Samtalekvalitet, strategier og *forståelse* i arbeid med *Elevgenererte eksempler*

Ola Kåre Risa

Erfaringsbasert master i undervisning

med fordypning i matematikk

Matematisk institutt

UNIVERSITETET I BERGEN

Vår 2019

Forord

For omtrent fem år siden startet jeg på det studiet som til slutt skulle ende i en *Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk*. I min opprinnelige utdannelse som matematikklærer gikk jeg på en integrert adjunktutdanning på Universitetet i Bergen. Etter noen år i arbeid som matematikklærer i videregående skole, fikk jeg lyst til å fordype meg enda mer i matematikk og matematikkdidaktikk. Da jeg ble oppmerksom på dette masterstudiet, gikk jeg straks inn og søkte om plass. Det har vært en interessant og lærerik reise som har gitt meg ny kunnskap og ny inspirasjon i læreryrket mitt. Men det har også vært en krevende prosess å ta en mastergrad ved siden av jobb. Dette ville ikke vært mulig uten støtte og hjelp fra menneskene rundt meg. I den anledning er det flere jeg gjerne vil takke.

Først vil jeg takke min veileder Christoph Kirfel for konstruktive og gode innspill, interessante diskusjoner og hjelp til å sette gode og fornuftige milepæler som har hjulpet meg trygt i havn.

Takk til min første veileder Runar Ile som introduserte meg for *Elevgenererte eksempler* og hjalp meg godt i gang med forberedelsene til masteroppgaven.

Takk til lærerne og til elevene som velvillig stilte opp til undervisningsopplegg og var villige til å dele sitt arbeid og sine diskusjoner på lydopptak.

Takk til mine medstudenter og veiledere på masterseminaret. Takk for gode innspill og veldig hyggelig samvær! Jeg har alltid gledet meg til samlingene. Takk til Ove Gunnar Dragset for tiden du har vært villig til å bruke til tips og konstruktive tilbakemeldinger på arbeidet mitt. Det har vært til veldig god hjelp!

Takk til mine ledere på arbeidsplassene jeg har hatt under studiet, Stend videregående skole og VilVite Bergen vitensenter, for at dere har lagt godt til rette for at jeg kunne gjennomføre dette studiet.

Og takk til min elskede kone og mine fine døtre for at dere tålmodig har holdt ut med en masterjobbende og til tider svært fraværende mann og pappa! Det blir bedre tider nå!

Bergen, mai 2019,

Ola Kåre Risa

Innholdsfortegnelse

Tabelloversikt

Figuroversikt

1 Innledning

1.1 Bakgrunn og begrunnelse for valg av tema

Jeg har i mine 6 år som matematikklærer grunnet på hvordan man kan få elevene inn i en rikere *matematisk* muntlig aktivitet. Min opplevelse var at den muntlige aktiviteten ofte begrenset seg til korte svar på spørsmål jeg stilte eller at elevene seg imellom kunne spørre om for eksempel: «Hva fikk du på oppgave 2.5?» Jeg opplevde kun å få til diskusjoner rundt de *matematiske* begrepene når jeg hjalp elevene én og én. Begrepsdiskusjoner mellom små grupper av elever, opplevde jeg sjelden eller aldri, ei heller slike diskusjoner i full klasse i samtaler ledet av meg. Forskningen til Kleve og Solem (2014) fremhever hvor viktig det er at elever får uttrykt seg muntlig i matematikkfaget. De sier blant annet at «elever ikke lærer å tenke om de ikke blir bedt om å uttrykke tankene sine».

Jeg har også tenkt over hvordan jeg kunne legge opp undervisningen for å legge til rette for dypere *forståelse* av matematikken vi arbeider med. I følge Franke m. fl. (2007) henger utvikling av *forståelse* sammen med blant annet muntlig aktivitet. Deler av matematikkundervisningen i norsk skole er preget av prosedyrelæring, og forskning peker på bruk av formelle prosedyrer i norsk skole uten dypere *forståelse* (Naalsund, 2012). Jeg ble umiddelbart fenget av *Elevgenererte eksempler* da jeg ble introdusert for dem av min første veileder på masteroppgaven, Runar Ile. Jeg prøvde ut *Elevgenererte eksempler* som didaktisk tilnærming i min egen undervisning og fikk positive erfaringer. Jeg var nysgjerrig på om *Elevgenererte eksempler* kunne være et redskap for mer utforskende læring, dypere *forståelse* av matematikken og rikere *matematisk* muntlig aktivitet. I følge Watson og Mason (2005) er *Elevgenererte eksempler* er en god måte å overføre initiativet til elevene. Dette igjen kan kanskje føre til dypere *forståelse*. Da Watson og Mason skrev sin bok i 2005 uttrykte de at oppsiktsvekkende lite var skrevet om *Elevgenererte eksempler* (Watson og Mason, 2005). Etter dette er mer blitt skrevet, blant annet har flere *matematiske* tidsskrift kommet med egne utgaver om *Elevgenererte eksempler*, Educ Stud Math i 2008 og ZDM Mathematics Education 2011. I norsk sammenheng er lite skrevet om *Elevgenererte eksempler*, Amdal m. fl. (2011) er det eneste jeg har kommet over. Da jeg hadde landet på å bruke *Elevgenererte eksempler* som didaktisk tilnærming i forbindelse med datainnsamling, var Amdal m. fl. (2011) sin artikkel en inspirasjon og utgangspunkt. Mitt håp er at min oppgave kan bidra til at flere får øynene opp for *Elevgenererte eksempler* og at dette kanskje kan føre til flere *matematiske* diskusjoner og dypere *forståelse* i norske klasserom.

1.2 Mål for oppgaven

Å forske på *Elevgenererte eksempler* som didaktisk tilnærming i trigonometri. I den forbindelse ønsker jeg å se nærmere på *samtalekvalitet*, *strategier* og *forståelse*.

1.3 Forskningsspørsmål

Forskningsspørsmålene jeg har stilt er:

1. Hvilke typer *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelsestyper* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å *generere* egne *eksempler*?
2. Er det sammenheng mellom noen av variablene *strategi, samtaleelement, forståelsestype og antall vellykkede eksempler* i arbeid med *Elevgenererte eksempler*?

1.4 Oppbygning av oppgaven

Oppgaven min er bygget opp av syv overordnede kapitler. I det neste kapittelet vil det teoretiske rammeverket til oppgaven bli presentert. Her tar jeg ut utgangspunkt i tidligere forskning for å kunne gi leseren et bilde av det litteratur- og teorigrunnlaget som ligger til grunn for oppgaven min. Videre presenteres oppgavens metode i kapittel 3. Her redegjør jeg for de forskningsmetodiske valgene jeg har stått ovenfor i arbeidet med oppgaven. Disse valgene vil også bli drøftet slik at leserne selv kan vurdere forskningens gyldighet ut fra de metodene som er valgt og brukt. I det fjerde kapittelet mitt presenterer jeg resultater og analyse som er knyttet til mitt første forskningsspørsmål, og i kapittel 5 kommer resultater og analyser knyttet til mitt andre forskningsspørsmål. Her leter jeg etter sammenhenger mellom den *matematiske* diskusjonen, *strategier*, *forståelsestyper* og *vellykkede eksempler*. I det sjette kapittelet, diskusjon, oppsummerer jeg og diskuterer mine funn opp mot oppgavens teoretiske grunnlag. Avslutningsvis vil jeg presentere en konklusjon, mulige implikasjoner og forslag til videre forskning.

2 Teori

Jeg ønsket å velge et tema for oppgaven min som kunne være utviklende for meg som matematikklærer. Spesielt ønsket jeg å se på hvordan jeg kunne legge til rette for økt muntlig *matematisk* aktivitet og dypere *forståelse*. I første del av teorikapittelet mitt ser jeg på ulike didaktiske tilnærminger som kunne vært gode redskaper med disse målene for øye. Den didaktiske tilnærmingen er selve fartøyet som har drevet arbeidet og oppgaven min fremover. For å komme nærmere svar på forskningsspørsmålene mine, har jeg valgt å se på datamaterialet mitt og analysere innenfor tre hovedtemaer; *strategi*, *forståelse* og *samtaler*. Disse temaene har derfor fått hvert sitt delkapittel i teorikapittelet. I hvert av temaene ser jeg på ulike perspektiver og syn og redegjør for valgene jeg har tatt underveis.

2.1 Didaktiske tilnærminger for å øke muntlig aktivitet og *forståelse*

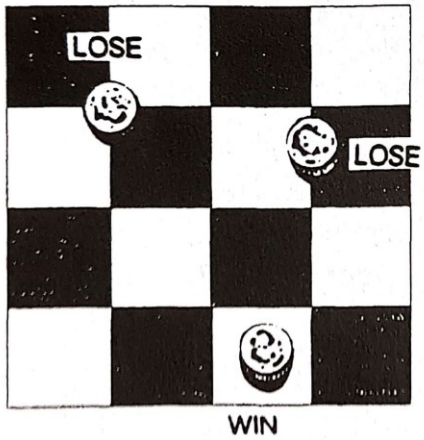
2.1.1 *Undersøkelseslandskap* som didaktisk tilnærming

Skovsmose (1998) bruker betegnelsen *Undersøkelseslandskap* om en måte å arbeide med matematikklæring på. Han fremhever at elevens engasjement er viktig for at et *Undersøkelseslandskap* kan komme i gang. Læreren inviterer til å arbeide i et *Undersøkelseslandskap*, men det er opp til elevene om de tar imot invitasjonen som gjør at *Undersøkelseslandskapet* starter (Skovsmose, 1998). Derfor er ikke karakteristikken *Undersøkelseslandskap* absolutt. Det finnes ingen tema som er *Undersøkelseslandskaper* i seg selv. Men noen invitasjoner kan bli mottatt av noen elevgrupper, andre invitasjoner kan bli mottatt av andre. Derfor blir det også en grunnleggende pedagogisk oppgave å vurdere hvilke landskap som faktisk kan komme til å fungere som *Undersøkelseslandskaper* i forhold til bestemte elevgrupper; alder, interesse, kjønn med mer tatt i betraktning (Skovsmose, 1998). Han gir flere eksempler på åpne problemstillinger der lærer og elever arbeider undersøkende. Spørsmål som for eksempel «Hva ville skje hvis …?» og «Ville resultatet endret seg dersom ...?» kan bidra til å engasjere elevene.

Undersøkelseslandskap var utgangspunktet for *IC-modellen* til Alrø og Skovsmose (2002). Dette er en *modell* for samtaleanalyse som jeg kommer grundig inn på i kapittel 2.4. Alrø og Skovsmose (2002) sin forskning viser at *Undersøkelseslandskap* kan være en god tilnærming dersom en ønsker å legge til rette for rikere muntlig *matematisk* aktivitet.

2.1.2 *Problemløsning* som didaktisk tilnærming

Problemløsningsoppgaver kan være utgangspunkt for at et *Undersøkelseslandskap* oppstår. Romberg (1994) illustrerer en *problemsituasjon* som vil komme inn under det Skovsmose (1998) ville kalt et *Undersøkelseslandskap*. *Problemsituasjon*en som Romberg (1994) refererer til tar utgangspunkt i et problem han kaller «fairground»-problemet.



At a fair, players throw coins onto a board checkered with squares. If a coin touches a boundary, it's lost. If it rolls off the board, it's returned. But if it lies wholly within a square, the player wins his coin back plus a prize. Copyright (1988) by National Council of Teachers of Mathematics. Used with permission.

What is the probability of winning this game?

FIGUR 2-1 FAIRGROUNDPROBLEMET FRA ROMBERG (1994)

Romberg (1994) skriver at dette problemet oppfyller mange viktige egenskaper av *matematisk* instruksjon som er spesifisert i NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) sine standarder fra 1988:

- Det begynner med en reell *problemsituasjon*.
- For å undersøke problemet må det bli forenklet slik at en passende *modell* kan bli konstruert.
- For å bygge en *modell*, kan flere konsept fra forskjellige deler av matematikken bli brukt (sannsynlighet, geometri, koordinater osv.).
- Mange forskjellige *matematiske prosedyrer* kan bli brukt (generering av tilfeldige tall, plotting av punkt, simulering osv.)
- Disse egenskapene omfavner sammenhengen mellom *begreper* og *prosedyre* heller enn å peke på uavhengigheten til *begreper* og *prosedyre*.
- Problemet leder til andre spørsmål om sannsynlighet og kan være med å gi metoder en kan bruke på andre interessante problemer.

Romberg (1994) viser videre til hvordan en klasse (Grade 8) faktisk løste problemet. Her blir det tydelig at *problemsituasjonen* utvikler seg til det som Skovsmose (1998) ville kalt et *Undersøkelseslandskap*. Invitasjonen til *Undersøkelseslandskapet* er selve oppgaven, og elevene viser gjennom sin løsningsprosess at de tydelig tar imot invitasjonen. Elevene fastslår at dette virkelig er et geometrisk sannsynlighetsproblem. De begynner å angripe problemet med å se på et spesifikt eksempel. De lar radiusen til mynten være 3 cm og siden på kvadratet være 10 cm. De fastslår gjennom geometriske argumenter at sannsynligheten for å vinne med disse spesifikke målene er 16%. De går så videre til å undersøke det generelle problemet med side S og mynt med radius R og kommer frem til en generell formel. Videre bestemmer de seg for å undersøke problemstillingen: «Hvis kvadratet er 10 cm på en side, hvor liten skal radiusen på mynten være for at det skal være like stor sannsynlighet for å tape som å vinne?». Dette viser at problemløsningsoppgaven har utviklet seg til et *Undersøkelseslandskap*. Det blir enda tydeligere når klassen videre bestemmer seg for å undersøke problemstillingen empirisk, lage et dataprogram som simulerer problemstillingen og undersøke 4 andre relaterte problemstillinger.

