. 77) å gje matematikarar intellektuelle utfordringar. Gjennom datamateriale kjem det fram at intellektuelle utfordringar er ei av bevis sine roller også i undervising. Fleire av lærarane peikar på at bevis går vekk ifrå lineariteten ein ofte finn i lærebøker og mønsteroppgåver, og heller utfordrar elevar til å måtte tenkje sjølve i større grad, slik som Håkon seier:

> «*..ein unngår at det blir bare å kopiere; lær deg ein formel og gjer oppgåver der du bruker denne formelen. Ein går litt nedi å prøve å forstå tankegangen bak og argumentera for det.*»

Og som Ola også støttar:

> *«Eg tenkjer det å bruke bevis [...], det handlar ikkje berre om det å gjere ei oppgåve, løyse ei oppgåve. Det kan også handle om ei nøtt som ikkje er sånn serieprodusert oppgåve, men du må finne ein anna vri».*

Bevisa er med andre ord med på å gje elevane intellektuelle utfordringar. Gjennom å bruke bevis i undervisinga krev ein i større grad at elevane må tenkje og resonnere på eigahand. Det er ikkje eit døme dei kan følgje for så å setje to strekar under svaret. Håkon impliserer det er openheita i bevis som gjer at elevane kan få ei intellektuell utfordring: «*bevis er meir opne, der må du rett og slett inn og kanskje byrje å tenkje litt meir rundt problemet, løysinga di, løysningsstrategi og så vidare».*

Reid og Knipping (2010) peikar også på at bevis gjennom å gje matematikarar intellektuell stamina bidreg til sjølvrealisering. At dette er tilfelle i undervisingssamanheng ser ein igjen hjå Ola, han hevdar arbeid med bevis kan byggje opp elevar si faglege sjølvtillit:

> *«Eg føler det kan byggje opp sjølvtillit. Det kan byggje opp forståing og det kan byggje opp på ein måte matematisk ryggrad. For viss du berre får kakeoppskrifter og lagar kaker, så føler du at du kan lage kaker, men viss du byrjar å lage kakeoppskrifter, ja da er du ein bakar eller ein konditor. Så eg føler du verkeleg kan byrje å lage kakeoppskrifter da. At det er meir verdi og ei djupare læring.*

Elevar kan med andre ord gjennom arbeid med bevis byggje opp ei forståing og få ei kjensle av meistring, noko som kan verke inn på elevane si faglege sjølvtillit.

Beviset si rolle er å utforske og undersøke

Reid og Knipping (2010, s. 76) peikar på undersøking og utforsking som ei av beviset sine sentrale roller i matematikk. Gjennom bevis og bevisføring kan nye resultat kome fram og ny kunnskap verte utvikla. At bevis kan ha ei utforskande og undersøkande rolle også i undervising kjem fram i datamaterialet, her dog ikkje i den forstand at elevane utviklar ny kunnskap innan matematikken som disiplin, men ny kunnskap frå sin ståstad. Truls brukte i stor grad generiske eksempel i arbeid med bevis i undervisinga, noko eg kjem tilbake til i delkapittel 4.2.2.1. Dette er ei type undervising som kan bidra til at bevis si undersøkande og utforskande rolle kjem fram. Slik som Truls seier:

> *[...] gjer me eit lite bevis då av cosinussetningen. Der seie eg at i staden for å byrje med ein generell trekant ABC, med ein vinkel A som er gjeve då, og så sei at du veit B, C og vinkel A, så skal du finne den her lengda A, så kunne ein kanskje setta på noen tall, sei at B er 9 og C-en er 11 her, og vinkelen er 43º, så skal du finne x-en der. Så lar du elevane få denne oppgåva og sitta å jobba litt med den, så seie du det kan vere lurt å trekkje ned ei hjelpelinje h som er høgda i trekanten og så, kva kan dykk finne ut da? Kva kan dykk klara å sjå i saman, då har du to rettvinkla trekantar, kva kan dykk finne ut av det? Kan me kome i mål med det? La dei jobbe med det, og når dei har jobba med det ei stund og kanskje dei har kome i mål med oppgåva så seie me - ja, kva viss me hadde bytta ut tala 9 og 11 med noko anna? Kanskje viss me brukte A, B og C kunne me ha brukt de same triksa her? Ved å sjå kva me kom fram til, og så kjem formlane av seg sjølv då da. Det er kanskje en god måte å gjera det på, for det at då er det dei tinga, dei våpena du brukar når du beviser cosinussetningen, dei.. det er jo eigentleg at du bruke to rettvinkla trekantar og så eliminere du eine størrelsen som inngår i begge trekantane, nemlig høgde, den eliminere du, og på den måten så koplar du dei saman og så får du ein samanheng mellom desse tinga då da, og då lære du deg eit nytt lurt knep eigentleg, der du har to likningar med eit par ukjente, så lære du deg eit knep ikkje sant, så du eigentleg kanskje har vore borti før, og det kan vera lurt i seg sjølv eigentleg å så læra seg det knepet, så går det og i beviset då da. Då er det ikkje beviset i seg sjølv som er det viktigaste, men det er å sjå dette lure knepet du gjer då da.*

Her ser ein å nytte generiske eksempel og la elevane utforske og undre kring korleis ein løyser dette vil dei kunne *lære eit nytt knep*. Dei vil med andre ord med hjelp av å utforske kunne utvikle sin eigen matematiske kunnskapsbank og matematiske kompetanse. Her er det ikkje sjølve det å ha bevist eller å ha verifisert at cosinussetninga gjeld som er sentralt, men prosessen med å kome fram til cosinussetjinga og argumentasjonen og ideen bak som står i sentrum. Den kunnskapen elevane utviklar her vil kunne overførast også i andre samanhengar og blir eit verktøy dei ved å utforske og undre har utarbeidd sjølve. Sitatet over er eit døme på bruk av generisk eksempel i undervisinga. Dette er ein undervisingsmetode som gjer til at elevane vert nødt til å tenkje litt sjølve; bruke sin eksisterande kompetanse til å utforske og undersøke nye løysingsmåtar for nye problem, noko som då kan føre til ny kunnskap. Dette er ikkje tilsvarande Reid og Knipping sin definisjon av bevis si utforskande rolle i den forstand at ein her ikkje utforskar og oppdagar noko nytt i matematikken, men om ein overfører dette til elevane sin ståstad tenkjer eg likevel det kan kvalifiserast som utforsking og oppdaging av eit nytt resultat. Elevane i klasse 1T har ikkje sett cosinussetninga tidlegare. Når dei då utforskar og brukar sin kompetanse gjennom det generiske eksempelet, vil dei til slutt ende opp med å oppdage cosinussetjinga. Dette vil vere eit heilt nytt teorem for dei og frå deira ståstad tenkjer eg ein kan seie at dei har oppdaga noko nytt. Difor vil dette kunne kvalifiserast som utforsking som fører til utvikling av ny kunnskap. Det er nettopp dette som er bevis si utforskande og undersøkande rolle, at ein gjennom arbeid bevis bruker kunnskapen ein allereie har til å utvikle ny kunnskap.

Beviset si rolle er å kommunisere matematikk

Ola hevdar bevis er det som set *«lyskastaren på matematiske idear og matematiske argument».* Det er med andre ord gjennom bevisa at elevane vert eksponert for matematiske idear og argument, noko eg tenkjer svarar til bevisa sin kommuniserande rolle. For som Reid og Knipping (2010, s. 77) hevdar er beviset si kommuniserande rolle det å skulle formidle matematiske funn og kunnskap; det er gjennom bevisa nye matematiske funn og kunnskap vert kommunisert til andre. Det er den kunnskapen og dei funna som kjem fram i bevisa som er sjølve byggesteinane i matematikkfaget, og det er gjennom bevisa og bruken av desse i undervisinga at dette vert kommunisert vidare til elevane. Gjennom bevis elevane vert kjent med byggesteinane i matematikken og korleis den kunnskapen og dei prosedyrane dei tidlegare har brukt vert grunngjeve og formidla til elevane.

4.2.2 Kodar utarbeidd ved induksjon

Det å setje individ sine tankar inn i allereie eksisterande boksar kan vere vanskeleg og lite høveleg. Lærarar sine tankar og refleksjonar er då vanskeleg å passe inn i allereie eksisterande forsking og teori. Av denne grunn er induktive kodar utvikla med grunnlag i datamaterialet. Dei induktive kodane er utarbeidd i hovudsak for å svare på forskingsspørsmåla om lærarar si bruk av bevis i undervising og deira refleksjonar kring moglegheiter og utfordringar knytt til bevis i undervisinga i forhold til elevar si læring. Desse er nærare beskrive nedanfor, inndelt i delkapittel etter kjernekategoriar utvikla i samband med utviklinga av dei induktive kodane i tabell 4.2.

4.2.2.1 Implementering av bevis i undervising

Det er fleire måtar å implementere bevis i undervisinga på, det som kom fram som mest sentralt i datamateriale var her arbeid med verifiserande bevis, forklarande bevis, generiske eksempel og også det å arbeide med bevis i grupper. Desse vart alle utarbeidd som eigne kodar.

Bruk av formelle bevis

Formelle bevis er kjenneteikna av å ha eit stringent språk og rigorøs oppbygning. Dette er bevis som av Truls vert peika på som lite meiningsfulle og hensiktsmessige i undervisingssamanheng. Som han seier: «*Ofte tenkjer eg at desse formelle bevisa lett kan vere litt lite meiningsfulle for den vanlige elev da, kanskje nokon litt meir interesserte som henge på då*». Vidare peikar Truls på formelle bevis sitt stringente språk som ei av årsakene til at denne typen bevis er lite hensiktsmessige i undervisingssamanheng: «*For eksempel når elevane skal bevise at produktet av to partal alltid må bli eit partal er det mange som ikkje skjønnar at om dei tek 2n*2n så har dei vist at to like partal blir eit partal, at her har dei ikkje vist det generelt. Det blir mykje fuzz om du skal gjere det generelt nok og ofte er elevane mista allereie her*». Truls hevdar med andre ord at formelle bevis kan vere for abstrakt for den «vanlege» elev, du mistar dei på vegen og då kan det å bruke denne typen bevis i undervising kanskje verke mot si hensikt. Det blir berre ein vegg av bokstavar og algebra som elevane har vanskar med å forstå og som då kan virke negativt inn på motivasjonen. Algebraforståing og motivasjon som utfordringar i forhold til bruk av bevis i undervising vil verte nærare diskutert i delkapittel 4.2.2.3.

Formelle bevis vert av Ola og Håkon sett på som viktig i undervising. Dei peikar her på korleis elevane gjennom formelle bevis kan verte kjent med det som er grunnsteinane i formalane og prosedyrane dei brukar elles i matematikken. Ola formulerer det slik: *«Det kan setje lyskastaren på matematiske idear, matematiske argument og det er jo sjølve byggesteinane i matematikken».* Vidare poengterer Ola korleis elevane gjennom formelle bevis kan verte kjent med bevisidear og bevisteknikkar: «*du presenterer beviset, du tek indrefileten i beviset for da eksponerer du elevane for ein ide, så vil eg beskrive det på den måten at eg vil prøve å eksponere dei for bevisidear og så vil dei bli kjent med bevisteknikkar gradvis».* Det er dette Ola vidare hevdar er *«vegen til å forstå matematikk».*

Håkon peikar på at fleire elevar ofte strevar med bevis og bevisføring. I den samanheng har han utarbeidd ei punktliste for bevisføring, som eit forsøk på å gjere dette meir tilgjengeleg for elevane. «*For å få ein inngang til nokre som er veldig uttrygge med det, så har eg satt opp ein sånn punkt ein, punkt to, punkt tre [...] Det kan dei støtte seg på når dei arbeidar med det, så dei ikkje dett av og melder seg ut».* Dette tenkjer han kan gjere bevisføring mindre avskrekkande for elevane, då dei no har noko å støtte seg på undervegs. Med dette føler elevane kanskje at dette er noko dei kan meistre, i staden for å sjå på det som ei heilt umogleg oppgåve. Det kan vere nyttig for at elevane skal kome i gong med bevisføring, og ein god metode for å få med alle elevane. "*Det er for å fange opp alle, for eg ser at om ein ikkje har den her prosedyren og går rett på det abstrakte er det vanskeleg å få med alle".* Som han vidare seier må elevane ofte få ei instrumentell forståing før ein kan byrje å reflektere og diskutere vidare for å oppnå ei djupare og meir relasjonell forståing:

> "*Bevis er ganske krevjande og vanskeleg og innfallsporten til alt eigentleg er fyrst ei prosedyrisk gjennomgang berre for å få til ting og så er det refleksjon rundt det. Det er difor eg tok den her prosedyriske step by step, det liksom en slags hjelp til dei som slit mest med bevis og sånn, og så er det da å bruke litt tid på refleksjon og sånn etterpå for å vete kvifor ein gjer dei her ulike stega og på kva måte ein kan gjere det da."*

Det er i denne samanheng han har utarbeidd denne prosedyriske framgangsmåten; elevane kan her fyrst få ei kjensle av det å føre eit bevis med hjelp av punktlista, og når elevane har fått ei forståing for denne kan dei arbeide vidare med det. Det er då ein kan byrje å reflektere og svare på spørsmålet om *kvifor.*

Bruk av akseptable bevis

I likskap med formelle bevis verifiserer akseptable bevis matematiske utsegn. Det som derimot skil akseptable bevis frå formelle bevis er kravet til stringent språk og rigorøs oppbygging. Akseptable bevis opnar i større grad opp for forklaringar og visuelle representasjonar i bevisføringa. Dette er noko lærarane i studien hevdar er fordelaktig i undervisingssamanheng, Truls formulerte det slik:

> *«[...] forklarande bevis og visualiserande bevis har eg tru på, at det er alltid noko å snakke om der da, så det trur eg er ein.. Noko med argumentasjon, noko å diskutera og noko å prøve å få på plass i overgangane, og det er kanskje den diskusjonen, dei overgangane som er det mest spennande, ikkje sjølve det du har bevist i seg sjølv, det trur de jo på.»*

Her tenkjer eg det kjem fram at dei bevisa som vert tatt med i undervisinga av lærarar i stor grad er akseptable bevis, bevis som forklarar i større grad enn at dei berre verifiserer at eit teorem eller ein matematisk setjing stemmer. Dette referer også til beviset si rolle, der datamateriale tyda på at lærarane som tok del i studien tenkjer beviset si rolle er å forklare snarare enn å verifisere.

Vidare peika lærarane i studien særleg på visuelle representasjonar i arbeid med bevis som læringsfremjande. Truls formulerte det slik:

> *«Eg tenke jo at bevis med visualisering er jo kjempebra, men det er ein, er noko med at du kan visualisere, teikne, brette ut, eit bevis er jo ikkje noko veldig statisk, du er her, du er der og så kjem du jo dit, og det er alltid ein argumentasjon i mellom.»*

Dette tenkjer eg impliserer at visuelle representasjonar bidreg til at elevane kan få utforske og sjå beviset i fleire samanhengar enn den som står på papiret – ein kan få fleire innfallsvinklar og konkretisere det abstrakte matematiske beviset. At det er nyttig å visualisere og teikne er noko Ola også eg einig i, han hevdar visuelle representasjonar gjer at det "spirer". Den abstrake matematikken vert meir tilgjengeleg for elevane, dei får eit bilete av kva beviset eller det matematiske utsegnet fortel dei og kva det er det handlar om. Ei rein analytisk framstilling kan vere abstrakt og vanskeleg, og den visuelle representasjonen gjer at elevane i større grad forstår. Som han seier: "*det er fyrst når ein forklarar matematikken i bilete, at dei ser".*

Geometri er ein stor del av pensum i realfagsmatematikken (Utdanningsdirektoratet 2006a; Utdanningsdirektoratet, 2006b, Utdanningsdirektoratet, 2013). Geometriske bevis vert av alle lærarane i studien sett på som sentralt og ein god inngangsport til det å introdusere elevar for bevis i matematikken. Dette er den type bevis Håkon hevdar burde komme fyrst i arbeid med bevis:

> *Skulle gjerne sett at geometribevis kjem fyrst [...]. Da har ein litt den her logiske tankegangen, for det er mange som blir frustrert og seier "uff ja, men eg ser jo det at det her er et kvadrat liksom, å eg ser jo at den vinkelen er sånn", ja, men du må vise det. Korleis viser du det her matematisk? Der er det mykje frustrasjon, men da trur eg at når dei har fått kome litt og levd litt med den på ein måte at det er lettare å gå over på den frustrasjonen som begynne med den her.»*

I arbeid med geometriske bevis oppstår det ei spenning mellom det visuelle og det formelle; ein har det visuelle med geometriske figurar og konstruksjonar, og det formelle med bevis og bevisføring. Og som Håkon hevdar er det denne spenninga som gjer at geometriske bevis er ein fin inngangsport til bevis for elevar. Geometriske figurar og vinklar er noko elevane er kjente med, og det er noko dei har arbeida med å lang tid. Då vil det å til dømes skulle forklare samanhengen mellom geometriske figurar eller utføre eit bevis innan geometri vere å arbeide vidare med noko elevane allereie er kjent med og som dei ser, i staden for at det skal prøve å bevise noko abstrakt og ukjent.