Det er klart at *problemløsningsoppgaver* i de fleste tilfeller ikke utvikler seg til slike omfattende *Undersøkelseslandskap* som eksempelet til Romberg (1994) gjorde. I prosessen som han beskriver, ble det virkelig lagt til rette for at elevene skulle få *Begrepsbasert* – (Hiebert og Lefevre, 1986) og *Relasjonell forståelse* (Skemp, 1976) som jeg kommer nærmere inn på kapittel 2.2.1. Jeg ser også for meg at den muntlige aktiviteten til elevene i eksempelet til Romberg (1994) var rik uten at han eksplisitt kommenterer dette. Jeg tror at *problemløsning* som aktivitet kan være en god inngangsport til mer muntlig aktivitet i matematikktimene og dypere *forståelse* uansett om de utvikler seg til *Undersøkelseslandskaper* eller ikke.

2.1.3 *Elevgenererte eksempler* og bakgrunn for valg av didaktisk tilnærming

Zaslavsky og Peled (1996) ser på det å *generere eksempler* som en *problemløsningsaktivitet*. De skriver at å *generere et eksempel* med noen egenskaper er en åpen oppgave, et problem med mange svar som elevene kan løse ved ulike tilnærminger. *Elevgenererte eksempler* står derfor ikke i kontrast til hverken *problemløsningsoppgaver* eller *Undersøkelseslandskap*. Mitt avsnitt om *Elevgenererte eksempler* innledes med å generelt se på *eksempler* før jeg kommer inn på begrepene *eksempelrom* og *Elevgenererte eksempler*.

Eksempler i matematikk har til alle tider vært viktige. Tidlige historiske kilder viser at *eksempler* har spilt en sentral rolle både i utvikling av matematikk som disiplin og undervisning i matematikk. Gamle *matematiske* tekster fra Egypt og Babylon viser bearbeidede *eksempler* som slutter med påstander som «*slik er det gjort*», og instruksjoner som «*gjør det dermed*» (Mason, 2010).

George Pólya (1962) gav lange sekvenser av øvelser som bygget opp generaliseringer fra en enkel startidé. Et av kapitlene avsluttet han med denne oppgaven:

Lag noen problemer som ligner på, men er forskjellig fra, de foreslåtte problemene i dette kapitlet - spesielt slike problemer som du kan løse. (Pólya, 1962, p. 98) (Bills m. fl., 2006)

Ordet *eksempel* brukes i matematikkutdanning på mange forskjellige måter. *Eksempler* i form av gjennomgang av løsning av et problem er nøkkelinnhold i nær sagt alle instruksjonsforklaringer, og *eksempler* av alle typer er en av de grunnleggende tingene som brukes til å illustrere og formidle begreper mellom elever og lærere (Bills m. fl., 2006).

En viktig pedagogisk distinksjon kan bli gjort mellom *eksempler* på *begreper* (trekanter, heltall delelige på tre, polynomer osv.) og *eksempler* på bruken av en *prosedyre* (finne arealet til en trekant, finne ut om et heltall er delelig med 3, finne røttene til et polynom osv.) (Bills m. fl., 2006).

Det finnes også mange andre typer av *eksempler*. *Generiske eksempler* kan være *eksempler* på *begreper* eller *prosedyrer*, eller kan danne kjernen i et *generisk bevis. Moteksempler* trenger en hypotese eller påstand å motvirke i sammenheng med et *begrep*, en *prosedyre* eller et forsøk på *bevis*. *Ikke-eksempler* (f.eks. *eksempel* på et ikke-rasjonalt tall) tjener til å klargjøre grenser mellom *begrep og prosedyrer.*

Watson og Mason (2005) bruker *eksempler* på en veldig bred måte. De mener at et *eksempel* kan være enhver ting som den lærende kan bruke for å kanskje kunne generalisere:

- *Illustrasjoner* av *begrep*er og *prinsipper*, slik som en spesifikk likning som illustrerer lineære likninger eller to brøker som demonstrerer likheten til brøker.
- *Plassholdere* som blir brukt i stedet for generelle definisjoner og teoremer, som for eksempel å bruke et *dynamisk bilde* av en *trekant* med tilhørende *omskrevet sirkel* der hjørnene i trekanten kan flyttes på for å se hva som da skjer.
- *Spørsmål* som blir arbeidet med i lærebøker eller av lærere for å demonstrere bruken av spesifikke *teknikker* eller *prosedyrer*, vanligvis kalt *arbeidseksempler*.
- *Spørsmål* som blir arbeidet med av elever med det mål å lære å bruke, anvende og mestre spesifikke *teknikker* eller *prosedyrer*, vanligvis kalt *oppgaver*.
- *Representanter* for klasser brukt som råmateriale for *induktiv matematisk argumentasjon*, som for eksempel *tall* generert av spesielle tilfeller av en situasjon og så undersøkt for *mønster*.
- *Spesifikke kontekster* som kan brukes for å motivere til matematikk.

Når vi snakker om *Elevgenererte eksempler* kommer *eksemplene* som elevene produserer fra et lite idébasseng som kommer til syne i møte med bestemte oppgaver og bestemte situasjoner. Dette idébassenget kaller vi *eksempelrom*. Det er samlingen med *eksempler* som til sammen utgjør ditt bilde eller oppfatning av et *matematisk objekt* eller *emne*. Ved å jobbe med å lage egne *eksempler* har du oppdaget ditt *eksempelrom*, sett på det du vet på nye måter og konstruert nye *objekter* som okkuperer nye eller utvidede *eksempelrom* (Watson og Mason, 2005).

Samlingen av *eksempler* som en elev har tilgang til når som helst, og kombinasjonen mellom disse *eksemplene* (deres tilgjengelige *eksempelsrom*) spiller en viktig rolle i hvilken forstand elevene kan gjøre oppgavene de skal løse, aktivitetene de engasjerer seg i, og hvordan de tolker hva lærerteksten sier og gjør (Bills m. fl., 2006).

Watson og Mason (2005) formulerte begrepet et *personlig eksempelrom* som et verktøy for å hjelpe elever og lærere til å bli mer oppmerksomme på potensialet og begrensningen av erfaring med *eksempler*. De skriver at å lære matematikk består av å utforske, bytte om på og utvide *eksempelrom*. Og at det også består av å utforske og se sammenhengene mellom *eksempelrommene.* Gjennom å utvikle kjennskap til disse rommene, kan elevene oppnå flyt og mestring med en teknikk eller et emne. Å oppleve utvidelser av dine *eksempelrom* bidrar til mer fleksibel tenking, ikke bare innen matematikk, men kanskje også mer generelt, og det forsterker verdsettelsen og adopsjonen av nye *begreper*. Et personlig *eksempelrom* er det som er tilgjengelig som svar på en bestemt situasjon, til spesielle spørsmål og variasjoner.

Perspektivet er at matematikk er en konstruktivistisk aktivitet som blir lært på rikest mulig måte når de lærende er aktiv i å konstruere objekter, relasjoner, spørsmål, problemer og meninger. Denne konstruksjonen kan engasjere elever som kanskje med andre undervisnings*strategier* hadde vært passive og uinteresserte. Eksemplene som elevene lager kan være initiert av læreren som kan gi visse betingelser som eksemplene skal oppfylle. Det kan også være *eksempler* elevene har laget på eget initiativ i læringsprosessen rundt et *matematisk begrep* eller *fenomen* (Watson og Mason, 2005).

Som jeg har vært inne på er det ingen kontrast mellom *Elevgenererte eksempler* og *problemløsningsoppgaver* eller *Undersøkelseslandskap*. Å generere *eksempler* er en form for *problemløsning* og *eksempelgenerering* kan også utvikle seg til et *Undersøkelseslandskap*. Siden oppgaver der man skal lage et *eksempel* ofte er åpne og har uendelig mange løsninger, kan man se på slike oppgaver som en invitasjon til å utforske mange muligheter. Bills m. fl. (2006) skiver at å få elever til å bygge sine egne *eksempler* viser seg å være en svært effektiv *strategi* for overføring av initiativ fra læreren til eleven. Dette ønsket jeg å undersøke nærmere.

2.2 Matematisk forståelse og matematiske kompetanser

En viktig del av forskningsspørsmålene mine omhandler *matematisk forståelse*. Jeg vil derfor i dette delkapittelet se nærmere på dette. *Matematiske kompetanser* er tett knyttet opp mot *forståelse* og derfor kommer jeg også inn på det.

2.2.1 Dikotomier av *matematisk kunnskap, tenkning* og *forståelse*

Sfard (1991) skriver i sin artikkel, «*On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*», at abstrakte *matematiske* begreper som for eksempel *tall* eller *funksjon*, kan bli oppfattet på to helt forskjellige måter. Disse begrepene kan oppfattes *strukturelt* – som objekter, og *operasjonelt* – som prosesser. Tilsynelatende er disse oppfatningene uforenelige, men Sfard (1991) skriver at disse to oppfatningene faktisk utfyller hverandre. Et av eksemplene hun gir er begrepet *funksjon*. Dette kan oppfattes *strukturelt* som *en mengde* *av ordnede par* og *operasjonelt* som *en beregningsprosess* eller *en veldefinert metode for å gå fra et system til et annet*. For å legge grunnlaget for sin todeling av oppfatninger, gir Sfard (1991) en oversikt over noen av dikotomiene av *matematisk* kunnskap, tenkning og *forståelse* som ulike forskere har foreslått. I Tabell 2-1 er todelingene Sfard (1991) nevner.

TABELL 2-1 DIKOTOMIER AV *MATEMATISK KUNNSKAP/TENKNING/FORSTÅELSE*

Dikotomier	**Referanse**
Abstrakt og algoritmisk	(Halmos, 1985)
Deklarativ og prosessuell	(Anderson, 1976)
Prosess og produkt	(Kaput, 1979) (Davidson m. fl., 2007)
Dialektisk og algoritmisk	(Henrici, 1974)
Figurativ og operativ	(Piaget og Duckworth, 1970)
Begrepsbasert og Prosedyrebasert	(Hiebert og Lefevre, 1986)
Relasjonell og Instrumentell	(Skemp, 1976)

Som tabellen viser, finnes det mange dikotomier av *matematisk kunnskap, tenkning* og *forståelse*, og Sfard (1991) skriver at hun bare har valgt ut noen få av dem. Hiebert og Lefevre (1986) og Skemp (1976) sine todelinger går direkte på *forståelse* og jeg har valgt å se nærmere på dem.

Skemp (1976) innleder sin klassiske artikkel med å fortelle om *Faux amis*, et uttrykk som franskmennene bruker for å beskrive ord som er like eller veldig lignende, men som har ulike betydninger på ulike språk. Skemp (1976) skriver at to slike ord eksisterer i konteksten av matematikk, og det er de alternative betydningene til disse ordene, som hver har mange følgere, som Skemp (1976) tror er roten til mange av vanskelighetene i matematikkutdanningen.

En av disse ordene er *forståelse*. Stig Mellin-Olsen fra Universitetet i Bergen skiller mellom de ulike betydningene ved å kalle dem *Relasjonell forståelse* og *Instrumentell* *forståelse* (Skemp, 1976). *Relasjonell forståelse* betyr å vite både hva en skal gjøre og hvorfor. Ved *Relasjonell* læring knyttes *matematiske* prinsipper sammen med eksisterende kunnskap og skaper en sammenheng mellom gammel og ny kunnskap. Denne prosessen tar for seg en mer omfattende tilegning av kunnskap, ikke bare fordi en må lære hva og hvordan noe skal løses, men også hvorfor*. Instrumentell forståelse* ville han frem til da ikke ha sett på som *forståelse* i det hele tatt. Det er det han tidligere har beskrevet som «*regler uten grunner*» uten å innse at for mange elever og deres lærere var det slik at dersom de hadde en regel og evne til å bruke den, så mente de at de hadde forstått.

Skemp (1976) prøver videre i artikkelen å argumentere for begge de to synene på matematikk og *forståelse*. Han kaller seg selv «*djevelens advokat*» når han argumenterer for det *Instrumentelle* synet på matematikk. *Instrumentell matematikk* kan føre til en side med rette svar raskere og lettere. Belønningene i form av rette svar er mer umiddelbar. Vi må heller ikke undervurdere betydningen som følelsen av suksess kan ha for disse elevene. En kan få det riktige svaret raskere og mer pålitelig ved *Instrumentell forståelse* fordi mindre kunnskap er involvert. For *Relasjonell forståelse* argumenterer Skemp (1976) med at det er lettere å tilpasse til nye oppgaver, og det er lettere å huske. Her er det tilsynelatende paradoks, fordi det er absolutt vanskeligere å lære. Det er mer å lære, sammenhengene og de separate reglene, men resultatet, når det først er lært er mer varig. Skemp (1976) argumenterer også med at *Relasjonell kunnskap* kan være effektiv som et mål i seg selv og at *Relasjonelle* skjemaer er organiske i sin natur.

I likhet med Skemp (1976) har også Hiebert og Lefevre (1986) en todeling av *forståelsesbegrepet*. Deres rammeverk med *Begrepsbasert* - og *Prosedyrebasert forståelse* er mye brukt. De definerer *Begrepsbasert forståelse* som *kunnskap som er rik på relasjoner*. *Begrepsbasert forståelse* kan betraktes som et sammensett nettverk av kunnskap, hvor relasjoner gjennomsyrer de enkelte fakta og proposisjoner slik at alle deler av informasjonen er knyttet til et nettverk. Utviklingen av *Begrepsbasert forståelse* oppnås ved å skape forhold og relasjoner mellom kunnskapen man har og den nye informasjonen. Et av eksemplene de kommer med på *Begrepsbasert forståelse* er bygging av forholdet mellom algoritmen for flersifret subtraksjon og kunnskap om tallsystemet vårt med ulike sifferverdier for de ulike posisjonene.

Prosedyrebasert kunnskap er definert som *regler eller prosedyrer for å løse matematiske problemer* (Hiebert og Lefevre, 1986). Den består av to elementer. Den ene delen består av formelt språk og symbolske representasjonssystemer. Den andre delen består av trinnvise instruksjoner, algoritmer og regler for å løse *matematiske* oppgaver. Et nøkkelelement i *Prosedyrebasert forståelse* er at oppgavene er utført via en strukturert forutbestemt lineær sekvens. *Begrepsbasert* – og *Prosedyrebasert forståelse* blir antatt å være distinkte, men de er likevel relaterte. *Matematisk* kunnskap i sin fulle betydning, inneholder betydelige og grunnleggende forhold mellom *Begrepsbasert* og *Prosedyrebasert forståelse* og kunnskap (Hiebert og Lefevre, 1986). Elever er ikke fullstendig kompetente i matematikk om ikke de har tilegnet seg begge de to *forståelsestypene*.

Et av eksemplene Hiebert og Lefevre (1986) kommer med på en prosedyre, er å legge sammen to brøker med ulik nevner. Å ha lært denne prosedyren gjør at en kan generere svar på en type oppgaver, men en forstår ikke nødvendigvis *hva* en egentlig gjør eller *hvorfor* en gjør det. Siden begge *forståelsestypene* til Hiebert og Lefevre (1986) er nødvendig for å bli fullstendig kompetent i matematikk, hadde det vært interessant å vite hvilken av dem som optimalt kommer først. Dette er det arbeidet mye med. På dette temaet har Rittle-Johnson og Siegler (1998) konkludert med at det i ikke er noen fast optimal rekkefølge. I noen tilfeller oppnås *Prosedyrebasert* kunnskap før *Begrepsbasert*; i andre situasjoner er rekkefølgen omvendt.

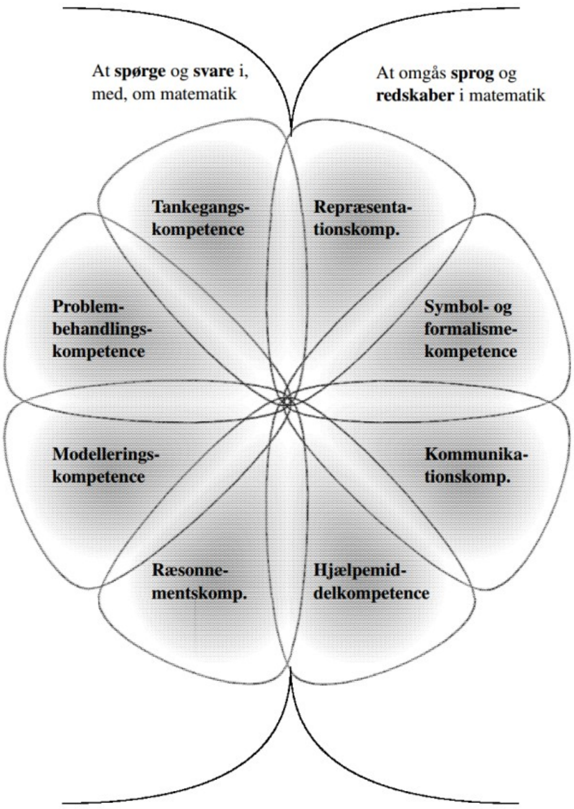
2.2.2 *Matematiske kompetanser*

Matematiske kompetanser er en annen og mer nyansert og moderne måte å se på *matematisk forståelse* på. *Forståelsestypene* til Skemp (1976) og Hiebert og Lefevre (1986) ble introdusert på 1970- og 1980-tallet, mens *kompetansemodellene* til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick m. fl. (2001) kom i begynnelsen av 2000-tallet. I flere og flere land er målet med matematikkundervisningen å utvikle studentenes *matematiske kompetanse* utover *Prosedyrebasert*- og *Begrepsbasert kunnskap*. Dermed trenger studentene å engasjere seg i et rikt utvalg av oppgaver som omfatter *kompetanser* som kommunikasjon, resonnement og problemløsing (Pettersen og Nortvedt, 2018). Niss og Jensen (2002) sitt rammeverket har påvirket læreplaner og reformer i matematikk i flere europeiske land, deriblant *Kunnskapsløftet* i Norge (Pettersen og Nortvedt, 2018).

Niss og Jensen (2002) deler *matematisk kompetanse* inn i to hovedkategorier. Disse inneholder hver fire underkategorier. De to hovedkategoriene er:

- *Å kunne spørre og svare i -, med - og om matematikk*
- *Å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper*

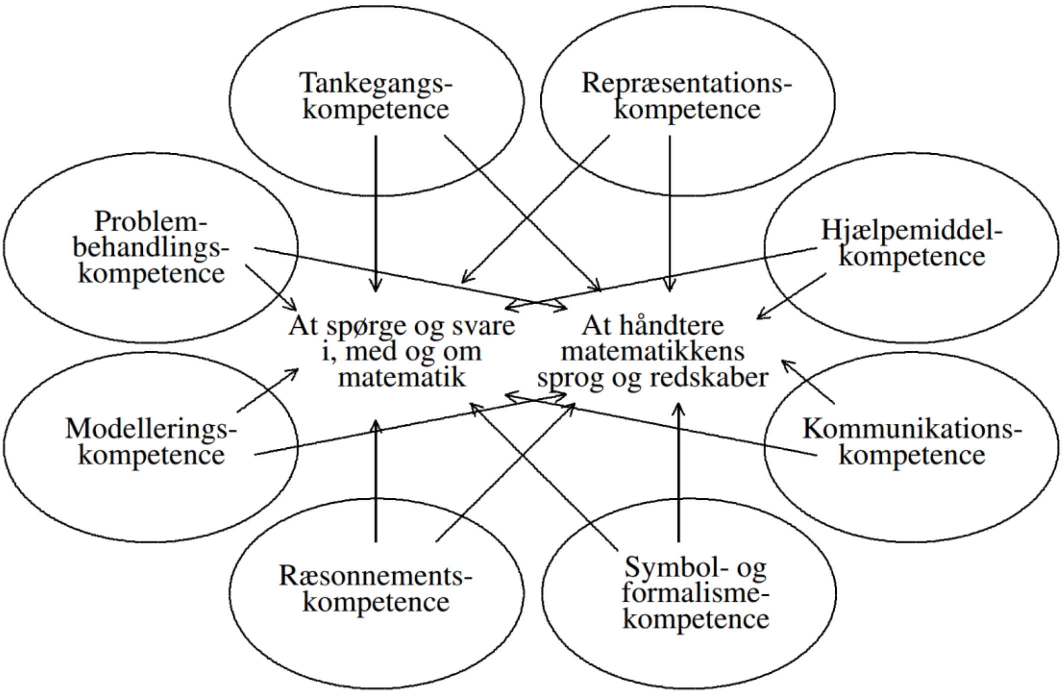
Hver av de åtte *kompetansene* er sammenfattende og generell i sin natur, noe som betyr at *kompetansene* er ikke er avhengig av et konkret *matematisk* emne eller utdanningsnivå. *Kompetansene* er likevel spesifikke for matematikken, noe som gir denne *kompetansemodellen* en generaliserbar tyngde og relevans (Niss og Jensen, 2002). Figur 2-2 viser oversikt over *kompetansene* og hovedkategoriene til Niss og Jensen (2002).



Figur 2-2 Åtte *kompetanser* i matematikk (Niss og Jensen, 2002)

Kompleksiteten i modellen til Niss og Jensen (2002) er ikke mulig å forenkle uten videre. Dette skyldes at *kompetansene* i modellen ikke er atskilte komponenter, men at de overlapper hverandre. En kan for eksempel se på hvordan modeller*ingskompetansen* og *representasjonskompetansen* overlapper. modeller i matematikken representerer informasjon på ulike måter. Et eksempel på dette kan være å tegne en graf ut fra en tabell med x- og y-verdier. Begge representasjoner, både grafen tegnet og tabellen med x- og y-verdier, representerer den samme modellen.

Ut ifra Figur 2-2 kan man få inntrykk av at *kompetansene* tilhører to adskilte sider av matematikkfaget. Niss og Jensen (2002) skriver at dette vil være en overtolkning av figuren. Alle de åtte *kompetansene* bidrar direkte eller indirekte til de to hovedkategoriene. Dette er illustrert i Figur 2-3 som er hentet fra Niss og Jensen (2002).



FIGUR 2-3 VISUELL FREMSTILLING AV AT ALLE DE 8 *KOMPETANSER* BIDRAR I DE TO HOVEDKATEGORIENE (NISS OG JENSEN, 2002)

Tankegangskompetansen innebærer å være klar over hvilke spørsmål som er karakteristiske for matematikk, å kunne stille slike spørsmål selv og å vite hvilke svar som kan forventes på disse spørsmålene. (Niss og Jensen, 2002)

Problembehandlingskompetansen går ut på å finne, oppstille, formulere, avgrense og presisere ulike *matematiske* problemer, både når oppgavene er åpne og lukkede, rene og anvendte. I tillegg må en kunne løse disse problemene på ulike måter. (Niss og Jensen, 2002)

Modelleringskompetansen går ut på å tolke og analysere eksisterende modeller i tillegg til at en skal kunne konstruere slike modeller selv basert på en annen representasjon. modeller*ingskompetansen* innebærer også det å kunne stille seg kritisk til modellens representasjon, det vil si å validere informasjonen som modellen tilbyr. (Niss og Jensen, 2002)

Resonnementskompetanse går for det første ut på å følge og bedømme et *matematisk resonnement*, både det skriftlige og muntlige, samt å skille mellom hva et bevis er og hvordan det skiller seg fra andre resonnementer. For det andre består denne *kompetansen* i å tenke ut og gjennomføre formelle og uformelle resonnementer og bevis. (Niss og Jensen, 2002)

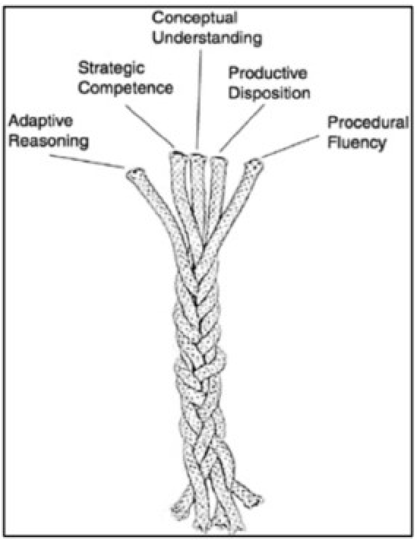
Representasjonskompetansen innebærer å håndtere ulike representasjoner av *matematiske forhold*. En må kunne avkode og fortolke ulike representasjoner, og en må også kunne benytte seg av ulike representasjoner. Diagrammer, geometriske figurer, algebraiske utledninger og verbale representasjoner er bare noen av de ulike formene som kan benyttes. (Niss og Jensen, 2002)

Symbol- og formalismekompetansen er nært knyttet opp mot *representasjonskompetansen*. Denne *kompetansen* har den skriftlige kommunikasjonen som basis og innebærer å kunne avkode symbol- og formelspråk og å kunne oversette frem og tilbake mellom naturlig og symbolholdig matematisk språk. (Niss og Jensen, 2002)

Kommunikasjonskompetansen innebærer for det første å kunne sette seg inn i og fortolke andres skriftlige -, muntlige – eller visuelle utsagn og tekster i matematikk. For det andre innebærer den å kunne uttrykke seg på forskjellig måter og på forskjellige nivå i matematikk. Dette kan være skriftlig, muntlig eller visuelt og kan være overfor forskjellige kategorier av mottakere (Niss og Jensen, 2002)

Hjelpemiddelkompetansen er knyttet til bruk av hjelpemidler i matematisk sammenheng. Hjelpemidlene kan være alt fra klosser, kulerammer, linjal og passer, til programvare på datamaskin og kalkulator (Niss og Jensen, 2002).

Kilpatrick m. fl. (2001) har laget en annen modell for *matematiske kompetanser* som har både likheter og forskjeller med modellen til Niss og Jensen (2002). Kilpatrick m. fl. (2001) sin modell består av fem tråder av *matematisk kompetanse*. (the five strands of mathematical proficiency). Her viser de til fem forskjellige *matematiske ferdigheter* som eleven må beherske for å kunne vise til *kompetanse* innenfor matematikken. Kilpatrick m. fl. (2001) påpeker at disse trådene ikke må sees på som uavhengige, men at de er sammenvevd. Med dette mener de at for å kunne vise *kompetanse* innenfor matematikk, må en til en viss grad beherske alle disse ferdighetene. Modellen presenteres som et tau der styrken til tauet vil svekkes hvis en eller flere av trådene er svake.



FIGUR 2-4 FRA (KILPATRICK M.FL., 2001, S. 117)

De fem trådene Kilpatrick m. fl. (2001) snakker om er:

1. *Tilpasset resonnering (adaptive reasoning)*
2. *Strategisk kompetanse (strategic competence)*
3. *Begrepsbasert forståelse (conceptual understanding)*
4. *Produktiv disposisjon (productive disposition)*
5. *Prosedyreflyt (procedural fluency).*

Strategisk kompetanse er lik det som tradisjonelt har blitt sett på som *problemløsning* og *problemstilling* i matematikken. Denne ferdigheten tar utgangspunkt i å representere, formulere og løse *matematiske problemløsningsoppgaver* (Kilpatrick m. fl., 2001).

Begrepsbasert forståelse handler om å se sammenhengen mellom matematiske prinsipper, og kunne bruke dem innenfor flere felt. Hvis elevene behersker denne ferdigheten vil de ofte kunne se helheten i matematikken, og de vil ofte kunne rekonstruere glemt kunnskap (Kilpatrick m. fl., 2001).

Produktiv disposisjon handler om å se nytten av matematikk og ha en positiv innstilling til faget basert på at de kjenner verdien av å beherske matematikk (Kilpatrick m. fl., 2001).