Bruk av generiske bevis

Truls brukte i stor grad generiske eksempel i si undervising. Han byrja med eit spesifikt døme gjerne med tal, for så å generalisere og vise at dette var noko som gjaldt generelt:

> *«og så seie me ja, om det ikkje stod 2, 3 og 7 der, men det stod a, b og c, så ser me at all argumentasjonen me har gjort det går gjennom, og då kjem me fram til det same. Og då ser me at om me bytter 2, 3 og 7 med a, b og c, så kjem me fram til eit resultat i slutten så me slepp å gjera alle stega i mellom»*

Her får elevane gjere ei oppgåve eller eit eksempel med tal, noko som er kjent for elevane og som dei har gjort mange gangar før, som han seier «*om me fyrst har gjort det med eit eksempel, så kjem beviset etterpå som på ein måte forenkle fortsetjinga».* Det å introdusere bevis gjennom generiske eksempel vil med andre ord kunne vere med på å forenkle bevis. Ein gjer eit eksempel med tal og får forståing av korleis ein kan løyse ei slik oppgåve for så å gjere det generelt. Då ser ein at dette ikkje gjeld berre for det eine eksempelet, men at det faktisk er noko ein kan gjere i alle samanhengar der ein har føresetnadane som var til stades i den oppgåva.

Under observasjon var det nettopp generiske eksempel som vart arbeida med i Truls sin klasse. Her teikna Truls opp ein trekant med ulike sidelengder der ingen av vinklane var 90º, noko som gjorde at elevane ikkje kunne bruke Pytagoras for å løyse direkte. Elevane skulle deretter arbeide med denne oppgåva og prøve finne ut kor lange kvar av dei tre sidene i trekanten var. Her observerte eg det var stor diskusjon blant elevane for korleis ein skulle gå fram for å løyse dette; dei delte opp trekanten i to mindre trekantar og arbeida med det dei kunne av sinus, cosinus, tangens og Pytagoras. Elevane kom til slutt fram til lengda av dei siste sidene på trekanten. Dette vart deretter gått gjennom i plenum. Truls viste då elevane at dette vil jo kunne gjelde for alle trekantar; dersom ein bytter ut lengdene med a, b og c, og kallar vinklane A, B og C vil ein finne akkurat det same. Skilanden er berre at no står det bokstavar i staden for tal. Det elevane hadde kome fram til i si rekning var cosinussetninga. Denne måten å arbeide på var noko eg observerte elevane fann spennande, dei arbeida alle ivrig for å kome fram til svaret på oppgåva og fulgte alle med når Truls viste at dette var noko som gjaldt generelt. Bevisføringa vart noko elevane såg som ei spennande utfordring snarare enn noko abstrakt og avskrekkande.

Samarbeid i undervising med bevis

Diskusjon og samarbeid var noko Truls og Håkon peika på som læringsfremjande, og noko dei i stor grad nytta i si undervising. Håkon forklarte i sitt intervju om korleis han hadde nytta samarbeid når han sin klasse skulle arbeide med bevis av Pytagoras:

> *«Forklaring elev til elev, for eksempel Pytagoras beviset no så hadde me at dei skulle forklare til kvarandre, så hadde me ein felles der dei tok opp dei dei hadde kome fram til og så fekk me nyansert det litt da. [...] Det har eg sett nytten av, for da kan du på ein måte få dratt med dei her, det er litt viktig med dei du sett saman og sånn og da, sånn med motivasjon. Så tenke litt på det, i alle fall så syns eg det fungerte ganske bra, me hadde nokon ark som me delte ut så de skulle velje sin egen Pytagoras variant da, så skulle dei forklare til den andre, så skulle dei forklare til kvarandre, så skulle dei bytte om utifrå det dei hadde høyrt den andre sa, og da merka eg at det er ein ting, ein litt sånn didaktisk måte å prøvd å få gjort det litt meir spennande enn å sitte med den der boka med algebraen i ansiktet».*

Å arbeide med bevis i grupper eller saman med ein anna elev vil med andre ord kunne gjere bevis meir spennande. Her kan elevane saman diskutere og i samhandling kome fram til korleis ein til dømes kan bevise Pytagoras i staden for å sitje åleine å prøve og kanskje ikkje få det til.

Også Truls ser på samarbeid i arbeid med bevis og eigentleg matematikk generelt som læringsfremjande. Som han seier:

> *Samarbeid i den forma at dei forklarar og drøfter idear med kvarandre trur eg alltid er nyttig i all type matematikk, for det.. det å.. du skjønnar ikkje om du har gjort ting skikkelig før du skal byrje å forklare det til andre. Sånn sett fremja det veldig læring det å diskutera og det å jobba saman da, så det er ikkje noko spesielt for bevis det gjeld eigentleg generelt i matematikk uansett kva du arbeider med så tenkjer eg at samarbeid er veldig læringsfremjande då da, og så er det og sånn at når dei jobbar med bevis og med små delar der dei skal argumentere for det at dei får snakka saman gjer at veldig mange fleire vert aktive enn om eg berre gjev svaret eller spør ein og ein om det. Sånn sett tenkjer eg det er veldig læringsfremjande og ein veldig god måte å få mange med på tankegangen og det, det er bra om det er bevis eller andre ting, men kanskje spesielt når det gjeld bevis. Tek kanskje litt lenger tid, men som sagt me er jo der for å lære og tenkja saman, lære å forstå ting og det gjer ein veldig aktivt då da*.

Noko av det mest sentrale frå dette utdraget tenkjer eg er utsegnet *"du skjønnar ikkje om du har gjort ting skikkelig før du skal byrje å forklare det til andre".* Her kjem rolla til samarbeid og diskusjon i arbeid med bevis og generelt i matematikk godt fram. For det er i samhandling med andre at elevar får dette høvet, dei får sett ord på sine refleksjonar og tankar, samt at dei får drøfta sin tankegang og forståing med andre – her kan elevane lære i samhandling med kvarandre.

4.2.2.2 Moglegheiter ved bruk av bevis i undervising

Lærarane som deltok i studien hadde fleire refleksjonar kring kva bevis kan bidra med for elevar si læring; djupnelæring, kritisk- og metakognitiv tenking, matematisk forståing, argumentasjon, innsikt i matematikkens eigenart og fleire andre aspekt vart nemnt. Dette danna grunnlaget for kodar knytt lærarar sine refleksjonar kring bevis sine moglegheiter.

Bevis er med på å utvikle matematisk forståing.

Noko av det som kom tydeleg fram i datamateriale var at alle lærarane indikerte at ei av hensiktene med å inkludere bevis i undervisinga var å underbygge elevar si forståing av matematikk. Som Truls seier:

«*Utan at det er bevis, så blir det berre setningar og rekning. Setning, dømer der du reknar på dette her. Så eg trur at det spelar ei essensiell rolle for å kunne utvikle forståing då rett og slett».*

Noko som Håkon vidare støttar. Arbeid med bevis vert av han hevda å bryte opp med det han refererer til som instruksforståing:

«*om du ikkje har bevis og om du ikkje har det fokuset kan du komme unna med ei rein instruksforståing heile vegen, bevis bryt opp med det her, det tvinger deg på ein måte over i ei meir djupare forståing. [...] for å forstå eit bevis må du ha ei slags fleksibel forståing og sjå fleire samanhengar enn om du arbeider med dei her ulike punkttemaa som du går gjennom».*

Med andre ord krev arbeid med bevis ei heilt anna tenking og ei heilt anna forståing, det er ikkje nok berre å pugge ein formell eller å kunne ein prosedyre. I arbeid med bevis må du i større grad forstå kva du gjer og kvifor du kan gjere det, noko som vil kunne fasilitere matematisk forståing. Som Ola vidare hevdar ligg det her ei læringsutvikling og arbeid med bevis er med på å auke denne læringsutviklinga: *«[...] ei læringsutvikling og det å arbeide med bevis er med på å auke den læringsutviklinga. [...]. Eg trur det er eit av springbretta, det heilt sånn avgjerande springbrettet for verkeleg matematisk forståing».*

Her kjem det etter mi meining klart og tydelig fram at lærarane i denne studien meiner bevis er eit sentralt element for å utvikle matematisk forståing hjå elevane.

Matematisk argumentasjon

Ola peika på at ei av bevis sine signifikante roller i undervising er å lære elevar meir om matematisk argumentasjon. Gjennom bevisa kunne elevane få innsikt i kva eit argument er, noko han hevda var veldig verdifult også utanfor matematikken som disiplin. Som han seier:

«*det er jo juristar som seier, det var først når eg leste Euklid at eg skjønte kva eit argument er. Så det er jo noko med dette argumentet si kraft som er forbunde med denne bevistenkinga som er veldig verdifull»*

At bevis kan gje elevar innsikt i kva eit matematisk argumentasjon var noko også Truls peika på, han hevda bevisa i seg sjølv er argument:

«*[...] bevis, kva er eit bevis? Det er jo argument, det er logisk gyldige argument som føre deg frå ein startstad til ein sluttstad sant, det er jo det beviset er».*

Bevis er med andre ord sentralt i matematikkundervising av den grunn at elevane lærer seg matematisk argumentasjon, noko som er ein viktig del av matematikken i seg sjølv, samstundes som det er sentralt også utanfor matematikken.

Vidare peika alle lærarane i studien på korleis det i arbeid med matematiske bevis og argumentasjonen i desse ligg eit stort læringspotensial. Truls formulerer det slik:

> *«[...] det er den argumentasjonen og det å læra seg å argumentera og skjønna det at argumentasjon er viktig det er kanskje det dei tenar best på, og du som lærar må utfordra de på det "kvifor er det riktig?" "kvifor har du lov til det?" og "kvifor er det okei?" Det tenke eg er veldig sånn viktig måte å gjere det på i klasserommet da».*

Her ser ein at det er arbeid med argumentasjon elevane i følgje Truls tenar best på. Det er gjennom arbeid med argumentasjonen i bevisa elevane kan få svar på spørsmålet om *kvifor,* og som han hevdar er det dette ein som lærar må utfordre elevane på.

Matematisk resonnering og tenking

Resonnering i matematikk kan seiast å vere elevar si evne til å tenkje over og reflektere kring det matematiske innhaldet i oppgåver og aktivitetar ein utfører. Dette er noko Håkon hevdar elevane gjer heile tida i matematikk, men at det i arbeid med bevis er ei meir open tilnærming noko som gjer til at ein her har eit større læringspotensial. Som han seier: «*det her det gjer du jo eigentleg heile tida, du gjer ikkje noko annleis med bevis, det er berre litt meir open om korleis du gjer det, det bortfører lineartieten».* I staden for å berre tenkje over korleis ein løyser ei oppgåve eller eit problem, må ein i arbeid med bevis tenkje over kvifor teoremet eller det matematiske utsegnet du bruker er som den er og kvifor du brukar dette. Elevane vil i arbeid med bevis i større grad få moglegheita til å tenkje over og reflektere kring eigne og andre sine berekningar; kvifor ein gjorde akkurat desse berekningane og om resultatet ein kom fram til er holdbart eller ikkje. Matematisk bevis kan med andre ord vere med på å bortføre noko av lineariteten ein finn i prosedyreoppgåver og av denne grunn utfordre til matematisk tenking og resonnering.

Bevis kan vere med på å utvikle metakognitiv tenking

Metakognisjon omhandlar det å verte meir medviten sin eigen tankegang; det referer til tenking om eigen tenking (Furnes & Norman, 2013, s. 120; Nosrati & Wæge, 2015, s. 6). Håkon peikar på metakognisjon som noko arbeid med bevis i undervising kan fasilitere. Han peika på at ei av bevis sine roller var det å utvikle ein «metakognitiv elev: *«..rollen eg ser i bevis [...] nettopp det å utvikle ein metakognitiv elev. Det er ein elev som er medviten korleis ein lærer og korleis ein arbeider og løyser problema».* I denne prosessen vert bevis sett på som sentralt nettopp fordi arbeid med bevis utfordrar den instrumentelle forståinga; bevis utfordrar elevar til å tenke og ein må inn med fleksibilitet og sjå problema i eit vidare perspektiv. Som Håkon vidare seier:

> *«Instrukseleven som eg snakka om, som da får en instruks og som prosedyre gjere det her, for det slit ein med i bevis, der må ein inn med fleksibilitet eller tenke litt og da blir mange elevar litt frustrert "korleis er oppskrifta på å løyse det her?". Nei her må du litt utanfor, litt vidare perspektiv for å løyse den.»*

Utvikle ei evne til å tenkje kritisk

Det å kunne tenkje kritisk og nytte fornufta på ei undersøkande og systematisk måte i møte med praktiske utfordringar, ytringar og kunnskapsformer er som nemnt i delkapittel 2.1, ein sentral del av kompetansen elevar skal sitje igjen med etter avslutta utdanning. I denne prosessen ser Håkon på bevis som veldig sentralt.

> *«Kritisk tenking er eit sånn sekkeomgrep, eit vanskeleg omgrep å forholde seg til, men det er det der med systematisk og undersøkande bruk av fornuften som eg tenke på, og det treff veldig i bevis sånn eg ser det. [...] Med samfunnsdeltaking og sånn som dei snakka om, at det er viktig å ha den her forståelsen av bevis eller den argumentative forståinga av matematikk viss du ikkje skal bli lurt eller manipulert eller forstå korleis ting vert presentert på den type argumentativ eller matematisk måte».*

Bevis og gjennom arbeid med bevis vert ein introdusert for argumentasjonsrekkjer og grunngjevingar for matematiske utsegner. Dette kan bidra til at elevar kan utvikle ei matematisk forståing for prosessar i samfunnet som gjer at elevane kan utvikle seg til å bli kritiske medborgarar i eit demokratisk samfunn.

Bidreg til djupnelæring

Djupnelæring har vore snakka mykje om i den norske skulen etter at Ludviksen-utvalet lanserte det i 2014. Utvalet hevdar djupnelæring «*handler om at elevene gradvis utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fagområde[...] dybdelæring innebærer at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse*» (NOU 2014: 7, s. 35). Djupnelæring i matematikk kan med andre ord seiast å omhandle elevar si varige matematiske forståing, og at elevar gjennom undervisinga skal kunne utvikle forståing av faglege omgrep og få ei forståing av samanhengane i faget.

I studien vert arbeid med bevis av Håkon sett på som sentralt nettopp for å utvikle djupnelæring hjå elevane, som han seier: «*det andre er det med djupnelæring, det fremjar djupnelæring*». Dette grunnar han i at ein i arbeid med bevis vert tvungen til å sjå større samanhengar i faget: «*det der med bevis, der er det større samanhengar i faget, så du ser.. du drar inn litt ting frå sei 1T no i R1 sant, du drar inn ting i større grad enn om du er spissa i dei her ulike tema som du tek opp fortløpande. [...] Ein anna ting da er at bevis ein meir på enn, det er meir.. det er fleire måtar å løyse det på og igjen det skapar då det med djupnelæring*». I arbeid med bevis må du med andre ord tenkje litt meir rundt problemet og dra inn kunnskapar du har frå tidlegare; du må her sjå det du lærer om no i samanheng med det du har lært tidlegare. Av denne grunn hevdar Håkon arbeid med bevis fremjar djupnelæring.

Det å arbeide med bevis kan for mange vere både frustrerande og vanskeleg, men som Håkon vidare hevdar er djupnelæring frustrerande og i arbeid med dette må du som lærar vere litt som ein toppidrettscoach. «*Det er seier eg også til dei da som ein sånn toppidrettsvoach – du må lære deg å lide for å oppnå gode resultat. Det er ingenting som skjer gratis, då lære du ingenting. Kjem du fram til løysinga utan å slite litt, da kunne du det frå før. [...] Djupnelæring er frustrasjon*».

Gir innsikt i matematikkens eigenart

Matematikk har som nemnt i delkapittel 2.1 ei sterk historisk forankring og bevis har spelt ei sentral rolle i utviklinga av matematikken. Dei stringente bevisa med si klare og eintydige sanning er noko som kjenneteiknar matematikken aleine, det kan seiast å vere ein del av matematikken sin eigenart. Fleire av lærarane i studien impliserer difor i sine fråsegner at bevis er sentralt å inkludere i undervisinga nettopp av den grunn at dei gjev elevar innsikt i matematikken sin eigenart; det viser elevar kva matematikk eigentleg er og kva som kjenneteiknar den. Som Ola seier:

> *«det er bevisa som gjer til at alle algoritmane fungerer og i matematikken der har me jo objektiv sanning, det er jo det einaste faget som kanskje kan påberope seg det [...] .i matematikk så har me jo objektive sanningar fordi me har fundament, postulat og så bevisa,, så det tenkjer eg er ein tankemåte og ein forståingsmåte som er helt essensielt for at elevene skal få ei djupare forståing i matematikk, det å ikkje bruke bevis er å tåkelegge, for me lev i ei slik tid der veldig mange av faga opererer med subjektive sanningar; mi sanning og di sanning og det ligg i det postmoderne tidsbildet, medan*

matematikken der er motkulturelt på sin heilt unike måte, og det er tydeleggjerande gjennom bevisa».

Her ser ein at bevisa med si eintydige sanning er noko heilt unikt for matematikken. Bevis vert difor av Ola sett som ein sentral del i prosessen å forstå matematikk og matematikken sin natur: *«Det kan bidra til å stimulere tankar, det kan bidra til å forstå matematikkens natur - det er bevist».*

Matematikken og dei matematiske bevisa sin objektive sanning og eintydighet gjer også til at matematikk er eit sentral verktøy også i andre fag og i samfunnet generelt, som Håkon seier:

> *«Matematikk er eit veldig viktig verktøy, i andre fag og i samfunnet generelt. Kvifor er det eit sånn viktig verktøy? Jo det er for det er så eintydig, det er veldig eintydig og påliteleg. Det er ikkje så mykje sånn tolking og synsing rundt det, ein gjeve ting. Difor har det blitt eit sånn viktig verktøy»*

*4.2.2.3 **Utfordringar** ved bruk av bevis i undervisinga*

Det å legge vekt på bruk av bevis i undervisinga gjev ikkje berre moglegheiter, det er også ei rekke utfordringar knytt til dette. Kva utfordringar lærarane i studien peika på som mest sentrale i arbeid med bevis vert nærare beskrive i dette delkapittelet.