Prosedyreflyt går på evnen til å kunne benytte seg av og vite når matematiske operasjoner skal benyttes. Hvis eleven behersker prosedyreflyten kan de benytte disse operasjonene på en effektiv og nøyaktig måte (Kilpatrick m. fl., 2001).

Tilpasset resonering er evnen å tenke logisk om sammenhengen mellom begrep og situasjon. Under denne *kompetansen* finner vi kunnskapen om hvordan vi begrunner og rettferdiggjør svarene våre.

Det er interessant å sammenligne modellene til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick m. fl. (2001). Modellene peker på mange av de samme *matematiske ferdighetene*, men det finnes også forskjeller. En åpenbar forskjell er antall *kompetanser* i modellene, Niss og Jensen (2002) sin 8 *kompetanser* mot Kilpatrick m. fl. (2001) sine 5 *kompetanser*. Men dekker de de det samme store kompetansebildet, bare sagt med forskjellige ord? Ikke helt, og jeg vil peke på noen av forskjellene. Kilpatrick m. fl. (2001) sin *Produktive disposisjon* handler om holdninger til matematikk. Dette er noe som ikke ligger i modellen til Niss og Jensen (2002). Tilsynelatende har Niss og Jensen (2002) flere *kompetanser* som Kilpatrick m. fl. (2001) ikke har, men ved nærmere ettersyn kan man tolke de fleste av Niss og Jensen (2002) sin *kompetanser* inn i Kilpatrick m. fl. (2001) sine. Et unntak er *Hjelpemiddelkompetansen* til Niss og Jensen (2002) som man ikke finner innbakt i noen av Kilpatrick m. fl. (2001) sine 5 *kompetanser*. *Prosedyrekompetanse* er hos Kilpatrick m. fl. (2001) under *Prosedyreflyt*, men *prosedyrekompetanse* hos Niss og Jensen (2002) kan tolkes inn under hele 6 av 8 *kompetanser*; *Problembehandlingskompetansen, Modelleringskompetansen, Resonnementskompetansen, Representasjonskompetansen, Symbol- og formalismekompetansen og Hjelpemiddelkompetansen.*

Hvor står *forståelse* og *kompetanse* i forhold til hverandre? Er *forståelse* med i bare noen av *kompetansene*? En kan få inntrykk av dette hvis en bare ser på hva *kompetansene* til Kilpatrick m. fl. (2001) kalles. En av *kompetansene* til Kilpatrick m. fl. (2001) heter akkurat det samme som en av *forståelsestypene* til Hiebert og Lefevre (1986); *Begrepsbasert forståelse (Conceptual understanding).* Og Kilpatrick m. fl. (2001) sin *Prosedyreflyt* heter nesten det samme som Hiebert og Lefevre (1986) sin *Prosedyrebasert forståelse*. Så har de andre 3 *kompetansene* til Kilpatrick m. fl. (2001) ikke med *forståelse* å gjøre? Hvis man ser nærmere på *kompetansene* til Kilpatrick m. fl. (2001) og Niss og Jensen (2002) ser man at dypest sett handler alle om å forstå på forskjellige måter. Underforstått går *forståelse* inn i alle *kompetansene*. Som eksempel kan en ta *Kommunikasjonskompetansen* til Niss og Jensen (2002). Denne innebærer å kunne sette seg inn i og tolke andres skriftlige -, muntlige – eller visuelle utsagn og tekster i matematikk. Den innebærer også å kunne uttrykke seg på forskjellig måter og på forskjellige nivå i matematikk. For å kunne sette seg inn i og fortolke matematikk, må man ha en type *matematisk forståelse*. Dette gjelder også den delen av *kompetansen* som har med å uttrykke seg i matematikk, det krever at man har en type *matematisk forståelse*. Tilsvarende kan en argumentere for at de andre *kompetansene* i *kompetansemodellene* til Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick m. fl. (2001) har med ulike typer *forståelse* å gjøre.

2.2.3 Bakgrunn for valg av *forståelsestyper*

Matematisk forståelse og *matematisk kompetanse* er sammensatte og komplekse begreper. Utviklingen fra Skemp (1976) sine *forståelsestyper* med enkle definisjoner, men som rommer veldig mye, til det mer nyanserte bildet av *forståelse* som Hiebert og Lefevre (1986) gir, videre til ulike komplekse rammeverk for *matematiske kompetanser* som for eksempel (Kilpatrick m. fl., 2001) og (Niss og Jensen, 2002), er veldig interessant. Jeg liker enkelheten og tydeligheten i Skemp (1976) sine definisjoner av ulike typer *forståelse*, og jeg liker det nyanserte og sammensatte bildet av *matematisk forståelse* og *kompetanse* som for eksempel Niss og Jensen (2002) sin *kompetansemodell* gir. Det hadde vært interessant å bruke flere modeller og rammeverk i min analyseprosess. For meg fremstod det attraktivt å bruke definisjoner som dannet tydelige kategorier. *Kompetansene* i *kompetansemodellen* til Niss og Jensen (2002) er overlappende i sin natur og hadde slik jeg ser det gitt større rom for ulike tolkninger i prosessen med å kode datamaterialet mitt. Indirekte kommer jeg innom de fleste av *kompetansene* til Niss og Jensen (2002) når jeg analyserer datamaterialet etter *samtaleelementer, strategier* og *forståelsestyper*. Jeg gjorde et valg om å bruke *forståelsesbegrepet* i stedet for kompetansebegrepet når jeg skulle se på sammenhenger mot *strategier, samtaleelementer* og *vellykkede eksempler*. Videre kunne jeg tatt utgangspunkt i både Skemp (1976) og Hiebert og Lefevre (1986). Det er både likheter og forskjeller mellom dem. Skemp (1976) på sin side sier at *Relasjonell forståelse* er bedre egnet enn *Instrumentell forståelse*. Dette står i motsetning til Hiebert og Lefevre (1986) som sier at begge deler av deres todeling av *forståelse* må være til stede for å kunne tilegne seg tilstrekkelig kunnskap om et tema. Derfor kan en ikke sette likhetstegn mellom begrepene *Instrumentell – og Prosedyrebasert forståelse* eller mellom *Relasjonell* - og *Begrepsbasert forståelse*. Jeg mener likevel at man kan trekke noen linjer mellom disse todelingene. Skemp (1976) mener at *Relasjonell forståelse* innebærer å vite både hva en skal gjøre og hvorfor en skal gjøre det. Slik jeg ser det innebærer Skemp (1976) sin definisjon av *Relasjonell forståelse* at både *Prosedyrebasert* - og *Begrepsbasert forståelse* er tilstede. Kanskje en også kan kalle Skemp (1976) sin *Instrumentell*e *forståelse* for «en noe begrenset *Prosedyrebasert forståelse*». Skemp (1976) sin todeling er mer disjunkt og danner tydelige definisjoner som kan utgjøre to kategorier i en analyseprosess. Siden Hiebert og Lefevre (1986) ser på sine to typer av *forståelse* som utfyllende for hverandre, ville grensene mellom to kategorier være mer utydelig og glidende. Slik jeg ser det ville jeg måttet lage flere enn to kategorier i min analyse med utgangspunkt i Hiebert og Lefevre (1986). Et utkast til noen slike kategorier kunne vært:

Begrenset Prosedyrebasert forståelse	*God Prosedyrebasert forståelse*	*Begrepsbasert forståelse*	*God Begrepsbasert – og Prosedyrebasert forståelse*

En av fordelene med slike kategorier av *forståelse*, er at jeg ville fått frem flere nyanser i datamaterialet mitt. En av ulempene ville vært at det i noen tilfeller ville være vanskelig å fastslå akkurat hvilken kategori man skulle plassere noe i fordi grensene mellom dem ikke er like tydelig. For å øke reliabiliteten til forskningen min, hadde jeg et ønske om å legge til rette for å kunne være konsekvent i kodingen av *forståelse* i mitt datamateriale. Med tanke på dette og andre momenter jeg har vært inne på i kapittel 2.2.3, fremstod Skemp (1976) sine definisjoner av *Instrumentell* – og *Relasjonell forståelse* som de mest attraktive for meg å bruke.

2.3 *Strategier* i arbeid med matematiske oppgaver

En annen viktig del i min problemstilling handler om *strategier* i arbeid med *Elevgenererte eksempler*. Jeg vil derfor i dette delkapittelet se nærmere på *løsningsstrategier* i matematikk. *Strategier* i arbeid med matematiske oppgaver er et vidt felt, jeg vil bare peke på noen av sidene som har med *strategier* å gjøre. Pólya (1957) sin kjente metode for å løse problemer inneholder fire prinsipper:

1. *Forstå problemet*
2. *Utarbeid en plan*
3. *Gjennomfør planen*
4. *Se tilbake*

Under prinsippet *Utarbeid en plan* foreslår Pólya (1957) en rekke ulike *strategier* som kan brukes i arbeid med problemløsningsoppgaver:

- Gjett og sjekk
- Lag en ordnet liste
- Eliminer muligheter
- Bruk symmetri
- Se på spesielle tilfeller
- Bruk direkte argumentasjon
- Løs en likning
- Se etter et mønster
- Tegn et bilde
- Løs et enklere problem
- Bruk en modell
- Jobb baklengs
- Bruk en formel
- Vær genial

Schoenfeld (1992) skriver at disse *strategiene* er blitt kritisert for å være mer beskrivende enn preskriptive. Med det menes at karakteristikkene av *strategiene* gjør at en kan kjenne igjen *strategiene* når de bli brukt. Pólya (1957) sine karakteristikker gir ikke nok detaljer til at det vil være mulig for de som ikke allerede er kjent med *strategiene* å ta dem i bruk. Schoenfeld (1992) tar videre for seg *strategien Se på spesielle tilfeller* på noen oppgaver og viser 3 forskjellige *strategier* som alle kan kalles *Se på* *spesielle tilfeller-strategier*. Dette er tilfellet for nesten alle Pólya (1957) sine *strategier.* Schoenfeld (1992) skriver videre at forskningen indikerer at elever kan lære å bruke disse mer nøye avgrensende *strategiene*. Han kommer så med anbefalinger på fremgangsmåter for å lære elever *problemløsningsstrategier* basert på detaljerte studier av kognisjon.

Både Niss og Jensen (2002) og Kilpatrick m. fl. (2001) har *strategier* som en del av sine *kompetanser*. Kilpatrick m. fl. (2001) har en egen *kompetanse* han kaller for *Strategisk kompetanse* som handler om *problemløsning* og *problemstilling* i matematikken. Denne ferdigheten tar utgangspunkt i å representere, formulere og løse *matematiske problemløsningsoppgaver* (Kilpatrick m. fl., 2001). Niss og Jensen (2002) har ikke en egen *kompetanse* som er navngitt med «*strategisk*». *Strategisk kompetanse* ligger hos Niss og Jensen (2002) under *Problembehandlingskompetansen* som går ut på å finne, oppstille, formulere, avgrense og presisere ulike *matematiske* problemer, både når oppgavene er åpne og lukkede, rene og anvendte. I tillegg må en kunne løse disse problemene på ulike måter. (Niss og Jensen, 2002). Man kan også si at *Hjelpemiddelkompetansen* har med *strategi* å gjøre. *Kompetanse* i hjelpemidler, valg av hjelpemidler og tilgjengeligheten til hjelpemidler vil være avgjørende for hvilken *strategi* man velger.

Lithner (2008) har utviklet et rammeverk for forskning med *Kreativ* – og *Etterlignende resonering* (Creative and imitative reasoning) som inneholder ulike *strategiske* tilnærminger. Lithner (2008) presenterer 4 steg som er ganske liknende Pólya (1957) sine 4 prinsipper for problemløsning. Steg 2 innebærer å velge en *strategi* og steg 3 handler om å implementere *strategien*.

Imiterende resonering blir av Lithner (2008) delt i underkategoriene *Memorert resonering* og *Algoritmisk resonering. Memorert resonering* har et *strategivalg* som innebærer å gjenkalle et fullstendig svar, og *Algoritmisk resonering* har et *strategivalg* som innebærer å gjenkalle en algoritme. Den forventede argumentasjonen vil være ulik, men det er ikke noe behov for å lage en ny løsning ved *Algoritmisk resonering.* Disse typene av *strategivalg* står i kontrast til det Lithner (2008) kaller *Kreativ resonnering* som innebærer helt andre ting. Her må følgende kriterier være oppfylt:

1. *Nyhet*. En ny resoneringssekvens blir laget, eller en glemt er laget på nytt.

2. *Plausibilitet*. Det er argumenter som støtter *strategivalget*

3. *Matematisk fundamentert*. Argumentene har sitt grunnlag i matematiske egenskaper til komponentene som er involvert i resoneringen.

2.3.1 *Strategier* i arbeid med *Elevgenererte eksempler* og bakgrunn for valg

Antonini (2006) har forsket på *strategier* ekspertmatematikere (postgraduate students in mathematic) bruker i prosessen med å *generere eksempler*. Han skriver at det er meningsfylt å se på både *strategiene* og de underliggende kognitive prosessene studenter bruker i arbeidet med å generere eksempler.

Antonini (2006) identifiserte tre forskjellige *strategier* hos deltakere i sin studie fra 2006. *Prøving og feiling, transformasjon og analyse*. Antonini (2006) definerer *strategiene* slik:

- *Strategien Prøving og feiling* innebærer å søke etter eksempler fra hukommelsen og sjekke om eksempelet oppfyller de gitte betingelsene.

- Ved *strategien Transformasjon* tar en utgangspunkt i et eksempel som tilfredsstiller noen av de gitte betingelsene. Deretter endrer en eksempelet gjennom en eller flere transformasjoner til det har blitt til et nytt objekt med alle de oppgitte egenskapene.

- Ved *strategien Analyse* blir betingelsene til et *eksempel* som skal *genereres* utledet til logiske konsekvenser. Konsekvensene kan fremkalle enten et kjent *eksempel* eller en *prosedyre* som igjen kan *generere et eksempel* som oppfyller betingelsene som er gitt.

Strategien Prøving og feiling var nesten alltid den første *strategien* studentene valgte i Antonini (2006) sin studie, men studentene gikk også raskt videre til andre *strategier*. De fant ofte *strategien Transformasjon* i datamaterialet sitt, mens *strategien Analyse* så ut til å bli aktivert når de andre *strategiene* ikke førte raskt nok frem.

Strategiene til Antonini (2006) ble også brukt i studien til Iannone m. fl. (2011). Her var deltakerne studenter med lavere grad i matematikk. Her identifiserte de et smalere spekter av *strategier* blant deltakerne sammenlignet med Antonini (2006) sin studie. Det var stor overvekt av *strategien Prøving og feiling* og ingen tilfeller av *Analyse*. *Prøving og feiling* ble brukt av alle deltakere, i 82% av genereringsforsøkene og i 80% av de vellykkede forsøkene. *Strategien Transformasjon* ble brukt i 18% av tilfellene og var vellykket på nesten halvparten av tilfellene. I sin studie identifiserte ikke Iannone m. fl. (2011) noen *strategier* som var vesentlig forskjellig fra de som ble beskrevet av Antonini (2006).

Det er interessant å sammenligne *strategiene* til Antonini (2006) med *strategiene* til Pólya (1957) og Lithner (2008). Antonini (2006) definerer kun 3 *strategier* mot Pólya (1957) sine 14 eksempler på *strategier*. Mange av Pólya (1957) sine *strategier* kan tolkes inn under Antonini (2006) sine. Pólya (1957) sin *Gjett og sjekk* og *Eliminer muligheter* kan tolkes inn under Antonini (2006) sin *Prøving og feiling*. *Se på spesielle tilfeller* og *Løs et enklere problem* kan tolkes inn under Antonini (2006) sin *Transformasjon.* Antonini (2006) sin *strategi Analyse* kan tolkes til å romme både Pólya (1957) sine *Bruk symmetri, Bruk direkte argumentasjon, Se etter et mønster, Bruk en modell, Jobb baklengs* og *Bruk en formel.* Pólya (1957) sine *Tegn et bilde* og *Vær genial* er jeg usikker på om kan plasseres under noen av Antonini (2006) sine kategorier. En kan være genial på flere forskjellige måter, og denne kan derfor knyttes til alle 3 kategoriene til Antonini (2006).

Strategiene til Lithner (2008) som ligger under *Imitert resonering* er litt vanskelige å plassere i forhold til Antonini (2006) sine *strategier*. Elever som gjenkaller fullstendige svar eller memorerte algoritmer i arbeid med vanlige oppgaver, vil kanskje ty til *Prøving og feiling* i arbeid med *Elevgenererte eksempler* siden en ofte ikke kan følge en fast algoritme i *generering av eksempler*. *Strategivalg* som ligger under Lithner (2008) sin *Kreative resonering* vil kunne sees i sammenheng både med Antonini (2006) sine *strategier Transformasjon* og *Analyse.*

Siden jeg hadde valgt *elevgenerte eksempler* som didaktisk tilnærming, var det naturlig for meg å velge en modell for *strategier* som allerede var knyttet til *Elevgenererte eksempler*. Dette ville gi meg større mulighet til å sammenligne funnene i min studie med eksisterende studier. Pólya (1957) har mange flere *strategier* enn Antonini (2006), og bruk av dem ville kanskje fått frem flere nyanser i datamaterialet mitt. Bruk av Lithner

(2008) sitt rammeverk passer ikke helt i forhold til *Elevgenererte eksempler* da memorerte svar eller memorerte algoritmer i utgangspunktet ikke kan benyttes. Jeg landet på å bruke Antonini (2006) sine *strategier* i min studie. Min didaktiske tilnærming med *Elevgenererte eksempler* var tungtveiende i den forbindelse.

2.4 Samtaleanalyse

Samtaleelementer er en vesentlig del av mine forskningsspørsmål. Derfor vil jeg i dette delkapittelet se nærmere på *samtaleanalyse*. Det finnes flere rammeverk for å analysere samtaler i klasserom. I denne forbindelse kan en for eksempel nevne Brendefur og Frykholm (2000), Mortimer og Scott (2003) og Drageset (2014). Brendefur og Frykholm (2000) presenterer fire ulike nivåer av kommunikasjon mellom lærer og elever. Mortimer og Scott (2003) har laget en todimensjonal modell for å beskrive en lærers tilnærming til kommunikasjon. Drageset (2014) har gjennom sin forskning utviklet et rammeverk med 13 kategorier som beskriver hvordan lærere bruker elever sine utsagn til å jobbe med matematikk. Felles for disse modellene er at de beskriver kommunikasjon i klasserommet der både lærer og elever er delaktige. I min forskning var jeg ute etter en modell som kunne brukes for å beskrive kommunikasjonen i matematikk mellom elever i arbeid med oppgaver, uten at nødvendigvis læreren var en del av kommunikasjonen. Den mest kjente og brukte modellen for denne typen kommunikasjon er Alrø og Skovsmose (2002) sin *Inquiry co-operation model* som forkortet blir omtalt som *IC-modellen*. *IC-modellen* ble opprinnelig utviklet for å studere hvordan elever kan jobbe sammen med en lærer i et *Undersøkelseslandskap* (Alrø og Skovsmose, 2002). Alrø og Skovsmose (2002) brukte også *IC-modellen* for å studere kommunikasjonen mellom elever uten lærer til stede. Denne fleksibiliteten i modellen, samt at det er den mest kjente og brukte modellen til å studere kommunikasjonen mellom elever uten lærer tilstede, gjorde at jeg valgte å bruke *IC-modellen* for å studere samtalene i min studie.

De ulike elementene i *IC-modellen* kan si noe om kvaliteten på dialogene som forekommer i klasserommet under arbeid med matematikkoppgaver. Når de dialogiske handlingene i modellen forekommer i undervisningen, kan de gi muligheter for læring med spesielle kvaliteter. For at dette skal kunne forekomme, må undervisningen legge til rette for undersøkende aktiviteter. Jeg ønsket å se om *Elevgenererte eksempler* kunne fungere som en slik *undersøkende aktivitet*.

IC-modellen består av 8 elementer som kan bidra til læring på bestemte måter. De åtte elementene er: Å *kontakte, Å oppdage, Å identifisere, Å advokere, Å tenke høyt, Å reformulere, Å utfordre og Å evaluere* (Alrø og Skovsmose, 2002)

Elementene i *IC-modellen* opptrer ikke i noen bestemt rekkefølge, men oppstår i forskjellige mønstre og kombinasjoner. Når de oppstår, ser det ut til at de har stor innflytelse på både lærerens og elevenes muligheter for å produsere nye erkjennelser sammen. Det er samtidig viktig å være oppmerksom på at *IC-elementene* ofte opptrer sporadisk og glimtvis. De er sjeldent tilstede i en hel undervisningstime eller i et helt samarbeidsforløp. Læringsprosesser gjennom dialog kan fort bli avbrutt av uenigheter, fastlåsninger av ideer, mangel på utfordringer, forsøk på overbevisning, gjetting o.l., som alle er helt vanlige elementer i en samtale (Alrø og Skovsmose, 2002) (Alrø og Skovsmose, 2006).

1. *Å kontakte* vil si å forsøke å komme på bølgelengde med sin samarbeidspartner og å sette seg inn i andres perspektiver, noe som er en forutsetning for at samarbeid kan finne sted. *Å kontakte* innebærer også å være til stede i samtalen og å være oppmerksom i forhold til hverandre og hverandres bidrag. Kontakt er med på å etablere en positiv relasjon mellom partene, og åpner for samarbeid. Opprettholdelse av allerede etablerte kontakt er også viktig i en gruppe. Dette kan for eksempel skje i form av å støtte, å bekrefte, å bruke humor og å stille undersøkende spørsmål og oppfølgingsspørsmål.

2. *Å oppdage* vil si å finne ut av noe man ikke visste eller var klar over på forhånd. Lærer og elever kan forsøke å oppdage nye eller allerede eksisterende perspektiver på forskjellige måter. Dette kan for eksempel være stille undersøkende, undrende, utvidende og oppklarende spørsmål. *Å oppdage* noe gjennom samarbeid kan være å utrykke og synliggjøre perspektiver på samtalens overflate, som igjen kan bidra til videre utforsking og utprøving av forskjellige muligheter. *Å oppdage* innebærer også å stille hypotetiske spørsmål og spørsmål av typen «*hva*» eller «*hvis*», som kan skape nye oppdagelser. *Å oppdage* er tett knyttet til om elevene har fått et eierskap til den undersøkende prosessen og det arbeidet de er i gang med.

3. *Å identifisere*. Ved å oppdage og utforske perspektiver vil det videre bli mulig å identifisere et faglig innhold, og å gjøre det synlig for alle deltakerne som arbeider sammen om oppgavene. *Å identifisere* kan innebære å komme med *matematiske* ideer ut fra gruppens tidligere felles oppdagelser. Hva-hvis spørsmål fra forrige kategori blir gjerne fulgt opp av hvorfor-spørsmål, med en undrende og åpen tilnærming fra elevenes side.

4. *Å advokere*. Når flere elever samarbeider, er det viktig å etablere et intersubjektivt fellesskap om det man allerede vet og kan. Det krever at man har en bevissthet om at det vil eksistere ulike perspektiver blant medlemmene i gruppen, og at hver og en av disse perspektivene kan bidra som ressurser i samtalen. Dette er viktig for å få frem egne synspunkter, ideer og forslag til undersøkelse, men samtidig være åpen og villig til å revurdere egen oppfattelse, for å oppnå en felles *forståelse* i gruppen. *Å advokere* innebærer også å kunne reflektere kollektivt, med et formål om å avklare en gitt *forståelsesmåte*. Dette er ikke det samme som å påstå eller å overbevise noen om at man har rett.

5. *Å tenke høyt* innebærer at tanker og ideer blir uttrykt mens det arbeides og undersøkes. Her blir tanker gjort om til ord, og er med på å offentliggjøre ideer og tanker som kan være en ressurs for gruppen. Denne kategorien innebærer også å stille hypotetiske spørsmål som elevene sammen som gruppe kan undersøke videre.

6. *Å reformulere* er et viktig element i dialoger hvor deltakere arbeider tett sammen for å forstå hverandre og å skape ny *forståelse* sammen. Denne kategorien innebærer å gjenta, å utfylle hverandre, og å parafrasere. Å parafrasere kan virke bekreftende i den form av at man uttrykker at man har hørt det som ble sagt. Slik kan deltakerne bekrefte en gjensidig *forståelse*, noe som også bidrar til å opprettholde kontakt i gruppen.

7. *Å utfordre* går ut på å stille spørsmål ved allerede oppnådde erkjennelser eller *forståelse* som er fremkommet. Dette blir gjerne gjort gjennom hypotetiske spørsmål som kan legge til rette for å utforske nye alternative muligheter. En betingelse for at *Å utfordre* skal bli vellykket, er at noen i gruppen tar

utfordringen. Om elever har fått eierskap til prosessen og griper utfordringen, kan dette være med på å introdusere et vendepunkt i undersøkelsen, siden et mulig resultat av *Å utfordre* er nye forslag til løsninger.

8. *Å evaluere* forekommer etter at elever har kommet frem til løsninger og svar på problemene de arbeider med i den undersøkende prosessen. Dette kan komme til uttrykk på mange måter, som for eksempel ved å påpeke feil, respondere med kritikk eller støtte, gi konstruktiv kritikk, gode råd, ubetinget oppbakking, bekreftelse eller ros.

Listen over følger beskrivelsen i Alrø og Skovsmose (2002).

2.4.1 Underkategorier av kategoriene i *IC-modellen*

Varhol (2017) har brukt Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* i sin masteroppgave og utviklet i den forbindelse noen underkategorier til noen av elementene i *IC-modellen*. *Å oppdage* er en av kategoriene i *IC-modellen* Varhol har delt inn i underkategorier. Hun skriver at det finnes forskjeller i utsagnene hun har plassert i denne kategorien. I noen av utsagnene stiller elevene *undersøkende spørsmål*, og i noen av utsagnene kommer de med *forslag til videre utprøving*. Ut fra disse forskjellene fant hun det dermed hensiktsmessig å dele kategorien *Å oppdage* inn i to underkategorier: *Spørsmål* og *forslag.*

A. *Spørsmål* innebærer en undrende, oppklarende, undersøkende eller utvidende spørsmålsstilling. *Spørsmål* kan også opptre sammen med forslag til ny løsning.
B. *Forslag* innebærer å komme med mulige løsninger og forslag til videre utprøving.

(Varhol, 2017)

Å advokere er en annen kategori i Alrø og Skovsmose (2002) som Varhol (2017) velger å dele i to underkategorier. I noen av utsagnene hun har plassert i kategorien *Å advokere*, argumenterer elevene for sine synspunkter gjennom å presentere egne tanker og ideer i form av *løsningsstrategier*. I flere av utsagnene bruker elevene ordet «*fordi*» og Varhol (2017) skriver at dette gjør at de åpner for at andre elever på gruppen skal kunne forstå hvordan de tenker, og la dem ta del i sin tankeprosess. Andre utsagn som hun har plassert i kategorien *Å advokere* skiller seg klart fra disse fordi det er rene påstander som ikke inneholder forsøk på *forklaring* eller *argumentasjon*. Disse elevutsagnene ser hun på som konkrete uttalelser der elevene enten kommenterer sin egen eller andres *løsningsstrategi*. Varhol (2017) definerer sine underkategorier av *Å advokere* slik:

A. *Argumentasjon* innebærer å presentere egne synspunkt ved å argumentere for sine påstander. Samtidig er man åpen for nye muligheter og å reflektere kollektivt.
B. *Påstand* innebærer å komme med et utsagn eller en påstand uten noen form for videre begrunnelse.