Fagleg skilje

I eit klasserom vil ein finne kanskje 30 ulike individ som alle tek med seg ulike erfaringar, kunnskapar og kompetansar inn i undervisinga. Dette gjer at ein her vil ha eit fagleg skilje og når ein som lærar skal prøve å tilpasse undervisinga for å nå alle elevane er det noko som lærarane i studien hevdar kan gje store utfordringar. Særleg trekkjer dei fram utfordringar knytt til arbeid med bevis. Håkon hevdar bevis har *«ein tendens til å skape strekk i laget mellom dei sterke og dei svake elevane, då det utfordrar dei svake elevane i sterk grad»*. Ola hevdar også fagleg skilje i klassen skapar ei utfordring i arbeid med bevis. Han samanliknar bevis og alle utfordringane som følgjer her med fjellklatrarvegen til Ulriken.

> *«Bevisa er fjellklatrarvegen til Ulriken på ein måte, eller du kan tenkje deg eit fjell som er vanskeleg å klatre og så finst det ein gondol. Kva skal me ta når me skal prøve å få med så mange som mogleg? Du tek gondolen, og da hoppar du over bevisa. Det er to tendensar som kjempar mot kvarandre: du skal få med så mange som mogleg til toppen – gondol, dropp beviset».*

Når du her skal klare å få med alle til toppen er ein av utfordringane at ein ved «fjellklatrarvegen» kjem til å miste mange på vegen. Elevane har alle ulike føresetnader for å klare denne «klatreturen», og når du som lærar skal prøve å la elevane utforske fjellet og prøve å rettleie alle opp er det noko som krev tid og krefter. Om du klarar det, er det som Ola seier ei nydeleg reise som til slutt kan gje elevar moglegheita til verkeleg å utvikle matematisk forståing: «*det kan vere ein skikkelig fjellveg, men når du da kjem opp på toppen så er det nesten finare enn på toppen av Ulriken»,* men det er ei stor utfordring. Med gondolen kjem alle seg opp og det tek i tillegg mykje kortare tid som også er sett på som ein stor utfordring som vert beskrive seinare.

Eit av elementa som vert peika på som bidragsgivande for det faglege skiljet er algebraforståing. Algebra er ein sentral del av fleire bevis og då kanskje særleg formelle bevis. Dette er noko alle lærarane hevdar kan vere ei utfordring, då elevane ofte har vanskar med å forstå algebraen i bevisa og derav har ein tendens til å melde seg ut. Håkon formulerer det slik: «*det med algebraforståelsen som ofte er problemet, så da er det sånn da at det her blir da ein sånn vegg med ein gang, ein stoppar opp og melder seg ut».*

Tid

Som lærar har ein eit stort pensum ein skal ta elevane gjennom i løpet av eit år samstundes som ein skal setje vurderingar og førebu elevar til eksamen. Dette er alle faktorar som er tidkrevjande, og nettopp tid er det Håkon og Ola hevdar er den største utfordringa knytt til bevis i undervisinga. Som Håkon seier:

> *«utfordringa i norsk skole, og da spesielt med tida og moglegheitene ein har i forhold til læreverk og sånn [...] eg skulle gjerne hatt litt betre tid spesielt på bevis da. [...]. men det tek veldig tid å fange opp de behova som ligg der på topp og litt nedre del da med forståelsen, men samtidig så prøve eg å gjere det, men i for liten grad og nettopp å grunn av.. veldig sånn pressa på tid».*

Her ser ein tidsaspektet går igjen, Håkon føler seg konstant pressa på tid og det då å skulle få med alle gjennom pensum og kanskje også nytte bevis i undervisinga utan at nokre blir overvelda av algebra eller andre faktorar som kan hindre motivasjon vert utfordrande og noko som fort kan felle vekk. Ola brukar fjellmetaforen også for å forklare korleis tid er ei utfordring: «*kor lang tid kan me bruke på å leike rundt og oppdage fjellet? Nei me skal på fjellet før klokka 11 - gondolen. Så da falt bevisa av i veggrøfta, litt sånn kan det bli».* Ein har ikkje her tida til å la elevane utforske fjellet på ein måte som gjer til at læringspotensialet i bevisa kjem fram. Om ein ikkje har nok tid til å bruke på dette kan bevisa verke mot sin hensikt, det kan verke negativt inn på elevar sin motivasjon og faglege sjølvtillit, noko som vert nærer kommentert seinare i delkapittelet.

I likskap med Håkon og Ola følte også Truls på tidspress i matematikkundervisinga. Derimot meinte Truls at bevis ikkje var noko som tok tid frå å lære elevar matematikk og førebu dei på eksamen. Som han seier:

> ”*Så klart tidsperspektivet, ein føler alltid på eit press med at ein har mykje stoffmengde ein skal gjennom, men matematikk handlar veldig mykje om å løyse problem, altså problemløysing til sjuande og sist og då må ein kjenne til ein del metodar. Bevisføring og er ei form for problemløysing ofte med generalisering, men ofte også med å gjere slutningar, gjera dei rette slutningane og kanskje også klare å sjå kva slutningar kan vere lurt å gjere då da. Så eg tenkjer det er i alle fall ein god del av bevisa som eignar seg veldig godt for å lære matematikk. Så sånn sett tenkjer eg tidsperspektivet, at det liksom ikkje spis av tida til å lære matematikk med”.*

Dette tenkjer eg impliserer at Truls ser på bevis som sært nyttig i det å lære seg matematikk, ikkje berre for å forstå samanhengar i matematikken, men også som ein måte å lære korleis ein skal løyse matematiske problem og oppgåver. Det handlar meir om kva type bevis ein vel å ta med i undervisinga, for som han vidare seier:

> *Det kan jo seiast at ein god del bevis er litt sånn ad-hoc som er litt sånn at du må trekke inn.. trekke ei kanin opp av hatten på sida, veldig umogleg å vite, du må gjere ein substitusjon som gjer at du kjem sånn og sånn, så ordnar det seg. Det kan vere vanskeleg å motivere, det kan vere vanskeleg å formulere når og sjå akkurat det. Då vil eg kanskje unngå å bruke tid på sånne bevis då, for bevis skal ha ein meining utover det å berre vere.. eg brukar ikkje bevis for å overtyde elevane, men for at de skal lære noko når dei gjer det då, så sånn sett så tenkjer eg at det, at det er vel anvendt tid, det er like godt anvendt tid som å bruka tid på andre ting i matematikktimane.*

Ein må med andre ord bruke tid på bevis som fasiliterer forståing framfor bevis som overtyder elevar om at eit utsegn stemmer, det er i desse tilfella bevis er vel anvendt tid i undervisingssamanheng.

Motivasjon

Motivasjon kan seiast å vere drivkrafta bak alle læreprosessar (Manger, 2013, s. 133) og er særs sentralt for at elevar skal lære. Dette gjelder også matematikk og då bruk av bevis i matematikkundervisinga. Som Ola hevdar: «*du må treffe djupare i eleven, du må skape et emosjonelt engasjement, eller kanskje så djupt som til identitet/sjølvforståing*». Det å arbeide med bevis må vere noko eleven ynskjer og noko han ser på som spennande og interessant, i tillegg til at det må vere noko eleven ser nytteverdien av.

Ola hevdar vidare at arbeid med bevis «*kan ha ein drepande effekt på feil publikum*». Dette tenkjer eg ikkje berre heng saman med motivasjon, men også elevane sin faglege sjølvtillit. Om du stadig treff på vanskar og kjenner du ikkje forstår vil dette kunne påverke elevar sin motivasjon for å lære negativt. Bevis er noko fleire elevar strevar med, arbeid med dette vil då kunne bekrefte og bygge opp under det sjølvbiletet eleven kanskje allereie har, at «eg kan ikkje matematikk». Som Ola seier:

> *«Eg kan ikkje matte» viss det er tatovert på sjela, då er det å drive med bevis, det er så dørgande irrelevant, for det berre bekreftar sjølvbiletet - eg kan ikkje matte»*

Det å drive med bevis i undervising vil då kunne verke mot si hensikt. Utfordringa kan då, som Håkon nemner, vere å ufarleggjere arbeid med beivs, gjere det spennande og finne den riktige inngangsporten.

Ola hevdar arbeid med bevis også kan gje motivasjon for vidare læring:

> *«Eg føler det kan bygge opp ein sjølvtillit, det kan bygge opp forståing og det kan bygge opp på ein måte matematisk ryggrad. For viss du berre får kakeoppskrifter og lager kaker, så føler du at du kan lage kaker, men viss du byrjar å lage kakeoppskrifter, ja da er du ein bakar eller ein konditor, så eg føler at du verkeleg kan byrje å lage kakeoppskrifter. At der er det meir verdi og ei djupare læring».*

At ein gjennom arbeid med bevis kan oppnå ei djupare forståing i faget, kan med andre ord gje motivasjon for vidare læring. Det kan bidra til at matematikk i større grad blir noko elevane synes er morosamt og spennande heller enn berre ein prosedyre dei må gjere om igjen og om igjen.

Her ser ein det med bevis og motivasjon både kan vere ei utfordring og ei moglegheit, noko som vil verte nærare diskutert i kapittel 5.

4.2.2.4 Avgrensande ytre faktorar

Som lærar i den norske skulen har ein mykje å forhalde seg til. Det er ein offentleg bestemt læreplan, vurderingar som skal setjast, lovpålagt tal timar og også læraren sin autoritet og stilling i klasserommet er ein sentral faktor. Alt dette vart nemnt som avgrensande faktorar for elevane si læring og bruk av bevis i undervisinga av lærarane som deltok i studien og vil verte nærare beskrive her.

Læreplan

Læreplan fortel kva som skal undervisast og kva kunnskap elevane skal sitje igjen med etter avslutta skulegang. Dette er noko alle lærarar må forholde seg til. Bevis er nemnt, men ikkje i særleg stor grad prioritert i læreplanen for realfagsmatematikk. Noko som fleire av lærarane i studien påpeika. Dette er ein faktor Ola og Håkon meiner kan gjere at tida til å arbeide med bevis kan bli knapp. Ola formulerer det slik:

> *«Og så har me jo et pensum me skal gjennom, me skal jo lære dei så mykje som mogleg, dei skal meistre eksamensoppgåvene, så det er.. eg skulle gjerne lagt meir vekt på bevis for å auke den matematiske grunnforståinga og i R-faga så prøver eg i aukande grad å køyre bevis, men i ærlegheitas namn så blir det veldig mykje skisser til bevis, me er ikkje stringente i vidaregåande skule, me har ikkje tid til det, me har ikkje elevmasse som har på ein måte modning til å tole stringens, så me kompromisserar litt, for me tenkjer me skal prøve å dekke desse behova, ja du skal bli flink til å gå i fjellet, så da ehh.. litt gondol også, der føler eg det er.*

Håkon hevdar læreplanen er ein av faktorane som påverkar den dårlege tida ein har på bevis i undervisinga, om me ser på sitatet brukt tidlegare igjen:

> *«utfordringa i norsk skule, og da spesielt med tida og moglegheitene ein har i forhold til læreverk og sånn som eg vert slusa inn i ein sånn måte som eg... eg ikkje helt likar, skulle gjerne hatt litt betre tid spesielt på bevis da [...]. Det krev tid rett og slett, og det er det eg håpe no med dei nye læreplanane da skal få gjort litt meir, opna opp litt meir pensumet sånn at ein får gått litt meir i djupn, spesielt med bevis da».*

Her ser ein at det er læreplanane og den avgrensinga som ligg i denne Håkon grunnar som faktoren for at han føler han har dårleg tid til å prioritere bevis i undervising. Korleis dette aspektet kanskje kan endre seg med dei nye læreplanane i 2020 vil verte sett nærare på i kapittel 6.

Vurdering

Eksamen og vurdering er ein stor del av utdanningssystemet og noko som vert nemnt av lærarane i studien som eit innverkande element for bruk av bevis i undervisinga. Dette er noko som oppheld elevane ein heil del. Elevane er fokuserte på å få gode karakterar og nokre ynskjer å gjere berre det dei må for å nå dei faglege måla i form av resultat på prøvar og eksamenar, ikkje nødvendigvis det å faktisk forstå matematikken. Det spørsmålet Truls hevdar han får ofte i arbeid med bevis er *"kjem dette beviset på prøven eller kan me gløyma det?"*. Dette tenkjer eg viser det ovannemnde; at elevar er meir fokuserte på kva dei må pugge for å få ein god karakter på neste prøve eller eksamen framfor korleis dei best kan lære og forstå matematikken.

Samtidig peikar Truls på at vurdering og eksamen ikkje må komme i hovudfokus, som han seier:

> *«Viss matematikkundervisning berre handlar om å førebu dei til ein skriftlig eksamen, så tenkjer eg at mykje er tapt då da, ein må, ein må ha litt andre ting og i hovudet, rett og slett, for argumentasjon kan ikkje bli så viktig på ein skriftlig eksamen, kanskje på ein munnleg, men eg tenkjer i seg sjølv så er det viktig for undervisingen då da».*

Bevis er med andre ord ikkje ein stor del av vurderinga i matematikk, men det er likevel viktig å inkludere dette i si undervising. Matematikkundervising er ikkje berre for å førebu elevar til eksamen, ein skal også underbygge forståing av faget og her spelar bevis ei sentral rolle.

Lærarrolla

God skole (u.u) refererer til ein lærar som ein tydeleg klasseleiar som formidlar kunnskap og motiverer elevar til å lære. Det er også ein omsorgsperson som er med på å oppdra og danne normer hjå elevar heilt frå dei er små, og etterkvart blir det ein naturleg autoritative person elevane høyrer på. Det læraren seier stemmer, det er ikkje noko elevane set spørsmålsteikn med; har læraren sagt det, så stemmer det. Dette er noko fleire av lærarane peikar på, slik som Truls refererer til volumet av ei kule: *«Dei trur jo at volumet av ei kule er* $\frac{4}{3}\pi r^3$*, det har dei trudd på sidan de gikk i 9.klasse og såg formelen, de har ikkje noe bevis på det før de går i R2, men de har trudd på det hele vegen. Dei leve i ein sånn matematisk religiøs forståing dei fleste elevar da i akkurat veldig mange ting, læraren har jo sagt det, det står jo i boken, så da er det jo sant.»*

Håkon peikar også på at elevane fort blir litt passive, dei blir sitjande å vente på å høyre kva læraren skal seie i staden for å delta meir aktivt i si eiga læring. «*Elevane sit jo ganske passivt mange, og ventar på å gjere det som læraren seier – pliktoppfyllande. [...] dei er kanskje litt for mykje instruksfokusert og ventar på å gjere det som læraren skal seie i staden for å problematisere og bringe seg sjølv på bana da».* Dette kan igjen ha samanheng med læraren si autoritative rolle i eit klasserom. Elevane sit stille og ventar på instruksjonar frå lærar, noko som i utgangspunktet kan tenkjast å vere ein god ting. Samstundes kan det som Håkon impliserer hindre litt av den utforskinga og undringa som kan gje «metakognitive elevar»; elevar som tenkjer sjølve og som utviklar ei relasjonell forståing framfor ei instrumentell forståing.

Kapittel 5: Diskusjon

I dette kapittelet vil eg fyrst diskutere dei viktigaste forskingsresultata frå studien i forhold til overordna teori og tidlegare forsking. Dette vil bli gjort i lys av dei tre forskingsspørsmåla: kva roller ser lærarar at bevis spelar i realfagsmatematikk, korleis implementerer lærarar bevis i si undervising og kva moglegheiter og utfordringar ser lærarar i å bruke arbeid med bevis for å legge til rette for at elevane kan utvikle matematikkforståing? Til slutt vil eg komme med ei metodologisk drøfting av studien sine svaketer og avgrensingar.

5.1 Funn i forhold til overordna teori og tidlegare forsking

5.1.1 Kva rolle ser lærarar at bevis spelar i realfagsmatematikk?

Frå teorien kan ein sjå ein konsensus blant matematikarar og filosofar at bevis er sentralt i matematikken primært fordi det etablerer sanninga av matematiske utsegn – det verifiserer og gjev evidens. Det er dette som av Reid og Knipping (2010) vert definert som bevis si verifiserande rolle. Innan didaktisk forsking er det på den andre sida fleire som argumenterer for at det er bevis si forklarande rolle som er den sentrale i undervisingssamanheng. Presidenten i Mathematcial Association of America er ein av dei som hevdar ein ikkje skal bruke så mykje tid på å vise *at* noko stemmer, men i staden bruke tid på bevis som bidreg til forståing og gjev innsikt i *kvifor* noko stemmer (referert i Knuth, 2002a). Dette vert støtta av Hanna (2000), ho hevdar det er spørsmålet om *kvifor* som er det fundamentale ved bevis og det spørsmålet bevis burde svare på i undervisingssamanheng. Det er fyrst når ein formidlar bevisa på ein måte som kan leie til forståing av matematikken sine mange abstrakte aksiom, teorem og definisjonar at bevisa får fram sitt potensiale i undervising. Med andre ord når bevisa si forklarande rolle er meir framståande enn den verifiserande.

Knuth (2002a) uttrykker det same som Hanna (2000); at det er bevis si forklarande rolle som er den sentrale i undervisingssamanheng. Knuth (2002b) si studie viste derimot motstridande resultat. Lærarane i denne studien såg på verifikasjon som bevis si sentrale rolle også i undervising, dei inkluderte bevis i si undervising primært for å etablere sanninga av matematiske påstandar og utsegn. Bevis si forklarande rolle vart av lærarane her i større grad oppfatta som å forstå korleis ein går fram frå premiss til konklusjon, altså som det å forstå korleis ein fører eit bevis. Dette strider imot teori og anna tidlegare forsking kring bevis si forklarande rolle. Her vert bevis si forklarande rolle sett på som det å forklare *kvifor* matematiske teorem og utsegner stemmer og gjennom dette fremje forståing og gje innsikt i matematiske samanhengar, ikkje som å forstå korleis ein utfører eit bevis. Det var denne oppfatninga lærarane som deltok i mi studie også hadde av bevis si forklarande rolle; at bevisa skulle gje innsikt i den underliggande argumentasjonen og forklare *kvifor* dei matematiske teorema og utsegna er som dei er. Det var dette lærarane såg på som bevisa si primære rolle i undervisingssamanheng. Det var argumentasjonen i beviset som var det sentrale ikkje det at påstanden er verifisert. Som Truls hevdar trur elevane på at påstanden eller teoremet er sant, slik som at volumet av ei kule er $\frac{4}{3}\pi^3$ har dei trudd på sidan dei gjekk i 9.klasse, det står jo i boka og læraren har sagt det. Han si oppgåve er difor å forklare *kvifor.* Dette var noko ein lærar i Dickerson og Doerr (2012) si studie også poengterte: *«The way we have been teatching it, these kids already coming in with knowledge [...] my job is to say; yes, you know that, but here is why».* (Dickersson og Doerr, 2012, s. 718).

Utover det å forklare kom det gjennom studien fram at bevis også har andre roller i undervising. Truls peika her på utforsking og korleis elevar gjennom arbeid med generiske eksempel kan oppdage nye matematiske samanhengar. Reid og Knipping (2010) definerer bevis si utforskande rolle som å kome fram til nye matematiske resultat gjennom bevisføring. I denne oppgåva er denne rolla brukt litt annleis. Her er bevis si utforskande rolle vorte tolka som at elevane gjennom arbeid med bevis har kome fram til matematiske resultat som er nye frå deira ståstad. I utdraget nytta for å forklare denne koden ser ein at elevane arbeider med ein trekant der nokre sider er ukjent, for så å nytte deira matematiske kunnskap og kompetanse og til slutt ende med eit resultat der dei har nytta cosinussetninga. Det er fyrst i 1T elevane vert introdusert for cosinussetninga og dette vil difor vere eit nytt matematisk resultat for desse elevane. Dei har ikkje her utforska og gjennom bevisføring kome fram til eit nytt matematisk resultat, men dei har utforska og kome fram til eit matematisk resultat som er nytt for dei. Dette tenkjer eg då passar under denne rolla til bevis, av den grunn at elevane her nyttar sin allereie eksisterande kunnskap og kompetanse i arbeid med bevis, for så å kome fram til eit nytt resultat frå deira ståstad. Her tenkjer eg det er rom for diskusjon om dette kan kvalifisere som bevis si utforskande og undersøkande rolle, men sett i ein undervisingssamanheng tenkjer eg dette vil kunne seiast å vere utforsking som leiar til nye matematiske resultat.

Reid og Knipping (2010) peikar vidare på intellektuelle utfordringar som ei av bevis sine roller i matematikken. Dei peikar her på at bevis er med på å gje matematikarar intellektuell stamina gjennom å utfordre dei til å nytte sin matematiske kompetanse til å bevise matematiske utsegn, og dersom ein klarar det ei kjensle av sjølvrealisering. At bevis er med på å gje elevar intellektuelle utfordringar ser ein også igjen i fråsegnene til lærarane i studien. Som Håkon peikar på må ein i arbeid med bevis vekk frå den lineariteten ein ofte finn i lærebøker og mønsteroppgåver; arbeid med bevis utfordrar elevar til å måtte tenkje litt sjølve. Det blir ikkje lenger berre å følgje ei prosedyre eller fylle tall inn i ein formel, ein må her arbeide med korleis denne formelen eller prosedyren vart til, tenkje litt meir rundt formelen eller problemet og prøve å forstå tankegangen bak og argumentere for det. Reid og Knipping (2010) peikar vidare på korleis bevis gjennom å gje matematikarar intellektuelle utfordringar bidreg til sjølvrealisering. Dette vert også peika på av Ola, bevis og utfordringa som ligg i å forstå desse vil kunne auke elevar si faglege sjølvtillit. Om ein klarar utfordringa vil elevane gå frå å vere kakebakarar som følgjer ei oppskrift til å bli konditorar som verkeleg kan bruke kunnskapen sin. Den intellektuelle utfordringa kan i den forstand auke elevar si sjølvkjensle og bidra til sjølvrealisering.

Det at intellektuelle utfordringar er ei av bevis sine sentrale roller i undervising finn eg i liten grad igjen i tidlegare forsking. Dette kan ha samanheng med at det er gjort lite forsking på bevis sine roller i undervisingssamanheng utover det å verifisere matematiske påstandar og forklare matematiske samanhengar. Dette er noko de Villiers (1999) også peikar på, som han skriv: *«Rather than one-sidedly focussing only on proof as a means of verification, the more fundamental function of explanation should be exploited to present proof as a meaningful activity to pupils. At the same time atteintion should be given to the discovery function of proof as well as the communicative aspects»* (s. 23). Dette er ein artikkel frå 1999, noko forsking er gjort kring bevis sine roller og funksjonar i undervising sidan den tid og då spesielt på bevis si forklarande rolle og kommuniserande rolle (Hanna, 2000; Knuth, 2002a; Knuth, 2002b). Bevis si utforskande rolle, i tillegg til bevis sin funksjon som intellektuell utfordring for elevar er derimot forska lite på. Nokre funn her vil difor ikkje kunne drøftast opp mot tidlegare forsking, då denne i liten grad eksisterer. Det at bevis kan gje elevar intellektuell stamina og gjennom dette fasilitere sjølvrealisering vil vere eit nytt funn denne studien kan bidra med.

Litteraturen kan derimot tilseie at intellektuelle utfordringar er sentralt i undervisingssamanheng. Slik som Hiebert og Grouws (2007) hevdar er det i undervisingssamanheng sentralt at elevar må streve litt for at ein skal kunne oppnå ei relasjonell forståing. Om elevar til stadighet får oppgåver og problem av typen fyll inn eller følg ei prosedyre vil ein ikkje oppnå ei relasjonell forståing, ein vil då få ei instrumentell forståing. Bevis og korleis ein gjennom desse kan gje elevar oppgåver og problem som krev akkurat dette – ein kan her gje oppgåver elevar må streve litt med. Ein ser ikkje svaret med ein gang og vil verte utfordra. Herifrå tenkjer eg bevis si rolle som bidragsgivande for intellektuell utfordring kjem fram i litteraturen som ei sentral rolle i undervisingssamanheng, noko som då støttar opp under funna i denne studien.

Reid og Knipping (2010) hevdar vidare kommunikasjon er ei av bevis sine sentrale roller i matematikken. Dette ser ein igjen også igjen i studien til Knuth (2002b), her hevdar tolv av seksten lærarar på at kommunikasjon er ei av bevis sine sentrale roller i undervising. Dei peikar på korleis bevis ofte er eit resultat av sosial interaksjon. Bevis er ein måte å kommunisere og overtyde andre om at si tolking er den korrekte. Denne tolkinga av bevis si kommuniserande rolle skil seg i noko grad frå Reid og Knipping (2010) sin definisjon. Reid og Knipping (2010) ser den kommuniserande rolla i større grad som det å formidle nye matematiske funn. Variasjonen i desse to oppfatningane av bevis si kommuniserande rolle tenkjer eg heng saman med skilnaden på elevar og matematikarar. Elevar har ikkje same grunnlaget som ein erfaren matematikar til å oppdage nye resultat som dei med sikkerhet kan formidle vidare til andre gjennom eit bevis. Den kommuniserande rolla kan likevel vere gjeldande i undervisingssamanheng av den grunn at elevane må argumentere for si tolking av eit teorem, ein formel eller ei løysing på ei oppgåve, for så å overtyde andre om at den er den korrekte. Dei kommuniserer ikkje her eit nytt matematisk funn, men dei kommuniserer si tolking av matematiske utsegner og prøver å overtyde andre elevar om at denne er korrekt.

Funna i mi studie impliserte at bevis si kommuniserande rolle var framtredande både av den grunn at det kommuniserte tidlegare matematiske funn til elevane, i tillegg til at det var ein måte for elevane å kommunisere si tolking av matematiske utsegn. Lærarane i studien peika på korleis bevis set lyskastaren på matematiske idear og argument, korleis byggesteinane i matematikken vert formidla til elevane gjennom bevisa og korleis den kunnskapen og dei prosedyrane elevane tidlegare har nytta vert grunngjeve. Dette referer etter mi meining til Reid og Knipping (2010) sin definisjon av bevis si kommuniserande rolle; at bevis formidlar matematiske funn. Lærarane omtalar vidare potensialet av samarbeid i arbeid med bevis og korleis elevar gjennom dette får moglegheita til å setje ord på si løysing av ei oppgåve i samhandling med andre. Dei får her argumentere for si tolking kvifor dette må vere riktig, samt at dei får høyre andre si tolking og argumentasjon. Bevisa vert her til gjennom sosial interaksjon, som er akkurat det lærarane i Knuth (2002b) hevdar.

Systematisering som ei av bevis sine roller i matematikken vert av Reid og Knipping (2010) definert til å vere organisering av aksiom, teorem og omgrep. Denne rolla finn ein ikkje direkte igjen i mi studie, men i Knuth (2002b) si studie vart denne rolla diskutert i samanheng med den utforskande rolla. Det kom her fram at bevisa sin eigenskap som byggesteinar i matematikken gjer til at desse er sentrale i utviklinga av ny kunnskap hjå elevane. Og at den systematiserande rolla her kjem fram i den forstand at bevisa er sentral i utviklinga av kunnskap og at denne kunnskapen vert ein del av eit større kunnskapssystem. Matematikk er som dei seier som eit byggverk og bevisa er byggesteinane. Alt i matematikken er bygd på det som tidlegare er bevist. Dersom ein kjem borti noko ein ikkje veit, kan ein gå tilbake til noko ein veit, og ut frå dette prøve å forstå det ein ikkje kunne. Her vil ein då sjå at dette logisk følgjer frå tidlegare kunnskap. Dette er også noko Håkon impliserer bevisa kan bidra med. Som han seier vert du i arbeid med bevis tvungen til å sjå samanhengane i matematikken, du må her bruke din allereie eksisterande kunnskap til å forstå bevisa. Du kan då setje saman det du lærer no med det du kunne frå før – du har bygd på ditt eige kunnskapssystem. Dette er også årsaka til at han hevdar arbeid med bevis fremjar djupnelæring, noko eg kjem tilbake til i delkapittel 5.1.3.

5.1.2 Korleis implementerer lærarar bevis i si undervising?

Lærarane i studien hadde alle fleire ulike måtar å inkludere bevis i si undervising, og fleire tankar om korleis ulik bruk av bevis påverka elevar si læring. I dette delkapittelet vil fleire av desse verte diskutert i lys av teori og tidlegare forsking.

I bruk av formelle bevis i undervising har Håkon utarbeidd ei slags prosedyre, ei steg ein, to, tre, for å føre eit formelt deduktivt bevis. Denne prosedyren vert av Håkon sett på som ein god innfallsport til arbeid med formelle bevis. Han hevdar dette er ein metode for å få med alle elevane; dei har noko handfast å støtte seg på og bevisføringa vil då kunne verte mindre abstrakt. Det å lære elevar ei prosedyre eller ein metode for å føre bevis kan diskuterast å leie til ei instrumentell forståing; ein får ei prosedyre som kan puggast slik at ein forstå korleis ein skal føre eit bevis, men ikkje nødvendigvis kvifor. Men som Skemp (1976) hevdar kan det å undervise elevar til å utvikle instrumentell forståing også ha fordelar. Instrumentell eller prosedyrisk matematikk er ofte enklare å forstå. Dersom ein ynskjer er ei side med riktige svar vil instrumentell matematikk kunne oppfylle dette rask og enkelt. Vidare peikar han på at ein ikkje må undervurdere motivasjonen elevane kan kjenne på ved nettopp det å få ei heil side med korrekte svar. Kjensla av suksess vil kunne påverke elevane si faglege sjølvtillit; dei føler her at dei meistrar noko og kan av dette verte motiverte til vidare læring. Dette var også noko av det Håkon peika på når han grunna kvifor dette var noko han valte å nytte i si undervising: ”*Bevis er ganske krevjande og vanskeleg, og innfallsporten til alt eigentleg er fyrst ei prosedyrisk gjennomgang berre for å få til ting og så er det refleksjon rundt det. Det er difor eg tok den her prosedyriske step by step, det liksom ei slags hjelp til dei som slit mest med bevis og sånn, og så er det da å bruke litt tid på refleksjon og sånn etterpå for å vite kvifor ein gjer dei her ulike stega og på kva måte ein kan gjere det da”.* Gjennom ein slik innfallsvinkel til den abstrakte bevisføringa vil ein kunne få fleire elevar med seg, her har dei noko å støtte seg på og noko som kan hjelpe dei i gang med prosessen om å føre eit formelt deduktivt bevis. Dette er noko Håkon hevdar å nytte spesielt med tanke på elevane som ligg på låg måloppnåing og som utan denne prosedyren kanskje ikkje hadde prøvd seg på å føre eit bevis i det heile. Det hadde då vorte noko dei følte dei ikkje meistra og deira kjensle av at ”eg kan ikkje matematikk” kunne ha vorte forsterka. Det er her eg tenkjer Håkon sin instrumentelle prosedyre passar inn med Skemp sitt utsegn. Denne måten å arbeide vil i fyrste omgang gje elevar ei instrumentell forståing, men i nokre tilfelle er dette positivt. Det påverkar elevar sin motivasjon og faglege sjølvtillit då dei gjennom ei prosedyre kan få nokre riktige svar ned på papiret i staden for å svare blankt og kjenne på ei kjensle av at dei ikkje forstår eller meistrar. Motivasjon er nemnt av alle lærarane som ein sentral faktor i undervising; det er motivasjon som er drivkrafta bak alle læringsprosessar. Det å motivere elevar til å arbeide med bevis er difor sentralt, og noko som lærarane i studien ser på som ei av dei største utfordringane i arbeidet med bevis. Det å då arbeide på denne måten, der elevar kan få ei meistrinskjensle og auke elevane sin motivasjon og faglege sjølvtillit, vil kunne vere positivt.

Vidare hevdar Håkon det er etter at prosedyren er internalisert hjå eleven og dei har oppnådd ei instrumentell forståing ein kan arbeide vidare med problemet. Fyrst då kan elevane oppnå ei djupare og meir relasjonell forståing. Det er då ein kan byrje å reflektere og svare på spørsmålet om *kvifor*. No vil eleven ha noko å støtte seg på i sine refleksjonar og argumentasjonar, dei kan svare på kvifor ein samanheng stemmer med å sjå på arbeidet dei allereie har gjort framfor å svare direkte på kvifor utan å ha noko handfast å støtte seg på. Dette er ein arbeidsmåte Håkon hevdar kan føre elevar frå lav måloppnåing til høg måloppnåing ved at ein her fyrst forstår korleis ved å støtte seg på den gitte prosedyren, for så å arbeide vidare med dette, diskutere og reflektere, og då kunne svare på spørsmålet om *kvifor.* Dette kan, for å nytte Ola sin metafor, vere ein metode for å gjere elevane til konditorar framfor kakebakarar. Her kan dei forstå oppskrifta fyrst ved å følgje prosedyren, og i diskusjonen i etterkant kan denne prosedyren og spørsmålet om *kvifor* ein gjer alle dei gitte stege verte forstått. Det er her elevane kan verte konditorar, få auka fagleg sjølvtillit og kanskje bli motiverte for vidare læring.

Arbeidet med formelle bevis i undervising er ikkje berre for at elevane skal klare å føre eit deduktivt bevis, det handlar også om å eksponere elevane for bevisidear og teknikkar. Det er ein måte for elevane å bli kjent med dei matematiske bevisa og det som er grunnsteinane i formalane og prosedyrane dei brukar elles i matematikken. Det er dette Ola hevdar er «*vegen til å forstå matematikk».* Dette kjem også fram i Dickerson og Doerr (2012) si studie. Ei av to hovudfunn i her er at bevis kan bidra til å utvikle matematisk forståing, og at arbeid med bevis gjev elevane ei djupare innsikt i matematikken sitt innhald vert her nemnt som eit sentralt element. Ved å nytte bevis i undervisinga vil ein kunne eksponere elevane for den underliggande resonneringa, og det viser elevane kor all matematikken kjem frå (Dickerson & Doerr, 2012). Det gjev innsikt i matematikken sin eigenart og eksponerer elevar for den matematiske argumentasjonen og resonneringa som ligg bak alle formlane, teorema og prosedyrane dei har nytta gjennom heile sin skulegang. Bruken av bevis er ikkje for å vise elevane at alt dette stemmer, det trur dei jo på, men det er å vise elevane *kvifor* det stemmer. Det er difor bevis vert nytta i undervisinga, for å forklare elevane kvifor. På denne måten vert formlane, teorema og prosedyrane noko dei ikkje lengre berre brukar, men dei forstå kvifor dei brukar dei, samt kva som ligg bak. Slik som ein lærar i Dickerson og Doerr (2012) si studie hevdar: *"It helps their thought processes [...] it helps them think logically. You can´t just shake the bag and everything falls out nice and neat, you kvow, you got to put the pieces together"* (s. 719). Det er her bevisa som er med på å fremje elevar si forståing, elevane får her innsikt i alle delane i matematikken og korleis dei små delane til saman utgjer ei heilskap.