Underkategoriene til Varhol (2017) er slik jeg ser det en god utvidelse av *IC-modellen*. I likhet med Varhol (2017) fant jeg i mitt datamateriale også et tydelig skille i elevutsagn som hørte hjemme i *IC-modellens* kategorier *Å oppdage* og *Å advokere*. Derfor fant jeg det hensiktsmessig å bruke underkategoriene til Varhol (2017) for å få frem flere nyanser i datamaterialet mitt.

2.5 Oppsummering teori

Jeg har i dette kapittelet hatt flere perspektiver som alle har vært interessante og nødvendige for å legge grunnlaget for å svare på mine forskningsspørsmål. Teorikapittelet ble innledet med å se på ulike didaktiske tilnærminger en kunne valgt for mulig å fremme rikere muntlig aktivitet og dypere *forståelse*. Jeg var innom Skovsmose (1998) sine *Undersøkelseslandskap,* og så deretter nærmere på *Problemløsning* og *Elevgenererte eksempler.* Videre redegjorde jeg for valget om å bruke *Elevgenererte eksempler* som didaktisk tilnærming.

Mine forskningsspørsmål omhandler blant annet *forståelse,* og jeg gikk derfor nærmere inn på *forståelsestyper* og *matematiske kompetanser* og redegjorde for valget om å bruke Skemp (1976) sine *forståelsestyper*.

Strategi er også en viktig del av mine forskningsspørsmål og jeg så derfor nærmere på *løsningsstrategier* i matematikk. Jeg var i den forbindelse innom Pólya (1957), Lithner (2008) og Antonini (2006) og videre hvorfor jeg endte opp med å bruke Antonini (2006) sine *strategier* som kategorier i min studie.

Til slutt i teorikapittelet har jeg sett nærmere på *samtaleanalyse* i matematikk og bakgrunnen for å velge Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* som rammeverk for å analysere samtalene.

3 Metodiske valg og refleksjoner

Forskningsspørsmålene jeg har stilt er:

1. Hvilke typer *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelsestyper* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å *generere* egne *eksempler*?
2. Er det sammenheng mellom noen av variablene *strategi, samtaleelement, forståelsestype og antall vellykkede eksempler* i arbeid med *Elevgenererte eksempler*?

For å svare på disse spørsmålene har jeg måttet gjøre mange valg angående datainnsamling og analyse av data. Hva trenger jeg for å svare på disse forskningsspørsmålene? Jeg vil i metodekapittelet mitt begrunne valgene jeg har tatt i forbindelse med innsamlingen, bearbeidingen og analysen av datamaterialet mitt. Først vil jeg presentere forskningsdesignet og formålet med studien min. Deretter vil jeg redegjøre for innsamlingsprosessen og beskrive hvordan jeg samlet inn datamaterialet mitt og valg jeg har hatt i den forbindelse. Jeg vil så presentere analysearbeidet. Til slutt reflekterer jeg rundt studiens troverdighet, etiske forhold og mulige feilkilder.

3.1 Formål og forskningsdesign

Det ble raskt klart for meg at en kvantitativ tilnærming til datainnsamlingen, med for eksempel spørreskjema, ville være svært lite egnet for å svare på forskningsspørsmålene mine. Drivkreftene i min studie har vært ønskene om rikere *matematisk* muntlig aktivitet og dypere *forståelse* hos elevene mine. Dette blir også gjenspeilet i forskningsspørsmålene jeg har stilt. Drivkreftene og ønskene mine gjorde det naturlig for meg å velge en klasseromssituasjon som utgangspunkt. Jeg kunne også valgt en intervjusituasjon med et mindre utvalg av elever enn en hel klasse. En av styrkene ved dette kunne vært muligheten til å grave enda dypere i *forståelse* og *strategivalg*. En av svakhetene med en intervjusituasjon, ville vært at situasjonen for elevene ville være unaturlig sammenlignet med en «vanlig» skoletime. I en intervjusituasjon ville min tilstedeværelse være mer nær og kanskje påvirket oppførselen til deltakerne. Dette ville vært negativt for validiteten til forskningen min (Cohen m. fl., 2000). Jeg valgte derfor en matematikkøkt i en klasse som utgangspunkt. Veien videre fra dette utgangspunktet til valg av observasjon som datainnsamlingsmetode var kort, spesielt med tanke på forskningsspørsmålene mine.

Selv om utgangspunktet er observasjon og kvalitative data, har måten jeg har kategorisert og organisert dataene på generert kvantitative data. Disse kvantitative dataene har jeg analysert for å komme nærmer svaret på mitt andre forskningsspørsmål. I kapittel 3.5 kommer jeg nærmere inn på dette.

3.2 *Observasjon* som kvalitativ forskningsmetode

Observasjonsdata er attraktive siden de gir forskeren mulighet til å samle «levende» data fra «levende» situasjoner. Dette gir forskeren mulighet til å forstå kontekst, være åpen og induktiv, å se ting som kanskje ellers hadde gått tapt, å oppdage ting om deltakerne som de kanskje ikke hadde snakket fritt om i intervjusituasjoner, å komme videre fra persepsjonsbasert data (f.eks. meninger i intervju) og å få tilgang til personlig kunnskap. Fordi observerte hendelser er mindre forutsigbare, så er det en viss friskhet i denne type data sammenlignet med for eksempel spørreundersøkelser eller tester (Cohen m. fl. (2000)).

Observasjon kan være alt fra *sterkt strukturert* til *ustrukturert*. En *sterkt strukturert observasjon* har *observasjonskategoriene* klar på forhånd og forskeren vet akkurat hva han eller hun skal se etter. En *ustrukturert observasjon* vil være langt mindre klar på hva en er ute etter. Forskerne vil derfor gå inn i en situasjon og *observere* hva som skjer før de bestemmer seg for dens betydning for forskningen. I et nøtteskall vil en *strukturert observasjon* allerede ha sine hypoteser bestemt og vil bruke *observasjonsdataene* til å støtte eller motbevise disse hypotesene. På den andre siden vil en *halvstrukturert* - eller *ustrukturert observasjon* være mer *hypotesegenererende* enn *hypotesetestende* (Cohen m. fl., 2000).

Min observasjonsstudie ligger et sted mellom *semistrukturert* og *sterkt strukturert*. Jeg visste på forhånd at jeg ønsket å studere den muntlige aktiviteten til elevene som arbeidet med *Elevgenererte eksempler*, og jeg viste også at jeg ønsket å se på ulike *forståelsestyper* og *strategier*. I tillegg til å bruke ferdige kategorier fra litteraturen for *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelsestyper* var jeg også åpen for at det ville dukke opp ting i kategoriseringsprosessen som ikke passet med eksisterende kategorier fra litteraturen. Både på *strategier* og *forståelsestyper* utviklet jeg egne kategorier for å kunne plassere dataene som jeg opplevde ikke passet inn i de ferdige kategoriene. Og under samtaleanalysen fant jeg det hensiktsmessig å dele en av kategoriene i Alrø og

Skovsmose (2002) sin *IC-modell* inn i to underkategorier.

Jeg gjorde lydopptak av alle elevgruppene i klassene som jeg samlet inn data i. Som jeg kommer inn på senere var dette ikke mine egne klasser, men klassene til lærere nettverket mitt. I disse klassene gjennomførte jeg selv et undervisningsopplegg med *Elevgenererte eksempler* som didaktisk tilnærming. Jeg hadde derfor mulighet til å observere elevene under undervisningsopplegget i tillegg til samle inn lydopptakene og det skriftlige arbeidet til elevene for å kunne analyse disse i etterkant. Men siden jeg hadde ansvar for å styre undervisningsøkten og legge frem oppgavene elevene skulle jobbe med, var det begrenset hvor omfattende observasjon jeg hadde mulighet til å gjøre under undervisningsøkten. Jeg gjorde ingen notater underveis, men stolte på at lydopptaket og skriftlige arbeidet ville gi meg hovedtyngden av det datamaterialet jeg trengte. Observasjoner av direkte verdi under undervisningsøkten, begrenset seg til hvilke digitale hjelpemidler elevene benyttet seg av under arbeidet med oppgavene (der dette var tillatt). En annen verdi av observasjonene jeg gjorde under undervisningsøkten, var at det var lettere å se for seg elevene når jeg hørte gjennom og transkriberte lydopptakene i etterkant.

3.3 Datainnsamlingsprosessen

Jeg vil i denne delen av metodekapittelet fortelle om prosessen med innsamling av data. I samarbeid med tre lærere på videregående skoler i Bergen, gjennomførte jeg en pilotundersøkelse i april 2018 og hovedundersøkelse i mai 2018. Jeg vil først presentere valg av skole og trinn, og deretter fortelle om pilotundersøkelsen og hovedundersøkelsen.

3.3.1 Valg av skole og trinn

Jeg har tidligere undervist mange år i faget 1T (de som har valgt teoretisk matematikk i første klasse på videregående skole). I en av 1T-klassene jeg hadde, lagde jeg og testet jeg ut en del eksempeloppgaver i trigonometri. Dette fungerte bra, og jeg valgte å bygge videre på disse eksempeloppgavene da jeg skulle lage oppgaver til datainnsamlingsprosessen. Jeg tok kontakt med noen av 1T-lærerne i nettverket mitt og forhørte meg om det var mulig å gjennomføre et undervisningsopplegg med *Elevgenererte eksempler* i trigonometri og samle inn data i deres klasser. Jeg fikk napp hos flere og fikk avtalt tidspunkt for gjennomføring av pilotundersøkelse på en skole, og tidspunkt for gjennomføring av hovedundersøkelsen på en annen skole. Både pilot- og hovedundersøkelsen ble gjennomført i 1T-klasser, og begge steder var klassene ferdige med ordinær undervisning i trigonometri.

3.3.2 Pilotundersøkelsen

På skolen der jeg gjennomførte pilotundersøkelsen var jeg innom 3 uker før og informerte om forskningsprosjektet og delte ut informasjonsskriv om hva deltakelsen i studien ville innebære. På denne skolen var det to små 1T-klasser, og i forbindelse med datainnsamling til forskningsprosjektet mitt ble begge klassene slått sammen til en klasse. Totalt i begge klassene var det 24 elever. 6 av elevene meldte seg for å være med på en pre- og posttest i forkant og etterkant av undervisningsopplegget. På forhånd sa alle elevene seg villige til å gjennomføre undervisningsopplegget i trigonometri, bli gjort lydopptak av og levere inn det skriftlige arbeidet. Deltakelsen i studien var selvsagt valgfri, og elevene kunne på hvilket som helst tidspunkt trekke seg fra studien. Det var tilbud om alternativt undervisningopplegg for de som ikke ønsket å være med i studien. Se informasjonsskrivet, vedlegg 8.6. Inspirert av Amdal m. fl. (2011) jobbet elevene sammen i par og med hjelp fra lærerne var de satt sammen med en annen elev med noenlunde likt matematisk nivå. Hvert par hadde en lydopptaker (mobiltelefon). To av elevparene i pilotundersøkelsen leverte bare inn det skriftlige arbeidet sitt og valgte å ikke levere inn lydfilene som var tatt opp under undervisningsopplegget.

Pretest

Dagen før jeg skulle gjennomføre undervisningsopplegget, gjennomførte jeg en pretest på de 6 elevene som hadde meldt seg. Hovedhensikten med pre- og posttesten i pilotundersøkelsen, var å undersøke om det var mulig å observere en utvidelse av *eksempelrommene* til elevene som følge av deltakelse i undervisningsopplegget. De 6 elevene ble delt i 3 par der jeg med hjelp fra matematikklærerne deres plasserte de sammen med en annen elev med noenlunde likt matematisk nivå. Denne typen inndeling av elevene var inspirert av Amdal m. fl. (2011) og ble gjort for å legge til rette for en mer balansert matematisk diskusjon mellom elevene. Med stor forskjell i matematisk nivå så jeg for meg at den sterkeste eleven ville gjøre for stor del av arbeidet. De 6 elevene som skulle gjennomføre pretesten dagen før undervisningsopplegget, ble hentet i klasserommet sitt og tatt med til et eget lite klasserom. De tre gruppene fordelte seg rundt i rommet med litt avstand mellom seg, fikk utlevert ark og gradskiver, og hadde klar mobiltelefon for å gjøre lydopptak av samtalen de hadde under arbeidet med oppgavene. Oppgaven på pretesten var:

Lag eksempler på minst 6 ulike trekanter med areal lik 10. Skriv på mål på nok sider og vinkler til at arealet kommer tydelig frem.

I posttesten som ble gjort etter undervisningsopplegget, var oppgaven helt lik, bare med areal lik 7 i stedet for areal lik 10. Det ble tatt lydopptak av hvert par for å få frem den matematiske diskusjonen. Jeg var tilstede mens elevene jobbet for å kunne svare på spørsmål. Etter å ha sett litt hvilke typer trekanter elevene laget, oppmuntret jeg dem til å gå litt mer i ytterkanten av sine *eksempelrom* på trekanter ved å be dem om å lage en «*skikkelig sær*» trekant med areal lik 10 og også «*kan dere regne ut arealet på en annen måte enn grunnlinje ganger høyde delt på 2?*». Hele pretesten med informasjon og arbeid med oppgaver ble gjort i løpet av 30 minutt.

Undervisningsopplegg med hele klassen med datainnsamling

Dagen etter pretesten gjennomførte jeg undervisningsopplegget med hele klassen (som var to klasser satt sammen til en klasse). Som på pretesten ble alle elevene plassert sammen i par med noenlunde likt matematisk nivå. De 6 elevene som hadde gjennomført pretesten var med her også og jobbet i de samme parene som de hadde gjort på pretesten. Oppgavene ble gitt en om gangen ved hjelp av PowerPoint og projektor. Neste oppgave ble gitt når alle var ferdige med den forrige oppgaven. Vi hadde 90 minutt tilgjengelig i undervisningsøkten. Både jeg og begge lærerne til klassene var tilstede under hele undervisningsøkten. Jeg hadde i utgangspunktet 10 oppgaver, men etter 7 oppgaver var klokken blitt så mye at jeg gikk videre til spørreundersøkelsen for å få tid til den. Her svarte elevene anonymt på 3 spørsmål: «*Hva synes du om å arbeide på denne måten? (Med å lage eksempler selv)*», «*Hva tror du at du lærer mest av, løse oppgaver fra boken eller lage egne eksempler? Forklar.*» og «*Ville du likt å arbeide mer med å lage egne eksempler? Forklar hvorfor/hvorfor ikke?*». Spørreundersøkelsen ble gjennomført på ark.