Manin (1992, referert i Hanna, 2002) har ein metafor for bruk av bevis i matematikk: han ser på teorem, aksiom og definsjonar som områder i landskapet og bevis som vegane mellom.

Denne metaforen snakkar i følgje Hanna (2000) direkte til matematikkundervising. Bevis er viktige for å kunne avgjere om eit utsegn er sant eller ikkje, men det er fyrst og fremst når læraren formidlar bevis på ein måte som kan leie til forståing av matematikken sine mange abstrake teorem at bevisa verkeleg får fram sitt potensiale. Det er med andre ord når bevis sine «sightseeing» eigenskapar kjem fram i undervisinga at bevis kan fasilitere læring og forståing. Når bevis blir brukt ikkje berre til å vise *at* noko stemmer, men også til å vise *kvifor* det stemmer. Det er dette eg tenkjer Truls impliserer med sitt utsegn om argumentasjonen i bevisa, at det er den som sentral og at du som lærar må utfordre elevane her; du må utfordra elevane på spørsmålet om *kvifor: "kvifor er det riktig?" "kvifor har du lov til det?" og "kvifor er det okei?".* Det er her bevisa sitt læringspotensial ligg. Gjennom prosessen å argumentere for kvifor det må vere riktig vil elevar kunne få innsikt i dei underliggande relasjonane og samanhengane i matematikken; ein må bruke det ein tidlegare har lært til og argumentere for kvifor det matematiske beviset er som det er. Det ligg her ei læringsutvikling, elevane vil kunne sjå samanhengen mellom stega i det som tidlegare var ein instrumentell prosess og gjennom dette byggje vidare på sitt eige kunnskapssystem. At elevar har stort utbytte av å arbeide med matematisk argumentasjon er også noko ein ser igjen i teorien. Hanna (2014) er ein av dei som peikar på argumentasjon og at dette er noko som til stadighet får større plass i undervisingssamanheng då dette er noko forsking viser elevar har stort utbytte av. Duval (1999, referert i Reid & Knipping, 2010) peikar vidare på argumentasjon sitt naturlege språk og korleis dette opnar for diskusjon og samhandling mellom elevar som årsaka til det auka fokuset på argumentasjon i undervising.

Som bidragsgivande for å kunne diskutere argumentasjonen i matematiske bevis peikar Truls på bruk av visuelle representasjonar og forklaringar. Dette bringer oss vidare på akseptable bevis og bruken av desse i undervisingssamanheng. Det som skil akseptable bevis frå formelle bevis er at desse i større grad opnar opp for bruk av visuelle representasjonar og forklaringar i bevisføringa (Hanna, 1990). Dette er element som lærarane i studien peika på som essensielle i undervisingssamanheng, det gjer til at bevisa vert meir tilgjengeleg for elevane. Ved hjelp av visuelle representasjonar og forklaringar kan elevane få fleire innfallsvinklar; dei kan her sjå beviset i fleire samanhengar enn den reint formelle tilnærminga. Elevane vil då lettare kunne forstå beviset og gjennom dette utvikle ei forståing av matematikken. Dette er noko Hanna (2000) og Knuth (2002a) også poengterer. Ved bruk av visuelle representasjonar og forklaringar kjem spørsmålet om *kvifor* tydelegare fram. Bevis som inkluderer dette vil då i større grad fasilitere forståing og vere meir eigna i undervisingssamanheng. Lærarane i studien peikar vidare på korleis bruk av visuelle representasjonar i undervising bidreg til diskusjon og gjev elevar fleire moglegheiter til å utforske. Innan geometrien kan ein til dømes nytte dynamiske programvarer til å visualisere. Elevar kan dra, strekke og flytte på figurar. Dei får moglegheita til å utforske geometriske konstruksjonar og kan diskutere samanhengane mellom det desse viser dei og argumentasjonen i den analytiske tilnærminga. Det vert eit verktøy som kan hjelpe elevane til å forstå argumentasjonen i beviset. Vidare vart visuelle representasjonar av lærarane i studien hevda å konkretisere det abstrakte beviset. Det vart meir tilgjengeleg for elevane og noko dei enklare kunne forstå enn om dei berre hadde ei rein analytisk framstilling å forhalde seg til. Som Ola seier gjer visuelle representasjonar til at det ”spirer”. Den abstrakte matematikken vert meir tilgjengeleg for elevane, dei får eit bilete av kva det matematiske beviset fortel dei og vil kunne gjere at dei i større grad forstår, for som han vidare seier: *”det er fyrst når ein forklarar matematikken i bilete at dei ser”.* Dette tenkjer eg impliserer at visuelle representasjonar og forklaringar i arbeid med bevis sentrale element som leiar til forståing av matematikken.

Framvekst av dynamiske programvarer og visuelle representasjonar si biletlege framstilling er også ei av årsakene til at fleire lærarar i mi studie hevdar geometriske bevis er den typen bevis elevane burde møte fyrst i undervising. Dette vert sett på som sentralt og ein god inngangssport til det å introdusere elevar for bevis i matematikken. I arbeid med geometriske bevis oppstår det ei spenning mellom det visuelle og det formelle; ein har det visuelle med geometriske figurar og konstruksjonar, og det formelle med bevis og bevisføring. Det er denne spenninga som gjer til at geometriske bevis er ein fin inngangsport til bevis for elevar. Geometriske figurar og vinklar er noko elevane er kjente med, og det er noko dei har arbeida med i lang tid. Det å då til dømes skulle forklare samanhengen mellom geometriske figurar eller å utføre eit geometrisk bevis vil vere å arbeide vidare med noko elevane allereie er kjent med og som dei ser, i staden for at dei skal prøve å bevise noko abstrakt og ukjent. Elevane kan i denne prosessen også nytte dynamiske programvarer til å utforske. Dynamiske programvarer er, som Hanna (2000) peikar på, eit hjelpemiddel som ikkje direkte beviser, men som opnar opp for fleire moglegheiter til å utforske og oppdage nye matematiske samanhengar og eigenskapar. Ved hjelp av dynamiske programvarer kan elevar utføre geometriske konstruksjonar med høg grad av nøyaktighet og vidare utforske konstruksjonane sine eigenskapar. Dei kan her dra, strekkje og flytte på konstruksjonen, slik at eigenskapane kjem tydeleg fram og elevane kan få eit bilete av kva beviset eigentleg fortel dei utover den analytiske framstillinga på papiret.

At visuelle representasjonar og forklaringar i arbeid med bevis som læringsfremjande, ser ein også igjen i tidligare forsking. Dei erfarne lærarane i Dickerson og Doerr (2012) si studie hevda bevis som inkluderer forklaringar og visuelle representasjonar har større læringspotensiale, noko som også vart støtta av lærebokforfattarane i Óskardóttir (2016) si studie. Dei hevdar formelle bevis med si rigorøse og deduktive framstilling kan forstyrre elevar si læring, og at dei difor vel å ha med visuelle representasjonar, forklaringar og dømer for å konkretisere teorema dei beviser i sine lærebøker. Denne framstillinga, og særleg konkretiseringa ved dømer, vert derimot sett på som lineær og lite læringsfremjande av lærarane i denne studien. Her vert læreboka og den måten bevis er lagt opp til her sett på som ei utfordring. Lærarane hevdar denne framstillinga er med på å gjere bevisa til ein liten del heilt i randen av pensum som elevane då konsentrerer seg lite om og som dei ser på som lite nyttig i læringsprosessen. Alt dei treng står jo tidlegare, her har dei teoremet og nokre eksempel på korleis dei skal bruke det. Då klarar dei oppgåvene på prøven og får ein god karakter, men er ikkje matematikken meir enn det? Som Truls hevdar: *"kva vil dei seie å lære matematikk? Det å resonnere saman og det å byggja matematikk, tenkje gjennom logiske slutningar, det er jo.. må jo vera ein veldig viktig del av det å lære seg matematikk. Når du gjer eit bevis så står ikkje det ved sidan av den andre matematikken du gjer, men det er jo den same typen resonnement [...]. Eg tenkjer det er meir verdifull læring enn bare å kopiere oppgåver."* Korleis lærebøker og andre ytre faktorar kan vere avgrensande i undervising av bevis og alle moglegheitene som ligg i dette kjem eg tilbake til i delkapittel 5.1.3.

Balacheff (1988) peikar på generiske eksempel som ein type pragmatiske bevis. Generiske eksempel er ein type bevis der ein i bevisføringa nyttar ei hending eller eit spesifikt tilfelle for så å generalisere og la dette stå for alle tilfelle i eit generelt argument. Dette var noko Truls i stor grad nytta i si undervising. Han gav elevane ei oppgåve eller eit eksempel med tal, noko som er kjent for elevane og som dei har gjort mange gangar før for så å generalisere. Dette var noko han hevda kunne vere med å forenkle arbeidet med bevis og gjere det meir tilgjengeleg for elevane; som han seier «*om me fyrst har gjort det med eit eksempel, så kjem beviset etterpå som på ein måte forenkle fortsetjinga*». Når ein her gjer eit eksempel med tal og får forståing av korleis ein kan løyse ei slik oppgåve for deretter å gjere det generelt, vil elevane kunne sjå at dette ikkje gjelder berre for det eine dømet, men at det faktisk er noko ein kan gjere i alle samanhengar der ein har føresetnader som var til stades i den oppgåva.

I arbeidet med det generiske eksempelet under observasjon nytta Truls diskusjon blant elevane. Elevane fekk diskutere og reflektere saman før dei tok det heile i plenum, noko Truls seinare hevda var noko han såg på som læringsfremjande. Som han seier *"du skjønnar ikkje om du har gjort ting skikkelig før du skal byrje å forklare det til andre".* Det å samarbeide og kommunisere er også noko som står sentralt i deltakingsperspektivet i det sosialkonstruktivistiske læringsperspektivet. Det er i samhandling med andre elevane får diskutere og setje ord på sine eigne refleksjonar og tankar, dei får drøfta sin eigen tankegang og gjennom dette kunne utvikle si eiga forståing. Gruppearbeid vert av same årsak nemnt som ein god arbeidsmåte av Håkon. Her får elevane diskutere, forklare si løysing av eit problem og kvifor dei tenkjer dette kan vere ei mogleg løysing til andre. Vidare får dei også høyre andre si løysing og diskutere korleis denne samanfattar med deira eiga; kanskje har begge moglege løysingar, eller kanskje har nokre av elevane argumentert på ein måte som ikkje held? I denne prosessen er også resonnering sentralt. Resonnering omhandlar som nemnt det «å tenkje over» eller «å slutte seg til», og det er akkurat det elevane gjer når dei her skal diskutere med andre. Dei resonnerer fyrst åleine for å verte einig med seg sjølv kva dei tenkjer det matematiske beviset eller problemet fortel dei, for så å drøfte dette saman med andre. Dette er noko lærarane poengterer bevis kan bidra med, og noko ein frå teorien ser er ein sentral faktor for å utvikle sin matematiske kompetanse. Resonneringskompetanse er ein av åtte kompetansar i Niss og Højgaard Jensen (2002) sin modell for matematisk kompetanse. Det å nytte diskusjon og samarbeid i undervising av bevis tenkjer eg då kan fasilitere forståing av matematikk samstundes som det då er med på å auke elevane sin matematiske kompetanse.

5.1.3 Kva moglegheiter og utfordringar ser lærar i arbeid med bevis i undervising

Tidlegare forsking peikar på at bevis i undervising har fleire positive sider; at dette er noko som kan fasilitere forståing, gjere elevar meir medviten sin eigen tankegang og at det har ein overføringsverdi. Dette er også noko som kjem fram i mi studie, samstundes som det her kjem fram fleire utfordringar knytt til bruk av bevis i undervising. Bevis er noko fleire elevar tykkjer er vanskeleg, det å motivere elevar til å arbeide med bevis kan difor vere ei utfordring, vanskegraden til bevis gjer også det faglege skiljet i ein klasse til ei utfordring. Vidare har ein som lærar fleire ytre faktorar å ta omsyn til, ein skal gjennom si undervising førebu elevar på eksamen, ta omsyn til ein læreplan og ei lærebok, noko lærarane i studien hevdar kan by på utfordringar i undervising av bevis. Dette er alle sider ved bevis i undervisingssamanheng som vil verte diskutert i dette delkapittelet.

Lærarane i studien peika alle på matematisk forståing som ei av hovudårsakene til at dei implementerer bevis i si undervising. Bevisa set som Ola seier lyskastaren på matematiske idear og matematiske argument, det er dette som er sjølve byggesteinane i matematikken og matematiske bevis er av den grunn eit av springbretta til verkeleg matematisk forståing. Gjennom bevisa får elevane innsikt i den underliggande argumentasjonen og grunngjevinga bak alle formlar, teorem og matematiske setningar dei nyttar i matematikken. Utan bevis vert matematikken, som Truls peikar på, berre eit sett formlar, teorem og prosedyrar utan nokon samanheng og meining bak. Det er gjennom bevisa og argumentasjonen som ligg i desse elevane kan sjå samanhengen mellom matematikken sine mange sider, dei kan her lage seg sitt eige «kognitive kart» over dei ulike matematiske teorema, formlane og prosedyrane. Det er dette Skemp (1976) poengterer er det essensielle i ei relasjonell forståing, at elevane her kan utvikle ei forståing av matematikken og nytte sin matematiske kompetanse til å orientere seg i det matematiske landskapet, framfor å gå seg vill kvar gong dei treff på eit problem dei tidlegare ikkje har sett. Det er også dette lærarane i Dickerson og Doerr (2012) legg som grunnlag for kvifor matematiske bevis kan fasilitere forståing av matematikken. Dei hevdar bevisa gjev innsikt i matematikken sitt innhald og derav kan verte nytta til å forklare matematikk og gje elevar innsikt i den underliggande resonneringa. Elevane kan då gjennom arbeid med bevis utvikle ei forståing av matematikken sine mange sider og i større grad kunne nytte seg av sin matematiske kunnskap. Dette ser ein igjen også hjå Hanna (2000) og Knuth (2002a). Dei hevdar begge matematiske bevis kan fasilitere forståing dersom det vert nytta på riktig måte. Det er spørsmålet om *kvifor* bevisa burde svare på i undervisingssamanheng; ein må nytte bevisa til å forklare og grunngje matematikken sine mange abstrakte teorem og utsegner, og gjennom dette også gje elevane innsikt i dei matematiske samanhengane. Det er fyrst då bevisa sitt læringspotensiale kjem fram og bevisa kan fasilitere forståing.

Metakognitiv tenking såg Håkon på som ei av dei viktigaste rollene til bevis i undervisningssamanheng. Gjennom å nytte bevis kunne ein utvikle det Håkon kallar ein ”metakognitiv elev”; ein elev som er medvit korleis ein lærer, korleis ein arbeider og korleis ein løyser problem. Med andre ord ein elev som er medvit sin eigen tankegang, som ein frå teorien ser passar inn i definisjonen av metakognisjon (Furnes & Norman, 2013; Nosrati & Wæge, 2015). Håkon såg på bevis som sentralt av den grunn at bevis utfordrar den instrumentelle forståinga; bevis utfordrar elevar til å tenkje, ein må her inn med ein fleksibilitet og sjå problema i eit vidare perspektiv. Ein får ikkje lenger ein formel eller ein prosedyre ein må putte tal inn i, ein må i større grad inn i formelen og argumentasjonsrekka som ligg bak. Elevane må her tenkje og sjå dei større samanhengane i faget; korleis kan eg nytte min kunnskap til å løyse det problemet er no står ovanfor. Gjennom dette hevdar Håkon elevane vert meir medvit sin eigen kunnskap og korleis ein kan nytte denne til å løyse problem – elevane vert her meir medvit sin eigen tankegang. Vidare vart bevis og den måten ein gjennom arbeid med bevis vert introdusert for argumentasjonsrekkjer og grunngivingar for matematiske utsegn av Håkon hevda å fremje kritisk tenking. Gjennom arbeid med bevis og då spesielt argumentasjonen i desse vil elevane i følgje Håkon kan ein utvikle ei evne til å tenkje kritisk og få ei forståing for prosessar i samfunnet. Elevane kan då lettare kunne overføre sine kunnskapar i matematikk til andre sider i samfunnet og kunne utvikle seg til å bli kritiske medborgarar i eit demokratisk samfunn. At bevis bidreg til kritisk- og metakognitv tenking var også eit av hovudfunna i Dickerson og Doerr (2012) si studie. Lærarane i denne studien hevda elevane gjennom arbeid med bevis kunne utvikle ei evne til å tenkje kritisk og verte meir medviten sin eigen tankegang. Noko som då gjorde til at elevane lettare kunne overføre kunnskapane sine frå matematikken til andre sider i samfunnet. Her ser ein Håkon sine utsegner stemmer overeins med funna i studien til Dickerson og Doerr (2012). At ein gjennom arbeid med bevis kan utvikle ei forståing for argumentasjonsrekka som ligg bak alle formlane og prosedyrane ein nyttar, gjer at ein kan utvikle ei relasjonell forståing. Då kan ein i større grad nytte den matematiske kunnskapen og kompetansen ein har utvikla på andre område enn matematikken. Om ein nyttar Smestad (2015) sin metafor for matematikk i samfunnet, kan elevane etter å ha arbeida med bevis utvikle ei forståing av matematikken, og gjennom dette då kunne nytte denne slik som ein håndverkar nyttar verktøya i verktøykassen sin framfor å nytte matematikken slik ein ville skrudd saman ein møbel ved hjelp av ein IKEA manual. Ein kan gjennom arbeid med bevis verte meir medvit korleis ein tenkjer, gjere kunnskapen til sin eigen og då kunne overføre denne til andre sider av samfunnet.