Posttest

Dagen etter undervisningsopplegget gjennomførte jeg posttesten med de samme 6 elevene i de samme parene. Vi gikk til det samme klasserommet som vi hadde brukt på pretesten, og elevene løste en tilsvarende oppgave som på pretesten, bare med et annet tall. «*Lag eksempler på minst 6 ulike trekanter med areal lik 7. Skriv på mål på nok sider og vinkler til at arealet kommer tydelig frem*». Alle de tre parene var ferdige med oppgaven innen 15 minutt.

3.3.3 Hovedundersøkelsen

Hovedundersøkelsen på masteroppgaven min ble gjort rundt en måned etter pilotundersøkelsen. Den ble gjort på en annen videregående skole, men fremdeles i en 1T-klasse. I hovedundersøkelsen valgte jeg å ikke ha pre- og posttest. Dette gjorde jeg fordi jeg erfarte gjennom pilotundersøkelsen at pre- og posttesten min ikke var en god metode å eventuelt påvise endringer i *eksempelrommene* til elevene. I Watson og Mason (2005) blir *eksempelrom* sammenlignet med et spiskammers. Det kan inneholde mye, men ikke alt er like tilgjengelig. Når man generer eksempler, er den første innskytelsen eller idéen ofte et eksempel som ligger lett tilgjengelig i ens *eksempelrom*. Hvis elevene hadde kommet med andre eksempler på posttesten sammenlignet med pretesten, ville det være vanskelig å kunne konkludere med at *eksempelrom*met deres var utvidet, kanskje de bare valgte andre eksempler som allerede var i *eksempelrommet* deres, bare ikke like tilgjengelig som *eksemplene* på pretesten. I utgangspunktet var tanken min at et av forskningsspørsmålene mine skulle omhandle en eventuell utvidelse - eller mangel på utvidelse av elevenes *eksempelrom*, men i mangel på en god metode for å undersøke dette, hadde jeg ikke dette med i hovedundersøkelsen.

Under hovedundersøkelsen var noen av eksempeloppgavene på pilotundersøkelsen byttet ut og erstattet av andre eksempeloppgaver. Jeg erfarte gjennom pilotundersøkelsen at det ikke kom like interessante diskusjoner på de enkle eksempeloppgavene som på de litt vanskeligere eksempeloppgavene. Jeg byttet derfor noen av de enkle oppgavene ut med noen andre litt vanskeligere eksempeloppgaver som jeg hadde laget. Oppgavene som ble gitt på pilot- og hovedundersøkelsen finnes som vedlegg 8.1, 8.2 og 8.3. I hovedundersøkelsen hadde jeg mye tilgjengelig tid. 3 skoletimer med et langt spisefriminutt mellom 2. og 3. skoletime. Jeg og læreren til klassen så for meg at det ville være bedre å gjennomføre undervisningsopplegget i en sammenhengene bolk. Derfor ble det gjennomført i de to første skoletimene og det lange friminuttet, og elevene fikk spisefriminuttet sitt i den siste skoletimen. Hvor lurt dette var kan i etterkant diskuteres, flere av elevene gav uttrykk for at de ble veldig sultne.

Jeg begynte økten med å informere om forskningsprosjektet og levere ut informasjonsbrev. Av 27 elever som var tilstede i klassen denne dagen, valgte 2 elever å ikke være med på forskningsprosjektet. De 25 resterende elevene ble delt i 12 grupper, 11 grupper med 2 elever i hver og en gruppe med 3 elever. I hver gruppe ble det gjort lydopptak med mobiltelefon. Av de 12 gruppene valgte 2 av gruppene å ikke levere inn lydopptak. Noen av gruppene leverte inn ufullstendige lydopptak grunnet glemsel og tekniske problemer. Som i pilotundersøkelsen ble elevene satt sammen med andre elever med noenlunde likt matematisk nivå, og oppgavene ble gitt en om gangen ved hjelp av PowerPoint og projektor. Det var stor forskjell i hvor lang tid de ulike gruppene brukte på å løse eksempeloppgavene, og mange av gruppene ble sittende å vente på neste oppgave. Jeg prøvde å finne en god balanse mellom at de som var først ferdig ikke måtte vente for lenge og at så mange som mulig var ferdig før neste oppgave ble gitt. For meg var hovedmålet med å gi oppgavene ved hjelp av PowerPoint og projektor at elevene ikke skulle få se alle oppgavene på en gang. Flere av oppgavene var ganske like som de foregående, men med flere betingelser som måtte oppfylles. Etter egen erfaring er det mer interessant å jobbe med eksempeloppgavene uten å vite betingelsene på neste oppgave. En del av elevene gav i spørreskjemaet uttrykk for at det var en del venting og at de ikke fikk løst så mange oppgaver som de ellers kunne fått gjort. I ettertid har jeg tenkt på en løsning med en bunke med oppgaver til hver elevgruppe liggende fremme hos meg. Elevene kunne så komme frem, levere inn ferdig oppgave og få utdelt ny oppgave. Dette hadde gitt mindre ventetid for elevene og bedre oversikt for meg. Jeg kunne da lettere vurdert hvilke eksempler som hadde vært passene å ha med i en oppsummering av undervisningsøkten.

Det skriftlige arbeidet til elevene og lydopptakene av elevdiskusjonene ble samlet inn. To av gruppene valgte å bare å levere inn det skriftlige arbeidet og ikke lydopptakene. En gruppe leverte inn det skriftlige arbeidet, men bare lydopptak av 1 oppgave grunnet tekniske utfordringer. 9 av 12 gruppene leverte inn fullstendige lydopptak og skriftlig arbeid.

3.3.4 Intervju med lærere

Både de to lærerne til klassene jeg gjorde pilotundersøkelsen i og læreren til klassen jeg gjorde hovedundersøkelsen i ble bedt om å svare på hvordan de opplevde den muntlige aktiviteten til elevene under undervisningsopplegget som ble gjennomført sammenlignet med en mer vanlig matematikktime. Lærerne i pilotundersøkelsen svarte på dette spørsmålet per epost i etterkant av undervisningsopplegget. Læreren i hovedundersøkelsen gjorde jeg lydopptak av rett etter hovedundersøkelsen var ferdig.

3.4 Transkripsjon

En transkripsjon blir ofte sett på som en nøytral prosess, men den er likevel aldri helt verdinøytral. Valg som for eksempel å omskrive fra dialekt til nøytralt skriftspråk, standardisere talesyntaksen, sette komma og punktum på utvalgte steder og om man skal ta med stotring og pauser er alle valg som blir gjort av den som transkriberer (Sollid, 2013).

Tre av lydopptakene fra pilotundersøkelsen og alle tilgjengelige lydopptak fra hovedundersøkelsen har jeg transkribert. Lydopptakene fra pilotundersøkelsen og lydopptakene fra tre av gruppene i hovedundersøkelsen, transkriberte jeg i tekstbehandlingsprogrammet Word. På dette tidspunktet i transkriberingsprosessen kom jeg over NVivo som er et kraftig program for tekstanalyse og kvalitativ analyse av video, lydopptak og intervjudata. Lydopptakene fra 7 av gruppene transkriberte jeg i NVivo.

Jeg valgte å skrive dialekt om til bokmål med tanke på anonymitet. Stotring har jeg tatt med, kortere pauser har jeg angitt med prikker (…) lengre pauser angav jeg ved å skrive «tenkepause», eller «tasting i CAS i GeoGebra» eller bare «pause». På lydopptakene jeg har transkribert i NVivo får alle utsagn et tidsstempel på seg, og man kan derfor tallfeste hvor lang tid et utsagn eller en pause var. I NVivo er det også veldig lett å finne tilbake til utsagnet på lydopptaket dersom man skulle være i tvil på om man har transkribert det riktig. Elevene arbeidet med oppgavene i om lag 1 time og 20 minutter og med lydopptak fra 10 elevgrupper i hovedundersøkelsen har det vært et betydelig antall timer med lydopptak å transkribere. Cohen m. fl. (2000) skriver at transkripsjon er et avgjørende skritt, for det er potensial for massivt datatap, forvrengning og reduksjon av kompleksitet. Prefikset *trans* indikerer også et skifte av tilstand eller form; transkripsjon er selektiv transformasjon. Jeg har forsøkt å få med noe av det sosiale spillet mellom elevene ved å ta med latter (ha, ha, ha) og tenke- og responslyder (for eksempel «hmm» for tenkelyd).

3.5 Analyse

3.5.1 Koding og kategorisering

Som jeg har redegjort for i teorikapittelet, valgte jeg å ta utgangspunkt i Alrø og Skovsmose (2002) sine samtalekategorier, Antonini (2006) sine kategorier for *strategier* i arbeid med *Elevgenererte eksempler* og Skemp (1976) sine kategorier for *forståelse*. Jeg har også utviklet egne kategorier, noe jeg kommer nærmere inn på i kapittel 4.

Kodingen av *samtaleelementer* gjorde jeg i NVivo. Hvert elevutsagn ble kodet til et av Alrø og Skovsmose (2002) sine *samtaleelementer* og Varhol (2017) sine underkategorier av disse *samtaleelementene*. Ved å kode alle utsagnene på denne måten har jeg fått kvantitative data på *samtaleelementene* fra mitt datamateriale.

Jeg har ikke kodet hvert utsagn til en *strategi* eller *forståelsestype*. Det var de samlede dataene på en oppgave for en elevgruppe, (lydopptak og skriftlige arbeid) som dannet grunnlaget for hvilken *strategi* og *forståelsestype* oppgaven ble kodet med. Denne kodingen og registreringen gjorde jeg i regnearkprogrammet Excel. Jeg skulle lete etter sammenhenger mellom variablene *samtaleelementer*, *strategier*, *forståelse* og *vellykkede eksempler*. I den forbindelse valgte jeg å bruke *antall oppgaver samtaleelementet* var til stede hos en gruppe, og *ikke totalt antall forekomster* av *samtaleelementet* hos en gruppe. Når jeg skulle lete etter sammenhenger var det interessante for meg å se om *samtaleelementet* forekom eller ikke på en oppgave, ikke det totale antallet forekomster. I denne registreringen ble ikke antall ganger et *samtaleelement* var til stede i arbeidet med en oppgave registrert, bare at det var til stede. Her ble også hver oppgave kodet til *Vellykket* eller *Ikke vellykket* alt etter om eksempelet elevene hadde laget oppfylte de gitte betingelser.

3.5.2 *Analyse* av sammenhenger mellom variabler

Gjennom mitt andre forskningsspørsmål søker jeg å finne svar på om det er noen sammenhenger mellom variablene *strategi*, *samtaleelementer*, *forståelsestyper* og *antall vellykkede eksempler*.

Korrelasjonsanalyse vil gi svar på om det er sammenhenger mellom to variabler. I leting etter sammenhenger i datamaterialet mitt var det derfor svært naturlig å bruke dette. I kapittel 5 i oppgaven min, legger jeg frem alle korrelasjonsanalysene jeg har gjort på datamaterialet mitt. Jeg gjorde korrelasjonsanalysene i Excel.

Cohen m. fl. (2000) skriver at korrelasjonsteknikker svarer på om det er sammenheng mellom to variabler, hvilken retning sammenhengen er og hvilken styrke sammenhengen har.

Korrelasjonskoeffisienten varierer mellom + 1,0 (indikerer perfekt positiv korrelasjon) og -1,0 (indikerer perfekt negativ korrelasjon) (Cohen m. fl., 2000).

Hvilken korrelasjonskoeffisient som er statistisk signifikant kommer an på størrelsen på datasettene og hvor strengt man setter signifikansnivået. Tabell 3-1 under viser hvilke verdier av korrelasjonskoeffisienter som er statistisk signifikant ved datasett på 9 punkter med ulike signifikansnivå. Siden jeg har fullstendige lydopptak fra 9 av elevgruppene fra hovedundersøkelsen, har datasettene jeg har kjørt korrelasjonsanalyser en størrelse på 9 punkter. Signifikansnivået tar utgangspunkt i at det er en «Two-tailed test». En «Two-tailed test» må velges når man ikke på forhånd har hypoteser om retningen på korrelasjonene.

TABELL 3-1 VERDIER PÅ KORRELASJONSKOEFFISIENTER MED ULIKE SIGNIFIKANSNIVÅ NÅR DATASETTENE HAR 9 PUNKTER

Størrelse på datasett (antall tilfeller)	Signifikansnivå 0,05	Signifikansnivå 0,02	Signifikansnivå 0,01	Signifikansnivå 0.001
9	0,666	0,750	0,798	0,898

Ved å ha større størrelse på datasettene mine hadde lavere verdier av korrelasjonskoeffisientene kunne gitt samme signifikansnivå. Signifikansnivået gjelder både når korrelasjonskoeffisientene har positive og negative fortegn.

3.6 Studiens troverdighet

3.6.1 Reliabilitet

Reliabilitet handler om studien er til å stole på, om observasjonene er presise og om studien er etterprøvbar. Det vil si om dataene en har funnet er konsistente over tid og om de vil kunne reproduseres for eksempel med et annet, liknende utvalg (Cohen m. fl., 2000). Sollid (2013) skriver at det er et kvalitetsstempel hvis en gjentakelse av en undersøkelse måler det samme hver gang. Dette kan imidlertid være vanskelig i en kvalitativ studie og de nøyaktige funnene kan være vanskelig å reprodusere (Sollid, 2013). Ulike forskere som studerer det samme kan derfor ende opp med svært ulike resultater.