Djupnelæring har som nemnt tidlegare fått større plass i skulen etter at Ludviksenutvalet lanserte sin rapport i 2014. Det er ganske nytt og av den grunn er det lite forsking som seier noko om bevis si verknad på djupnelæring, men dette er noko Håkon peikar på som ei av moglegheitene med å implementere bevis i undervising. Han hevdar arbeid med bevis er *«ein inngangsport til djupnelæring»*. Dette grunnar han i at ein i arbeid med bevis vert tvungne til å sjå større samanhengar i faget, ein må tenkje meir rundt problemet og dra inn kunnskapar ein har frå tidlegare. Ludviksenutvalget (NOU 2014:7) hevdar djupnelæring handlar om å utvikle ei forståing av omgrep og samanhengar innan eit område, og om å kunne reflektere over eiga læring for å kunne konstruere ei heilskapleg forståing. I mine auger er det ein korrelasjon mellom definisjonen av djupnelæring og tidligare forsking kring bevis i undervising. Tidligare forsking kring bevis, og også funna i denne studien, tyder på at elevane gjennom arbeid med bevis kan utvikle ei forståing av matematikken. Elevane vert i arbeid med bevis kjend med argumentasjonen bak teorem og formlar, og dei må nytte sin tidligare kunnskap når dei no skal prøve å forstå denne. Dei må sjå samanhengen mellom det dei har lært tidligare og det dei no arbeider med, og gjennom dette kan elevane få ei heilskapleg forståing av faget. I tillegg kjem det fram at arbeid med bevis kan fremje metakognitiv tenking; elevane vil gjennom arbeid med bevis verte meir medvit sin eigen kunnskap, korleis dei kan bruke denne og korleis dei lærer. Definisjonen av djupnelæring stemmer også overeins med Håkon si grunngjeving av bevis sitt bidrag til djupnelæring; at elevar i arbeid med bevis vert tvungne til å sjå samanhengar i faget og derav vil kunne bidra til djupnelæring. Dette tenkjer eg då impliserer at bevis kan spele ei rolle for djupnelæring og at dette då er ei av hensiktene med å implementere bevis i si undervising.

Det er også knytt mange utfordringar til det å arbeide med matematiske bevis. I si studie av lærebøker og korleis lærebokforfattarane bruker bevis i lærebøkene peikar Óskardóttir (2016) på fleire utfordringar. Ei av utfordringane som kjem fram her er at lærebøkene skal treffe mange; det skal appellere til elevar, lærarar, læreplan og andre lesarar. Det å ha fleire faktorar å forhalde seg til kjem også fram som ei utfordring av fleire av lærarane i denne studien. Her er det læreplan og vurdering som kjem fram som dei største utfrodringane når det gjeld ytre innverkande aspekt. Vurdering er noko mange elevar bryr seg om, karakterane dei får på prøvar og eksamenar skal dei nytte for å søke seg inn på høgare utdanning. Mange elevar er difor fokuserte på å få gode karakterar, då ikkje nødvendigvis for å vise at dei forstår matematikk, men fordi dei ynskjer å få best mogleg karaktersnitt. Dette er noko alle lærarane i studien peikar på, som Truls seier er det eit spørsmål han får ofte i arbeid med bevis: *"får me dette på prøven, eller kan me berre gløyme det?".* Dette tenkjer eg poengterer det ovannemnde; at mange elevar er fokuserte på vurdering og på å få best mogleg resultat framfor korleis dei kan utvikle ei forståing for matematikken. Dette vil då vere ei utfordring i arbeid med bevis i undervisinga. Bevis er ikkje noko elevane blir vurdert i, det er i liten grad noko som blir testa på eksamen og det er også noko lærarane hevdar dei i liten grad testar på prøvar. Bevis er noko dei inkluderer i matematikkundervisinga for å fremje forståing for matematiske samanhengar og kunnskap. Det vil difor vere noko som hjelper elevar med å løyse problem dei får på prøvar og eksamenar framfor noko som direkte vert testa. Dette bringer oss vidare på motivasjon, som alle lærarane i studien peika på som ei utfordring. Det å motivere elevar til å arbeide med bevis kan vere vanskeleg. Bevis med si ofte abstrakte tilnærming er krevjande, og med den manglande vurderinga er det heller ingen ytre faktor som kan motivere elevar til å arbeide med bevis. Ein må difor prøve å gjere bevis spennande, interessant og til noko elevane ser nytteverdien av; ein må prøve å skape eit emosjonelt engasjement hjå elevane. Noko lærarane i studien hevda var utfordrande. I denne samanheng peika lærarane vidare på fleire moglege arbeidsmåtar i arbeid med bevis som kunne auke elevar sin motivasjon. Her kom det blant anna fram det å nytte samarbeid og prøve å introdusere elevar for bevis gjennom generiske eksempel, noko som er diskutert i delkapittel 5.1.2.

Bevis er i liten grad nemnt i læreplanen og difor ikkje ein stor del av pensum i realfagsmatematikken. Dette er noko lærarane ser på som ei utfordring, då den manglande prioriteringa av bevis i læreplanen gjer at dei føler dei har lita tid å bruke på akkurat dette. Manglande tid var det Håkon og Ola peika på som den største utfordringa i arbeid med bevis. Dei følte dei ikkje hadde tid til å prioritere bevis i undervisinga på ein måte som fremjar motivasjon og bidreg til forståing hjå elevane, til dette er bevis ein for liten del av læreplanen. Desse hevdar at ein som lærar konstant er pressa på tid. Det å då skulle få alle gjennom pensum og inkludere bevis på ein måte som ikkje overveldar elevane av algebra eller andre faktorar som kan hindre motivasjon er utfordrande. Samstundes har ein kanskje 30 ulike individ i klassen, som alle har eigne erfaringar, forståingar og kunnskapar som dei tek med seg inn i undervisinga. Og det då å skulle få alle gjennom pensum utan at noko fell av på vegen er vanskeleg, og då spesielt med bevis som mange ser på som krevjande. Ola samanliknar det å inkludere bevis i undervisinga med ein fjelltur til Ulriken, om ein klarar å få med alle elevane på dette er det ein heilt nydeleg utsikt på toppen. Ei ”utstikt” prega av matematisk forståing og innsikt i matematikken sin eigenart. Derimot skal ein helst vere på fjellet før klokka 11, og då enda det med at me tok gondolen og bevisa falt av i vegkanten.

Truls har derimot ei anna oppfatning av tid som ei utfordring. Han føler i likskap med Håkon og Truls på eit tidspress, men bevis er ikkje noko han ser på som ein tidstjuv frå å få elevane gjennom pensum og førebu dei til eksamen. Matematikk handlar om å løyse problem og då må ein kjenne til ein del metodar for å løyse desse problema, men bevis og bevisføring er som han hevdar også ei form for problemløysing. Det handlar om å gjere slutningar og klare å sjå kva som er dei rette slutningane og matematiske argumenta for at ein skal kunne kome frå ein startstad til ein sluttstad. Difor hevdar han bevis eignar seg for det å lære matematikk og også det å lære seg korleis ein skal løyse matematiske problem. Dette tenkjer eg då kan implisere at spørsmålet om bevis er ein tidstjuv i undervisingssamanheng eller ikkje kjem heilt an på korleis ein vel å implementere bevisa, noko eg kjem tilbake til i delkapittel 6.1.

Både Truls og Håkon peika på lærarrolla som ein utfordring. Dei peikar her på autoriteten som ligg i lærarrolla og korleis elevar sit passive og ventar på beskjedar frå læraren, samt korleis elevar trur på alt læraren seier. Dei stiller ikkje spørsmål ved det læraren fortel, har han sagt det stemmer det. Då mistar ein litt av den nysgjerrigheten og utforskinga – kva om me hadde gjort slik, eller om det hadde stått dette i staden? Denne typen spørsmål får ein ikkje. Som Truls seier lever elevar ofte i ei slik ”*matematisk religiøs forståing, læraren har jo sagt det, det står i boka, så då er det jo sant”.* Det å stille spørsmål og diskutere den matematiske meininga bak prosedyrane og metodane elevar nyttar for å løyse matematiske problem vert av Hiebert og Gouws (2007) peika på som sentralt for å utvikle ei relasjonell forståing. Med elevane si haldning til læraren og den sin autoritet mistar ein litt av dette. Om elevane trur på alt læraren seier og alt som står i boka vil ein ikkje stille spørsmåla om kvifor og korleis, ein vil tru på alt og gjere akkurat som læraren seier. Dette er gjeldande også i arbeid med bevis, noko som kan gjere til at ein då mistar litt av det læringspotensialet som ligg i arbeid med bevis. Det vert ikkje lenger noko som kan hjelpe elevane til å sjå samanhengane i faget, men det blir enda ei prosedyre som elevane får servert på eit sølvfat og som dei berre trur på av den grunn at læraren sa det var sant. Det er difor sentralt at lærarane i implementering av bevis gjer at elevane må arbeide med den underliggande argumentasjonen, og kanskje streve litt. For som Hiebert og Grouwes (2007) vidare hevdar er det å la elevane streve og gjere ein innsats for å forstå matematikken sentralt for å fremje relasjonell forståing. Å implementere bevis på denne måten heng igjen saman med det Håkon peikar på som ei utfordring med lærarrolla: at elevane ofte vert passive, dei sit å ventar på at læraren skal fortelje dei akkurat kva dei skal gjere, dei engasjerer seg i liten grad i eigen læringsprosess. Det er derav enda viktigare at ein som lærar implementerer bevis på ein måte som gjer at elevar må streve litt. Dei må utfordrast til å stille spørsmål og undre, ikkje berre få problem og oppgåver der dei kan følgje ei oppskrift eller ein prosedyre og der eit enkelt svar frå læraren kan gjere at alt som trengst for å løyse problemet fell på plass. Ein må som Håkon seier vere litt som ein toppidrettscoach. Du må lære deg å lide litt for å oppnå resultat i form av matematisk forståing og kompetanse; ”*kjem du fram til løysinga utan å slite litt, da kunne du det frå før”,* og då har det ikkje skjedd noko læring. For å endre læraren si rolle i elevar sin læringsprosess kunne det vore ein ide å la elevar diskutere med kvarande i staden for å ha ein diskusjon leia av læraren. Her vil ikkje læraren si autoritet kome like tydeleg fram og elevar vil då kanskje stille kvarande spørsmåla; kva om? eller kvifor trur du at det er slik? Dei vil her kunne utforske og streve litt saman utan at læraren skal komme inn som ein autoritet som gjev leiande svar på spørsmål som kan hindre elevane i å tenkje sjølve. Dette var ei arbeidsform Håkon nytta seg av i si undervising. Han let elevane arbeide saman i arbeidet med bevisa. Dei kunne då diskutere og argumentere for kvar si forståing utan at læraren sin autoritet vart tydeleggjort gjennom noko anna enn klasseleiing. Dette opna opp for undring og refleksjon hjå elevane, og dei kunne lære i samspel med kvarandre. Noko som også er sentralt innan det sosial konstruktivistiske læringsperspektivet.

5.2 Metodologisk drøfting – svakheter og avgrensingar av studien

Talet intervjupersonar i kvalitative studiar vil variere med formålet for undersøkinga, men det er vanskeleg å vite kor mange som er nødvendig å ha med for å finne ut det du ynskjer (Kvale & Brinkmann, 2015. s. 148). I kvalitative intervjustudiar har talet intervjupersonar ein tendens til å vere enten for stort eller for lite. Er det for få intervjupersonar kan det verte vanskeleg å generalisere og er det for mange kan det vere vanskeleg å foreta ei djuptgåande analyse av intervjua (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 148). Talet på intervjupersonar vil vanlegvis variere frå 5-25, noko som varierer med type studie, tid og ressursar som er tilgjengeleg. I mi studie er det berre med tre lærarar noko eg tenkjer kan vere med å påverke resultata her negativt. Desse er basert på berre tre personar sine tankar og refleksjonar, og vil difor kunne gjere til at ein ikkje får det breie perspektivet og grunnlaget ein ynskjer. Om det var fleire lærarar med kunne ein enten ha fått meir haldbare resultat ved at det var fleire som hevda det same eller ei meir nyansert diskusjon om det her kom fram fleire refleksjonar og tankar. På grunnlag av studien sitt omfang vart dette derimot valt vekk. Dette på grunnlag av tidsomfang og eit ynskje om å i staden bruke meir tid på å førebu og analysere intervjua, noko som av Kvale og Brinkmann (2015) vart sett på som sentralt i intervjustudiar. Som dei seier ”det er generelt eit inntrykk frå nyare studiar at det er fordel å ha eit mindre tal intervjuar i undersøkinga og i staden bruke meir tid på å førebu og analysere intervjua” (s. 148). Med fleire deltakarar ville eg grunna studien sitt tidsomfang ikkje fått moglegheita til å utføre både observasjon og intervju. Ei slik metodetriangulering vert av Johannesen et al. (2010, 230) sett som eit sentralt element for å auke studien si truverdighet. Dette vart derfor prioritert framfor å ha med fleire deltakarar.

Observasjonen utført som ein del av datainnsamlinga vart ikkje transkribert, noko som også ville vore ein fordel. Nilssen (2012, s. 47) peikar på korleis ein gjennom transkriberingsprosessen vert godt kjent med datamaterialet. Det kjem gjerne opp tankar, idear og refleksjonar om kva datamateriale fortel, i tillegg til at viktige setningar vert lett synlege og konteksten godt kjent. Ved å transkribere videofilene kunne fleire aspekt ved dei observerte timane vorte oppdaga og eg kunne fått større utbytte av denne delen. Dette er igjen noko som tek lang tid og vart difor ikkje prioritert innan den korte tidsramma for studien. Vidare vart det her berre observert ein time av kvar lærar, noko eg heller ikkje tenkjer er ideelt. Her ville eg fått større utbytte om eg hadde observert fleire timar, gjerne fulgt ein lærar over ein periode for å få større innblikk i korleis dei ulike lærarane implementerer bevis i si undervising.

Det å lese teori og tidlegare forsking vert av Cohen et al. (2011, s. 415) sett som ein sentral del av å førebu ei kvalitativ studie. Spørsmåla i intervjuguiden vil utgjere grunnlaget for det som vert datamaterialet. Det er derfor viktig at spørsmåla her reflekterer tilbake på studien sitt tema, og for å kunne oppnå dette er eit godt teorigrunnlag viktig. Eit godt teorigrunnlag er også viktig for å stille dei riktige oppfølgingsspørsmåla (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 99) Kvaliteten av eit forskingsintervju vil avhenge av kvaliteten på intervjuar sine kunnskapar og ferdigheter om temaet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 99). Det vart derfor lest teori og tidligare forsking kring temaet bevis i forkant av å utarbeide intervjuguide og gjennomføre intervju. Det vart her gjort ei tidsvurdering og denne prosessen vart avslutta når eg følte mitt teoretiske grunnlag var godt nok til å utforme intervjuguide og gjennomføre intervju på ein tilstrekkeleg måte. Om eg hadde brukt meir tid på dette kunne spørsmåla i intervjuguide og oppfølgingsspørsmål vore betre, noko som kunne gjort datamateriale og derav også studien sin kvalitet betre.

Kapittel 6: Avslutning

6.1 Oppsummerande konklusjonar og implikasjonar for undervising

Utgangspunktet for studien var å sjå nærare på lærarar sine tankar og refleksjonar kring bruk av bevis i matematikkundervising. Noko som leia til problemstillinga: *«Kva didaktiske refleksjonar gjer lærarar seg kring bruk av bevis i matematikkundervisinga?»*

For å svare på problemstillinga vart det vidare utarbeidd tre forskingsspørsmål:

1) Kva roller ser lærarar at bevis spelar i realfagsmatematikk?
2) Korleis implementerer lærarar bevis i si undervising?
3) Kva moglegheiter og utfordringar ser lærarar i å bruke arbeid med bevis for å legge til rette for at elevane kan utvikle matematikkforståing ?

I forkant av studien vart det lest teori som gav innsikt i det desse spørsmåla har til hensikt å svare på, i tillegg til tidligare forsking på temaet. Metode og analyse vart også bestemt og utført med desse spørsmåla som utgangspunkt.

Gjennom studien kjem det fram at lærarar har fleire tankar kring kva som er bevis si sentrale rolle i undervising. Bevis vert sett som sentralt ved at det kommuniserer tidlegare matematiske funn til elevane og gjev dei intellektuell stamina, i tillegg vert bevis sett som ein inngangsport til utforsking i undervisinga. Bevis kan med andre ord ha fleire roller i undervising, men ein ting står fram som hovudfunn; det er bevis si forklarande rolle som er den primære. Bevis si fundamentale rolle i undervising er å gje elevane innsikt i den underliggande argumentasjonen i matematiske bevis og forklare *kvifor* eit matematisk utsegn stemmer. Ein må som lærar formidle bevis på ein måte der det er dette spørsmålet som er i fokus. Gjennom bevisa må ein forsøke å formidle dei matematiske samanhengane og gje elevar ei forståing av matematikken sine abstrakte aksiom, teorem og definisjonar. Det er fyrst då bevisa får fram sitt fulle potensiale i undervisingssamanheng.

Kva er så den beste måten å gjere dette på? Korleis implementerer ein bevis i undervising slik at det fulle potensialet kjem fram? Til desse spørsmåla hadde lærarane fleire refleksjonar. Dei hadde alle elevane si læring i fokus når dei nytta bevis i si undervising. Dei ynskja å bruke bevis på ein måte som fremja forståing hjå elevane og som gjorde dei motiverte for vidare læring. I denne samanheng peika lærarane på bruk av visuelle representasjonar og forklaringar som læringsfremjande. Visuelle representasjonar og forklaringar vart hevda å gjere bevis meir tilgjengeleg for elevane. Dei fekk fleire innfallsvinklar til beviset og kunne enklare forstå kva beviset fortalte dei, som Ola seier *"det er fyrst når ein forklarar matematikken i bilete at dei ser".* Vidare må ein ikkje undervurdere elevane si kjensle av meistring og motivasjon. Lærarane i studien peika i den samanheng på viktigheten av å ha ein god inngang til arbeid med bevis. Elevane må kjenne på at dette er ei spennande utfordring som dei kan klare å meistre framfor noko abstrakt og vanskeleg. Geometri og geometriske bevis vart i denne samanheng sett som ein mogleg inngang. Innan geometrien får ein ei spenning mellom det abstrakte og det visuelle. Elevane får her eit bilete av kva beviset fortel dei, moglegheita til å utforske ved hjelp av dynamiske programvarer, i tillegg til at dei har ei analytisk framstilling av beviset. Det vert difor ei blanding av noko kjent og ukjent, noko lærarane peika på kan gjere bevis mindre avskrekkande.

I den samanheng at ein må introdusere elevar for bevis og bevisføring som ei spennande utfordring elevane føler dei kan meistre kom også generiske eksempel fram som ei god arbeidsform. I arbeid med generiske eksempel startar ein med noko elevar er kjende med, eit døme med tal. Her kan dei bruke sine kunnskapar til å løyse dette for så å gå over til det generelle. Ein får her same effekt som ved geometrien, at bevis ikkje vert noko abstrakt som vert kasta over elevane som noko ukjent og vanskeleg. Ein byrjar med noko elevane har kjennskap til, for så å gå over til det generelle. Det generelle argumentet vil vere noko elevane har utvikla sjølve; elevane har nytta sin eigen kunnskap til å utforske eit døme for så å ende opp med ein ny matematisk samanheng dei ser gjeld generelt – dei har her gjennom utforsking bygd vidare på sitt eige kunnskapssystem.

Ein siste arbeidsform som vert diskutert i studien er ei prosedyre som ein mogleg inngangsport til bevisføring. Ei slik prosedyrisk tilnærming er noko ein i utgangspunktet tenkjer kan leie til ei instrumentell forståing. Men; om ein jamfører Håkon sine refleksjonar kring prosedyren med Skemp (1926) sine utsegner om korleis instrumentell forståing også har fordeler, kan det argumenterast for at dette er ein god inngang til akkurat bevisføring. Bevisføring er noko ein frå tidligare forsking ser fleire elevar strevar med (Óskardóttir, 2016). Det å då introdusere elevane for dette gjennom ei prosedyre er noko Håkon hevdar kan få fleire elevar til å henge med. Det vert noko dei prøver å få til når dei no har prosedyren å støtte seg på, i staden for å melde seg ut. Elevane kan gjennom prosedyren verte kjende med det å produsere matematiske bevis og få ei kjensle av meistring, noko Skemp (1976) påpeikar ein ikkje skal undervurdere. Når prosedyren då er internalisert og elevane har fått ein instrumentell forståing for denne kan ein arbeide vidare med beviset. Elevane kan då ha noko handfast å støtte seg på når dei no skal reflektere kring spørsmålet om *kvifor,* og då kunne utvikle ei relasjonell forståing. Dette er av denne grunn ein inngang til bevisføring som gjennom studien kjem fram som ei moglegheit til å auke elevar si forståing av korleis føre eit formelt bevis.

Bevisa er ikkje implementert i undervising berre av den grunn at elevar skal produsere matematiske bevis. I studien kjem det fram at bevis vert inkludert i undervising også for gje elevar innsikt i matematikken sin eigenart og eksponere elevar for bevisidear og teknikkar Bevisa kommuniserer dei tidligare matematiske funna til elevane; gjennom bevisa vert elevane kjent med det som er grunnsteinane i matematikken og gjennom arbeid med desse kan elevane byggje vidare på sitt eige kunnskapssystem. I denne prosessen vert diskusjon og samarbeid peika på som sentrale element i undervisingssamanheng av lærarane i studien. Gjennom diskusjon med andre får elevar satt ord på sine eigne tankar og refleksjonar, dei får drøfte sin eigen tankegang og utvikle si forståing i samhandling med andre. Som Truls seier: *"du skjønnar ikkje om du har gjort ting skikkelig før du skal byrje å forklare det til andre".* Dette er også noko som er sentralt i det sosialkonstruktivistiske læringsperspektivet sin deltakings metafor, der ein ser på kunnskapsbygging som noko som springer frå det sosiale til det individuelle. Her er kommunikasjon og samhandling sett på som to særs sentrale faktorar for at elevar skal lære.

Kva moglegheiter og utfordringar bruk av bevis i undervising kan by på har også vore ein stor del av denne studien. Når det gjeld moglegheiter kom det fram to hovudfunn; at bevis i undervising er med på å fasilitere matematisk forståing hjå elevar og bevis fremjar kritisk- og metakognitiv tenking. Som bidragsgivande for å fasilitere matematisk forståing peika lærarane i studien her på korleis bevis gjev innsikt i matematikken sin eigenart, hjelper elevar å resonnere matematisk og gjev innsikt i den underliggande argumentasjonsrekka til matematiske utsegn. Gjennom å implementere bevis i undervising vert elevar kjende med det som er grunnsteinane i alle formlar og prosedyrar dei brukar elles i matematikken, og som Ola seier er det dette som er vegen for å forstå matematikk. I denne samanheng er det argumentasjonen i beviset som vert peika på som det sentrale. Det er gjennom argumentasjonen i beviset forklaringa av kvifor utsegnet er sant kjem fram, og det er gjennom denne elevane vert kjend med dei underliggande relasjonane mellom dei ulike sidene av matematikken. Elevane kan gjennom argumentasjonen sjå samanhengane mellom dei ulike formlane og algoritmane som dei kanskje tidlegare har hatt ei instrumentell forståing for, og då gjennom arbeid med argumentasjonen i bevisa utvikle ei relasjonell forståing. Matematikken vert gjennom arbeid med bevis eit heilskapleg fag, framfor eit fag med isolerte formlar og reglar. Noko ein frå det sosial konstruktivistiske læringsperspektivet ser er sentralt for å utvikle forståing.

Det andre hovudfunnet var at arbeid med bevis vil kunne fremje kritisk- og metakognitiv tenking. Gjennom å nytte bevis kan ein utvikle det Håkon kallar ein ”metakognitiv elev”; ein elev som er medvit korleis ein lærer, korleis ein arbeider og korleis ein løyser problem. Elevane kan då gjennom arbeid med bevis verte meir medviten korleis dei tenkjer og lettare kunne overføre sine kunnskapar frå matematikk til andre sider av samfunnet. Vidare kjem det fram at ein gjennom å arbeide med argumentasjonen i matematiske bevis vil kunne utvikle ei evne til å tenkje kritisk og få ei forståing for prosessar i samfunnet. Arbeid med bevis fremjar med andre ord kritisk- og metakognitiv tenking, og elevane kan gjennom arbeid med bevis overføre sine kunnskapar i matematikk til andre sider i samfunnet og utvikle seg til å bli kritiske medborgarar i eit demokratisk samfunn.

Eit tredje funn vart også gjort i denne studien; at bevis kan fremje djupnelæring. Djupnelæring har fått større plass i undervisingssamanheng etter at Ludviksenutvalet lanserte det i 2014 og akkurat djupnelæring var det Håkon såg som ei av hovudhensiktene med å implementere bevis i undervising. Han hevda at ein gjennom bevisa og arbeidet med argumentasjonen i desse vart tvungen til å sjå samanhengane i faget; du må her tenkje meir rundt problemet og nytte tidlegare kunnskapar når du no skal prøve å forstå argumentasjonen i beviset. Og at det var akkurat her, når elevane i arbeid med bevis må sjå samanhengen mellom det dei har lært tidlegare med det det lærer no djupnelæring kan oppstå. Ludviksenutvaldet hevdar djupnelæring «*handler om at elevene gradvis utvikler sin forståelse av begreper og sammenhenger innenfor et fagområde[...] dybdelæring innebærer at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse*» (NOU 2014: 7, s. 35). Her ser ein det å utvikle forståing av omgrep og samanhengar i eit fag, kunne bruke sine kunnskapar til å løyse problem i tillegg til å utvikle ei evne til å kunne reflektere over eigen læring er sentrale element i Ludviksenutvalet sin definisjon av djupnelæring. I tillegg til å samsvare med Håkon sin argumentasjon for kvifor arbeid med bevis kan fremje djupnelæring er dette faktorar tidligare forsking og også funn frå denne studien indikerer bevis kan bidra med. Teori og tidligare forsking viser at bevis er sentral i undervising då det fasiliterer forståing av matematikken sine mange sider. Gjennom arbeid med bevis og argumentasjonen i desse må elevar nytte sine tidligare kunnskapar når dei no skal prøve å forstå kva beviset fortel dei. Dei må sjå samanhengen mellom det dei har lært tidligare og det dei no arbeider med, noko som kan gje elevane ei heilskapleg forståing av faget. I tillegg til dette viser både tidligare forsking og funn i denne studien at bevis fremjar metakognitiv tenking. Dette ser ein er akkurat det Ludvikesnutvalet hevdar djupnelæring handlar om. Dette tenkjer eg då indikerer at bruk av bevis i undervising kan fremje nettopp djupnelæring.

Bevis har med andre ord fleire sentrale hensikter i undervising; det fasiliterer forståing og fremjar kritisk- og metakognitiv tenking og djupnelæring. Gjennom alle dei tre funna ser ein det er ein ting som går igjen, nemleg argumentasjon. Dette tenkjer eg då kan implisere at det er nettopp argumentasjonen som er det sentrale i bevisa. Det er gjennom argumentasjonen elevane får innsikt i den underliggande resonneringa og grunngjevinga bak matematiske teorem og formlar. Elevane kan då forstå *kvifor* ein kan bruke dei ulike teorema og formlane i matematikken, og det er gjennom dette elevane kan klare å overføre den kunnskapen dei har utvikla i matematikktimane til andre områder. Som Ola seier; ”*det er jo juristar som seier, ”det var fyrst når eg leste Euklid at eg skjønte kva eit argument er”. Så det er jo noko med det her argumentet sin kraft som er forbunde med denne bevistenkinga som er veldig verdifull.”* Her ser ein døme på korleis matematikken og argumenta som ligg i matematiske bevis er sentralt utanfor klasserommet og matematikken som disiplin. Det er noko ein nyttar også i andre yrker og som ein fekk ei forståing for etter å ha lest og forstått matematiske bevis. Det er vidare peika på korleis elevar gjennom å få innsikt i den underliggande argumentasjonen og resonneringa kan utvikle ei forståing av samanhengen mellom alle delane av matematikken. Matematikken vert ikkje lenger eit fag beståande av isolerte formlar og reglar, men som eit fag med samanheng og ein heilskap.

«Får me dette på prøven?» er eit spørsmål lærarane i studien seier dei får ofte. Noko som bringer oss inn på det som vart sett på som ei av dei største utfordringane lærarane i studien peika på i samband med bruk av bevis i undervising, nemleg ytre faktorar og i dette tilfellet vurdering. Bevis er i liten grad prioritert i læreplan og heller ikkje noko som vert vurdert i stor grad verken på eksamen eller prøvar. Elevar er opptekne av vurdering og korleis dei kan oppnå best mogleg resultat, dette er noko elevar fokuserer på framfor korleis dei kan utvikle forståing for matematikken. Når bevis då er noko som er inkludert i undervising nettopp for å fremje forståing og ikkje som noko som direkte vert vurdert gjer dette til at elevar er lite

motiverte for å arbeide med bevis. Motivasjon er drivkrafta i alle læringsprosessar, og når elevar då ikkje er motiverte for å arbeide med bevis vert dette ei stor utfordring for lærarar ved bruk av dette i undervising. Bevis er noko som av mange vert sett på som krevjande og vanskeleg, når det då ikkje er nokon ytre faktor som kan påverke motivasjonen gjer dette utfordringa enda større.

Læreplanen inkluderer ikkje bevis i stor grad, noko som igjen kan by på ein utfordring, nemleg tid. Håkon og Ola ytrar at dei kjenner på eit tidspress. Det er mykje som skal takast omsyn til; ein skal få alle elevar gjennom pensum, førebu dei til eksamen og det er i tillegg eit fagleg skilje i klassen som skal takast omsyn til. Å få alle elevar gjennom bevis utan at nokon skal felle av eller miste motivasjonen for matematikk er vanskeleg. Bevis er på ein måte fjellklatrarvegen til Ulriken. Det er ein flott tur med ei nydeleg utsikt på toppen, men det å få med seg alle opp innan ei viss tidsramme er vanskeleg. Det vert difor ofte slik at ein tek gondolen i staden, og då fell bevisa av i veggrøfta. Truls har derimot eit anna syn på det med tid. Han kjenner i likskap med Håkon og Ola på eit tidspress, men bevis er ikkje i han sine auge ein tidstjuv frå det å få elevane gjennom pensum og førebu dei til eksamen. Han hevdar bevis eignar seg for det å lære matematikk og også det å lære seg korleis ein skal løyse matematiske problem. Dette tenkjer eg då kan implisere at bevis som tidstjuv frå å få elevar gjennom pensum handlar om korleis ein vel å implementere dette i si undervising. Truls var den læraren som i stor grad nytta generiske eksempel i arbeid med bevis, der elevane sjølve løyste ei oppgåve med tal og den kunnskapen dei innehar for så å generalisere og sjå at dei kom fram til eit nytt resultat. Noko som tidlegare er diskutert som ein metode som også kan bidra til motivasjon for det å lære bevis, og som ein god inngansgsport til dei abstrakte bevisa. Om du implementerer bevis i form av generiske eksempel eller andre metodar, der det tydeleg kjem fram at bevis er noko som kan brukast når elevane seinare skal løyse problem vert ikkje tid ei like stor utfrodring lenger. Her får ein sett nytteverdien og ein kan få inn både prosedyrar og metodar samstundes som ein får ei innføring i spørsmålet om *kvifor* ein brukar akkurat denne metoden og alle matematiske argument og resonnement som ligg under.

Når det gjeld tid er det også sentralt å ta dei nye læreplanane i betraktning. Det er bestemt at resonnering og argumentasjon skal verte eit kjerneelement når dei nye læreplanane trer i kraft i 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Om det nemnde kjerneelementet står det følgjande: *Elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene må kunne følge og vurdere matematiske resonnementer. Elevene* *må også lære å utforme sine egne resonnementer både for å løse problemer og for å argumentere for framgangsmåter og løsninger* (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15). Dette kan bety meir tid til arbeid med bevis i undervising. Argumentasjon er som nemnt tidligare ein sentral del av bevis, og det er også i denne det ligg eit stort læringspotensial. Elevane får gjennom argumentasjonen i bevis innsikt i grunngjevingane bak teorem, formlar og reglar dei nyttar i matematikken, samstundes som dei gjennom arbeid med denne kan sjå samanhengen mellom matematikken sine mange sider. Gjennom arbeid bevis kan elevane oppfylle akkurat det kjerneelementet handlar om; sjå det at reglar og resultat ikkje er tilfeldige og om ein utviklar ei forståing av argumentasjonen også kunne utforme sine eigne resonnement for å løyse matematiske problem. Bevis er av den grunn ein god arbeidsmåte for å kunne gje elevar kompetanse innan det nemnte kjerneelementet, og når dette no skal bli ein del av læreplanen kan det bety meir tid til arbeid med bevis i undervising.

Den siste utfordringa som peika seg ut var lærarrolla, og korleis denne påverkar elevar si læring. Læraren er ein autoritetsfigur i klasserommet, det læraren seier trur elevane på. Dette er ikkje noko dei stiller spørsmål ved eller tenkjer over – har læraren sagt det, stemmer det. Dette kan by på utfordringar då elevar i denne samanheng vert passive i sin eigen læringsprosess. Ein mistar delen der elevar undrar, utforskar og stiller spørsmål. Dei strevar ikkje i læringsprosessen, men berre godtar det læraren seier. Då mistar ein den delen Hiebert og Grouvs (2007) peikar på som viktig for å utvikle ei relasjonell forståing. Ei mogleg løysing her kan vere å endre læraren si rolle i klasseromsdiskusjonar. I staden for å ha diskusjonar leia av læraren kan ein ha diskusjonar mellom elevar. Dette var noko Håkon nytta seg av i si undervising. I arbeid med bevis lat han elevane arbeide i grupper. Dette opna opp for at elevane kunne utforske, undre og streve litt saman, dei vart i større grad deltakarar i sin eigen læringsprosess og kunne då utvikle eit eigarskap og ei større forståing for matematikken.

Kort samanfatta kan ein konkludere med at bevis spelar ei sentral rolle i undervising, og då i hovudsak for å forklare matematiske samanhengar til elevar. Bevis er noko fleire elevar strevar med, det er derfor i bruk av bevis i undervising viktig å introdusere dette på ein måte som gjer bevis mindre avskrekkande og lettare tilgjengeleg for elevane. I denne samanheng er visuelle representasjonar og forklaringar gode hjelpemiddel. I tillegg til at samarbeid og diskusjon er sentrale element då elevane gjennom dette kan setje ord på sine eigne tankar og refleksjonar, noko som kan fremje forståing og legge til rette for at elevar vert meir aktive deltakarar i sin eigen læringsprosess. Gjennom studien kjem det også fram at bevis har fleire sentrale hensikter; det kan fasilitere forståing, fremje kritisk- og metakognitiv tenking, i tillegg til at det også fremjar djubdelæring. Gjennom alle desse funna er det ein ting som går igjen, nemleg argumentasjon. Dette kan då indikere at det er argumentasjonen i bevisa som er det sentrale i undervisingssamanheng. Bevis er i liten grad prioritert i læreplanar og vert i liten grad testa på eksamen. Dette er noko lærarane indikerer byr på utfordringar knytt til tid og motivasjon. Utover dette kjem læraren si rolle i klasserommet gjennom studien fram som ei utfordring i arbeid med bevis i undervising.

6.2 Forslag til vidare forsking

Gjennom studien har eg kartlagt lærarar sine refleksjonar kring bevis i matematikkundervisinga. Lærarane har elevane si læring og den matematiske kompetansen elevane sit igjen med etter utdanninga som sitt hovudfokus. Som dei seier er det på grunnlag av fasilitere forståing av matematikken og samanhengane i faget dei vel å nytte bevis i si undervising. I vidare forsking kan ein då sjå på korleis elevar arbeider med bevis og korleis dei nyttar seg av dette; om det faktisk ligg eit læringspotensiale i det å nytte bevis i undervising. Lærarane kan seie kva dei tenkjer om bevis og korleis dette påverkar elevar si læring, men ved å sjå på det same temaet frå elevane sitt perspektiv vil ein i større grad kunne seie noko om det faktisk ligg eit læringspotensial her.

Eit av funna i denne studien er også at lærarrolla og autoriteten som ligg i denne kan påverke elevar si læring. Dette er eit interessant funn som det tidlegare er forska lite på. Vidare forsking kan då vere å sjå nærare på dette. Til dømes korleis og i kva samanhengar lærarrolla påverkar elevane si læring, og kva tiltak ein kan gjere for å læraren si autoritative rolle i klasserommet til å kome til gode snarare enn å påverke læringspotensialet negativt.

Nokre av spørsmåla i studien kunne også ha vore forska på i større grad, her då spesielt kva rolle bevis spelar i undervising. Som de Villiers (1999) peikar på er det i liten grad forska på kva roller bevis spelar, og at det her i hovudsak er forska på bevis si verifiserande rolle. I etterkant av denne studien er det fleire som har uttalt seg om bevis si forklarande rolle i klasserommet (Hanna, 2000; Knuth, 2002a), men bevis si utforskande og systematiserande rolle, i tillegg til bevis sitt bidrag til intellektuelle utfordringar er det forska lite på. Dette kan då vere eit mogleg tema i vidare forsking.

Dei nye læreplanane bringer også fram nye forskingsmoglegheiter. Her kunne det vore mogeleg å analysere den nye læreplanen og korleis denne stiller seg i forhold til den gjeldande læreplanen. Vidare er resonnering og argumentasjon bestemt som kjerneelement i dei nye læreplanane. Vidare forsking kan då vere å sjå på korleis dei nye læreplanane endrar bevis si rolle i undervising.

Litteratur

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil´s proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics,* 7(1-2), 23-40

Cohen, L., Morrison, K., & Manion, L. (2011). *Research Methods in Education* (7. utg). London: Routledge.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*(1), 17-24.

Dickerson, D., & Doerr, H. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.

Furnes, B. R., Norman, E. (2013). Læringsstrategier og metakognisjon. I R. J. Krumsvik, & R. Saljø, *Praktisk-pedagogisk utdanning, en antologi.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjerke AS.

God Skole (u.u) *Den gode læreren.* Henta frå http://www.godskole.no/den-gode-skolen/den-gode-laereren

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *An International Journal, 44*(1), 5-23.

Hanna, G. (2014). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. I Stephen Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 404-408). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hanna, G., og Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *The International Journal on Mathematics Education, 40*(3), 345-353.

Hanna, G., og Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 329-336.

Hersh, R. (1993). Proving Is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics,* 24(4), 389–399.

Heinze, A. (2010). Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs: An empirical approach. I G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Red.), *Explanation and Proof in Mathematics* (s. 101-111). Dordrecht: Springer.

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H., & Borgan, Ø. (2015). *Matematikk R1* (Bokmål, 2 utg.). Oslo: Aschehoug.

Hemmi, K. (2010). Three Styles Characterising Mathematicians' Pedagogical Perspectives on Proof. *Educational Studies in Mathematics, 75*(3), 271-291.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371-404). Charlotte, NC: Information Age.

Johannessen, A., Christoffersen, L., & Tufte, P.A. (2010). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (4. utg.). Oslo: Abstrakt.

Katz, V.J. (2014). *History of Mathematics* (3. utg.). Harlow: Pearson

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Knuth, E.J. (2002a). Proof as a Tool for Learning Mathematics. I *The Mathematics Teacher, 95*(7), 486-490.

Knuth, E.J. (2002b). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-405.

Krumsvik, R.J. (2014). *Forskingsdesign og kvalitativ metode – Ei innføring.* Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad og Bjerke AS

Kunnskapsdepartementet (2018) *Kjerneelementer i fag.* Henta frå https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjernelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Lipton R.J., Regan K.W. (2013) *People, Problems and Proofs*. Berlin Heidelberg: Springer

Manger, T. (2013). Motivasjon og læring. I S. Lillejord, T. Manger, & T. Nordahl, *Livet i skolen 2.* Bergen: Fagbokforlaget.

Nilssen, V. (2012). *Analyse i kvalitative studier. Den skrivende forskeren.* Oslo: Universitetsforlaget

Niss, M., & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (18). København: Undervisningsministeriet.

Nosrati, M og Wæge, K. (2015) *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk.* Trondheim: Matematikksenteret, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

NOU 2014: 7. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole – Et kunnskaps grunnlag.* Oslo: Kunnskapsdepartementet

Óskardóttir, V. (2016). *Bevis i lærebøker for R1.* (Masteravhandling). Universitetet i Oslo: Oslo

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? I *Philosophia Mathematica-Series 3, 7*(1), 5-41.

Reid, D.A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publishers

Robson, C. (2002) *Real World Reaserch: a resourse for social scientists and practitioner reaserchers* (2. utg) Oxford: Blackwell

Sandvold, K.E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A., og Thorstensen, R. (2015). *Sigma R2 Matematikk* (2. utg)*,* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Sibley, T.Q. (2008). The Philosophy of Mathematics. I *The Foundations of Mathematics* (s.361-370). Hoboken, New Jersey: Wiley

Skemp, R.R (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching,* 77, 20-26

Skott, J., Hansen, H. C., & Jess, K. (2014). *Delta: fagdidaktik*. Denmark: Forlaget Samfundslitteratur.

Smestad, B. (2015). Kritikk og matematikk, *Tangenten*, *Tidskrift for matematikkundervisning* 2015(4).

Språkrådet, UiB. (2019) Bokmåls|Nynorskordboka. Henta frå http://ordbok.uib.no/perl/ordbok.cgi?OPP=resonnere&ant_bokmaal=5&ant_nynorsk

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(3), 289-321

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Umland, K., Sriraman, B. (2014) Argumentation in Mathematics. I Stephen Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 44-45). Dordrecht: Springer Netherlands.

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01).* Henta frå http://data.udir.no/kl06/MAT3-01.pdf

Utdanningsdirektoratet (2013) *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04)*. Henta frå http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet (2018) *Overordnet del av læreplanverket.* Henta frå https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/overordnet-del/opplaringens verdigrunnlag/kritisk-tenkning-og-etisk-bevissthet/

Utdanningsdirektoratet (u.ua) *Videregående opplæring.* Henta frå https://www.udir.no/utdanningslopet/videregaende-opplaring/

Utdanningsdirektoratet (u.ub) *Studiespesialisering.* Henta frå https://www.udir.no/kl06/ST

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A., og Thorstensen, R. (2013). *Sigma 1T Matematikk* (3. utg)*,* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv

Vedlegg 2: Samtykkebrev

Vedlegg 3: NSD Godkjenning

Vedlegg 4: Intervjuguide

Vedlegg 1: Informasjonsskriv

Førespurnad om deltaking i forskingsprosjekt

«Bevis i undervising av realfagsmatematikk i vidaregåande skule. Ei kvalitativ studie av lærarar sine didaktiske refleksjonar kring bruk av bevis i matematikkundervisinga»

Dette er eit spørsmål til deg om å delta i forskingsprosjektet der formålet er å få innblikk i kva rolle lærarar tenkjer bevis spelar i matematikkundervisinga. I dette skrivet vil me gje informasjon om måla for prosjektet og kva deltaking vil innebere.

Formål

Bevis har ei sentral rolle i matematikk, og har fleire til dels ulike funksjonar. Ei viktig hensikt til beviset er å verifisere eller etablere sanninga av eit utsakn, men eit bevis kan også forklare kvifor noko er sant. I matematikkfaga 1T, R1 og R2 i vidaregåande skule stiftar elevane kjennskap med bevisteknikkar, og dei må sjølve gjennomføre enkle bevis. Dei arbeider også med bevis av utvalte matematiske setningar. Derav er faga matematikk 1T, R1, R2 valt i dette studiet. Vidare har forskingsprosjektet som hensikt å få innblikk i kva rolle lærarar tenkjer bevis spelar i undervisinga; kan bevis sjåast som ein læringsressurs, eller vil bruk av bevis i undervisinga bidra til utfordringar?

Problemstillinga som skal svarast på er: *Kva didaktiske refleksjonar gjer lærarar seg kring bruk av bevis i matematikkundervisinga?*

Forskingsspørsmål som skal svarast på:

1) Kva roller ser lærarar at bevis spelar i realfagsmatematikk?
2) Korleis implementerer lærarar bevis i si undervising?
3) Kva moglegheiter og utfordringar ser lærarar i å bruke arbeid med bevis for å legge til rette for at elevane kan utvikle matematikkforståing ?

Prosjektet er ei masterstudie ved Universitetet i Bergen.

Kven er ansvarleg for forskingsprosjektet?

Universitetet i Bergen er ansvarleg for forskingsprosjektet.

Kvifor får du spørsmål om å delta?
I dette prosjektet ynskjer me å intervjue og observere tre matematikklærarar med lang erfaring i å undervise matematikk. Då prosjektet inkluderer både intervju og observasjon av undervising er det av praktiske årsaker eit ynskje at deltakarar er lærarar ved vidaregåande skular i Bergensområdet og indre sogn. Av denne grunn får du spørsmål om å delta i forskingsprosjektet. Fem lærarar har tidlegare vorte kontakta med spørsmål om dei ynskjer å delta i prosjektet. Dette er lærarar eg har kjennskap til frå praksis i samband med lektorutdanninga ved UiB, samt eiga skulegang.

Kva inneber det for deg å delta?
Datainnsamlinga vil innebere at du deltek i intervju samt observasjon av ei undervisingsøkt. Det vil bli utført intervju både i forkant og etterkant av klasseromesobservasjon. Spørsmåla i intervjuet vil omhandle bruk av bevis i undervisinga, kva rolle du som lærar tenkjer bevis spelar i undervisinga, korleis bevis vert implementert samt refleksjonar kring kva utfordringar og moglegheiter bevis som del av matematikkundervisinga kan bære med seg. Eg vil gjere lydopptak av intervjua som seinare skal transkriberast.

Deltaking i studien vil også innebere observasjon i klasserom. Det vil her verte sett i verk videofilming, så lenge alle deltakande samtykker til dette. Om ikkje samtykker vil det her bli fortatt skriftlege notatar av observasjonar.

Frivillig deltaking
Det er frivillig å delta i studien, og samtykke til deltaking kan trekkast tilbake til ei kvar tid utan å oppgje grunn. Dersom du vel å trekke deg vil innsamla data om deg verte anonymisert. Det vil ikkje ha nokon negative konsekvensar for deg dersom du ikkje vil delta eller seinare vel å trekke deg.

Ditt personvern – korleis me oppbevarer og brukar dine opplysingar.
Me vil kun bruke opplysingar om deg til formåla me har fortalt om i dette skrivet. Opplysingane vert behandla konfidensielt og i samsvar med personvernsregelverket al.l innsamla informasjon, både lyd- og videoopptak, vil verte oppbevart på passordbeskytta eining, der kun veileiar Trond Stølen Gustavsen og masterstudent vil ha tilgang til informasjonen. Deltakarane vil ikkje kunne kjennast att i publikasjon.

Kva skjer med opplysingane dine når me avsluttar forskingsprosjektet?

Prosjektet forventast avslutta 1. juni 2019. Lyd- og videoopptak vil bli sletta innan utgangen av 2019.

Dine rettighetar

Så lenge du kan identifiserast i datamaterialet, har du rett til:

- Innsyn i kva personopplysingar som er registrert om deg
- Få retta personopplysingar om deg
- Få sletta personopplysingar om deg
- Få utlevert ein kopi av dine personopplysingar (dataportabilitet)
- Å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlinga av dine personopplysingar

Kva gjev oss rett til å behandle personopplysingar om deg?

Me behandlar opplysingar om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag frå Universitetet i Bergen har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlinga av personopplysningar i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Korleis kan eg finne ut meir?

Dersom du har spørsmål til studien, eller ynskjer å nytte deg av dine rettighetar, ta kontakt med:

Universitetet i Bergen ved Trond Stølen Gustavsen, trond.gustavsen@uib.no.

Vårt personvernombud: Janecke Helene Veim, personvernombud@uib.no

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost personverntjenester@nsd.no eller telefon 55 58 21 17

Med vennleg helsing

Veileiar	Masterstudent
Trond Stølen Gustavsen	Silje Trâi

Signatur, dato

Vedlegg 2: Samtykke brev

Samtykke til deltaking i studie

Eg har motteke informasjon om studien og forstått at det er mogleg å trekke tilbake samtykket ved ei seinare anledning utan å oppgje grunn. Innsamla data vil då bli anonymisert.

Eg gjev hermed samtykke til å delta i studien *«Bevis i undervising av realfagsmatematikk i vidaregåande skule. Ei kvalitativ studie av lærararar sine didaktiske refleksjonar kring bruk av bevis i matematikkundervisinga»*

Namn blokkbokstavar:____

____

(Signatur prosjektdeltakar, dato)

Vedlegg 3: NSD Godkjenning

Det innsendte meldeskjemaet med referansekode 770568 er nå vurdert av NSD. Følgende vurdering er gitt:
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 22.01.2019, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

MELD ENDRINGER
Dersom behandlingen av personopplysninger endrer seg, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. På våre nettsider informerer vi om hvilke endringer som må meldes. Vent på svar før endringer gjennomføres.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2019.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

- lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
- formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
- dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet

- lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamateriale vil de ha følgende rettigheter: åpenhet (art. 12), informasjon (art. 13), innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), underretning (art. 19), dataportabilitet (art. 20). NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Vi minner om at hvis en registrert tek kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!
Kontaktperson hjå NSD: Kajsa Amundsen Tlf. Personverntjenester: 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 4: Intervjuguide

Del 1

Dette er vegleiande spørsmål, i intervjuet vil det også bli fulgt opp tema som kjem opp undervegs.

1) Kva rolle tenkjer du bevis spelar i matematikkundervisinga (verifikasjon, forklaring, systematisering etc)?
2) I kva grad nyttar du bevis i undervisinga?
3) Korleis implementerer du som lærar bevis i matematikkundervisinga?
    a. Kva type bevis vel du som lærar å ta med i undervisinga?
    b. Korleis kom du fram til dei bevisa du vel å ta med?
        i. Kvifor har du valt desse bevisa?
        ii. Er det nokre bevis du vel å ikkje ta med, og kvifor vel du vekk akkurat desse bevisa?
    c. Korleis legg du fram bevisa i undervisinga?
        i. Korleis påverkar framstillinga av beviset elevane, har du erfart at ulik framstilling av bevis påverkar elevar ulikt?

        Her tenkjer eg på om du har lagt fram same bevis på fleire ulike måtar og erfart at dette påverka elevane ulikt?
4) Kva tenkjer du bevisa kan bidra med for elevane?
    a. Kva type bevis tenkjer du elevane får mest nytte av? Formelle bevis/verifiserande bevis eller meir forklarande bevis?
    b. Korleis tenkjer du elevane arbeider med og nyttar seg av bevisa?
        i. Om ein som elev fokuserer lite på bevis kva innverknad tenkjer du det kan ha?
        ii. Om ein som elev fokuserer mykje på bevis kva innverknad tenkjer du det kan ha? Kan det ha påverknad for val av vidare utdanning?
    c. Er det nokre ytre faktorar som kan påverke val av bevis i undervisinga? Med ytre faktorar tenkjer eg her på vurderingsformer og liknande.
    d. Kva rolle tenkjer du bevis har i utviklinga av elevar si matematiske forståing?
5) Kva utfordringar tenkjer du bruk av bevis i matematikkundervisinga kan gje?
6) Kva moglegheiter tenkjer du bruk av bevis i matematikkundervisinga kan gje?

Del 2

Truls:

1) Er tid ein faktor du tenkjer er sentral med tanke på undervising av bevis?
2) Kva tenkjer du om samarbeid i arbeid med bevis i undervisinga?

Håkon:

1) I intervju 1 nemnde du ei prosedyre du implementerte i arbeid med direkte bevis, har du nokre fleire refleksjonar kring kvifor dette er ein god arbeidsmåte?

Ola:

1) Kva tenkjer du om visuelle representasjonar og forklaringar i samband med bevis i undervising?