Datainnsamlingen bør gjøres på en måte som minimerer feil og det må bli lagt til rette for at det som blir registrert av forskeren i størst mulig grad stemmer med det som faktisk skjedde. Uten noen form for opptak av lyd eller video ville det være umulig for meg å registrere de ulike *elevdialogene*, *strategiene* og *forståelsestypene*. For å minimere påvirkningen av opptaksenhetens tilstedeværelse, valgte jeg å kun bruke lydopptakere og ikke video. Ulempene med kun lydopptak sammenlignet med også å ha video, er at jeg ikke har kunnet tolke kroppsspråk eller se direkte akkurat hva elevene skrev eller jobbet med under et utsagn. Min opplevelse var at dialogen mellom elevene i stor grad røpte hva de skrev. Jeg fant også lett samsvar mellom lydopptaket og det skriftlige arbeidet jeg hadde tilgjengelig i etterkant. Ved hjelp av lydopptakene og det skriftlige arbeidet mener jeg at det som er registrert i stor grad stemmer med det som faktisk skjedde. I etterarbeidet med det transkriberte datamaterialet mitt har jeg kategorisert etter kategorier fra eksisterende litteratur, og jeg har også laget noen egne kategorier. Dersom en annen forsker hadde tatt utgangspunkt i mine rådataer og skulle kategorisert dem, ville denne forskeren muligens tolket noe av dataene annerledes og kanskje endt opp med andre funn. For å øke denne typen reliabilitet på forskningsarbeidet mitt, vurderte jeg å spørre en medstudent om å kategorisere noe av datamaterialet mitt for å sammenligne med mine vurderinger. En slik kvalitetssikring av denne delen av reliabiliteten hadde vært ønskelig. Jeg endte opp med å selv gå gjennom datamaterialet flere ganger for å sjekke at jeg i alle fall var enig med min egen kategorisering. Denne prosessen var lærerik, og jeg fikk finslipt mine egne vurderinger og ble mer konsistent og nøyaktig i mine kategoriseringer. I kapittel 4 har jeg gitt utdypende og varierte eksempler på mine kategoriseringer for at leseren skal kunne gjøre seg opp en mening om mine vurderinger i kategoriseringsarbeidet. Dette kan kanskje være med å øke denne typen av reliabilitet til forskningen min. Cohen m. fl. (2000) kaller denne typen reliabilitet for «intra- and inter-rater reliability».

3.6.2 Validitet

Validitet er et mål på gyldigheten til forskningen. Er forskningsdataene troverdige? Er datamaterialet og metoden egnet til å finne svar på de forskningsspørsmålene man har stilt? Reliabilitet er en forutsetning for disse tingene, men ikke tilstrekkelig. Validitet handler i tillegg om blant annet valg av passende metode og i hvilken grad utvalget er representativt. Cohen m. fl. (2000) skriver at det er spørsmål om to typer validitet i observasjonsbasert forskning. Den eksterne validiteten har med den subjektive og idiosynkratiske naturen til deltakeren å gjøre. Hvordan vet vi at resultatene av denne ene undersøkelsen gjelder for andre situasjoner? Den interne validiteten relaterer til frykt for at observatørens sine bedømmelser blir påvirket av deres nærme involvering i gruppen. En ting å ta stilling til er i hvor stor grad observatørens (eller lydopptakerens) tilstedeværelse påvirker oppførselen til deltakerne. Jeg ser for meg at tilstedeværelse av videokameraer kanskje kunne påvirket oppførselen til deltakerne i større grad enn lydopptakere. Lydopptakere er mer diskret, og min opplevelse etter å ha hørt gjennom og transkribert lydopptakene, er at lydopptakerens tilstedeværelse ikke påvirker arbeidet og dialogen til elevene i nevneverdig grad. Jeg forsøkte å gjøre min rolle og fysiske tilstedeværelse under undervisningsopplegget på en måte som påvirket elevene i minst mulig grad. Det var den muntlige aktiviteten fra elev til elev jeg var ute etter å samle inn, og min involvering i elevenes arbeid begrenset seg til å klargjøre oppgavene som var gitt. Disse tingene kan ha vært med å øke denne delen av den interne validiteten på forskningen min. Cohen m. fl. (2000) skriver at for å sikre validiteten må en pilot ha blitt utført for å sikre at observasjonskategoriene selv er hensiktsmessige, uttømmende, diskrete, klare og effektive for å nå målet med forskningen. Jeg gjennomførte en pilot, transkriberte deler av datamaterialet fra piloten og fikk testet flere av kategoriene mine før hovedinnsamlingen av data.

3.7 Etiske forhåndsregler

I forskningsarbeidet mitt har jeg forsøkt så godt det har latt seg gjøre å følge de etiske retningslinjer som foreligger for kvalitativ forskning. Et viktig prinsipp i denne sammenhengen er informert samtykke. I følge Kvale & Brinkmann (2015) betyr dette at forskningsdeltakerne informeres om undersøkelsens formål, hovedtrekk i designen samt mulige risikoer eller fordeler ved å delta i prosjektet. I forskningsprosjektet har alle informanter som ble observert gitt et informert, frivillige samtykke til deltakelse. De kunne når som helst trekke seg fra studien og studien ble meldt inn til og godkjent av NSD etter at jeg hadde gjort noen justeringer om anonymitet i informasjonsskrivet på NSD sin forespørsel (se vedlegg 8.5 og 8.6 for meldeskjema og svar fra NSD). Det ferdige informasjonsskrivet ligger som vedlegg 8.7.

NSD presiserte at ved videoobservasjon eller lydopptak under observasjon i skole må det sørges for et alternativt opplegg for ungdommer som ikke ønsker delta i prosjektet. Dette sørget jeg for både i pilotundersøkelsen og hovedundersøkelsen.

To av elevgruppene i hovedundersøkelsen valgte å ikke levere inn lydopptak og to elever valgte et alternativt opplegg i stedet for å være med på forskningsopplegget mitt.

Deltakernes anonymitet har jeg forsøkt å bevare, for eksempel ved å ikke forske på mine egne elever, å omskrive dialekter i intervjuene til bokmål og ved å ikke oppgi detaljer om skole, kjønn og alder. Alle navn som er brukt i elevdialogene i kapittel 4 er fiktive.

3.8 Feilkilder

Det er flere feilkilder som kan trekkes frem i min studie. En av de mulige feilkildene er oppgavesettene jeg brukte. Jeg har laget eksempeloppgavene selv inspirert av Watson og Mason (2005) sin bok om *elevgenerte eksempler*. Oppgavene (se vedlegg 8.3) ble kvalitetsvurdert både av veilederen min og Anne Bjørnestad som er medforfatter av artikkelen *Elevgenererte eksempler* i *Tangenten* (Amdal m. fl., 2011). Selv om oppgavene er gjennomtenkte og kvalitetsvurdert, kan en se for seg at oppgaveformuleringene er uvante for elevene og at mange nesten like oppgaveformuleringer kan være forvirrende og føre til andre resultater i forskningen min enn jeg kanskje hadde fått med å velge andre oppgaver og eller andre tema for oppgavene.

Videre kan utvalget av elever være en feilkilde. Jeg kan ha truffet et veldig spesielt utvalg elever som gjør at resultatene i studien min kanskje har blitt forskjellig enn hvis andre utvalg av elever hadde blitt brukt.

Jeg har kategorisert 2583 elevutsagn til forskjellige *samtalekategorier.* Jeg har gått gjennom datamaterialet flere ganger og under disse gjennomgangene endret hvilken *sametalekategori* noen av elevutsagnene er plassert under. Disse endringene har bakgrunn i at jeg har blitt bedre kjent med *samtalekategoriene* og datamaterialet når jeg har jobbet lenge med det. Derfor har jeg tolket noen av utsagnene annerledes på andre eller tredje gjennomgang enn ved de første gjennomgangene. For å kvalitetssikre kategoriseringen av *samtaleelementer* burde flere gått gjennom datamaterialet og kategorisert det. Dette kunne fått frem mulige mistolkninger jeg har gjort i kategoriseringene av *samtaleelementene*. At dette ikke er gjort kan være en mulig kilde til feil.

Jeg har også kategorisert 90 oppgaver til *strategi* og *forståelsestyper.* En kvalitetssjekk av mine vurderinger her ved å få andre til å gå gjennom datamaterialet mitt, kunne også vært gjort. Mangelen av denne kvalitetssjekken i min studie kan også være en feilkilde.

Disse feilkildene er generelle og ganske naturlige i arbeidet med kvalitativt datamateriale. Jeg har etterstrebet å legge frem datamaterialet mitt så presist som mulig, men det vil alltid være noen kilder til feil i denne typen forskning.

4 Resultat og analyse av *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelse*

I dette kapittelet søker jeg svar på mitt første forskningsspørsmål:

1. Hvilke typer *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelsestyper* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å *generere* egne *eksempler*?

I etterarbeidet med datamaterialet mitt så jeg først på samtalene. Jeg registrerte hvilke *samtaleelementer* som var til stede i datamaterialet mitt. Her brukte jeg Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* og Varhol (2017) sine underkategorier. Underveis vurderte jeg hvorvidt datamaterialet mitt kunne danne grunnlag for nye *samtaleelementer* eller nye underkategorier av Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Videre har jeg sett på *strategier*; hvilke av Antonini (2006) sine *strategier* jeg kunne registrere, og om jeg kunne finne *strategier* som ikke er dekket under Antonini (2006) sine. Jeg har så sett på hvilken type *forståelse* som er synlig i arbeidet med oppgavene. Også her har jeg vært åpen for å finne *forståelsestyper* som ikke er dekket av Skemp (1976) sine. Jeg registrerte også om oppgavene var vellykket løst eller ikke. Som jeg var inne på i metodekapittelet, brukte jeg programmet NVivo for å kode *samtaleelementene* og Excel for å registrere *strategier*, *forståelsestyper*, *vellykkede eksempler* og antall oppgaver med *samtaleelementene* til stede.

Dette kapittelet er en fremstilling av ulike *samtaleelementer*, *strategier*, *forståelsestyper* og «nakne» tall fra mitt datamateriale. Diskusjonene av funnene i dette kapittelet kommer i kapittel 6. Jeg presenterer også nye kategorier jeg har funnet det hensiktsmessig å lage i arbeidet med datamaterialet mitt. Leting etter svar på mitt andre forskningsspørsmål kommer i kapittel 5.

Dette kapittelet er bygd opp av fire underkapitler: I de to første delkapitlene ser jeg på *samtaleelementer* og den *matematiske diskusjonen*, i det tredje delkapittelet ser jeg på *strategier* og i det siste delkapittelet ser jeg på *forståelsestyper* og *antall vellykkede eksempler*.

4.1 Den *matematiske* diskusjonen, typiske eksempler fra mitt datamateriale på de ulike elementene i *IC-modellen*

Jeg vil i dette delkapittelet komme med typiske eksempler på de ulike elementene i *IC-*

modellen fra datamaterialet mitt. I eksemplene mine kan elevutsagnene være løsrevet fra sin kontekst og jeg viser ikke alltid fullstendige dialoger, men lister opp noen eksempler og gir mine kommentarer for å gi leseren et større innblikk i hvordan jeg har kategorisert.

4.1.1 Å kontakte

Denne kategorien fra Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* inneholder kort fortalt å *delegere oppgaver, søke støtte og hjelp, blikk, latter, begeistring, frustrasjon, «high-five» og andre kroppslige bevegelser og gi bekreftelse som for eksempel ja, nei og hmm.* Siden denne kategorien inneholder en del forskjellige typer utsagn, har jeg med flere eksempler. Jeg har ingen videoopptak av elevdiskusjonene og gjorde heller ingen notater for å fange opp kroppslige bevegelser, så jeg har tatt utgangspunkt i det som ble fanget opp av lydopptakene.

I eksempelet under arbeider Beate og Sonja med å tegne hver sin trekant på *Oppgave 2: Lag et eksempel på en trekant der en av vinklene er større en 90° med areal lik 6.*

> Beate: «Min ble sånn da ...»
> Sonja: «Å ja, han er jo egentlig ganske lik»
> Beate: «Wow, ja ...»

Beate har laget et forslag og *søker støtte og bekreftelse* hos Sonja for forslaget sitt ved å si «Min ble sånn da ...». Sonja *bekrefter* forslaget til Beate og konstaterer at Beate sitt forslag er ganske likt hennes eget ved å si «Å ja, han er jo egentlig ganske lik». Beate *bekrefter* tilbake og *viser begeistring* med å si «Wow, ja ...». Alle disse utsagnene hører derfor tydelig hjemme under Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å kontakte.*

I eksempelet under arbeider Gunvild og Troy med *Oppgave 2: Lag et eksempel på en trekant der en av vinklene er større en 90° med areal lik 6.*

> Gunvild: «Ha, ha, ha. Hvorfor skal den være så vanskelig?»

Gunvild *ler* og *viser frustrasjon* ved å si «Hvorfor skal den være så vanskelig?» Begge disse elementene gjør at dette utsagnet tydelig kommer inn under Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å kontakte.*

I eksempelet under arbeider Kjell og Jan med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $\sin A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Kjell: «Jeg bruker bare test og fail metoden, du kan sette det opp som en likning.»

Kjell *delegerer oppgaver* og dette utsagnet kommer derfor tydelig inn under Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å kontakte.*

4.1.2 *Spørsmål*, underkategori av *Å oppdage*

Spørsmål er en underkategori Varhol (2017) har laget under *samtaleelementet Å oppdage* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne underkategorien inneholder kort fortalt *å stille undrende og undersøkende spørsmål*.

I eksempelet under arbeider Lise og Ida med *Oppgave 6: Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6*.

> Lise: «Hva mer vet vi om trekanten? 30, 60, 90. Den ganger den er 6. Kunne vi egentlig brukt arealsetningen, kunne vi ikke? Det synes jeg vi skulle få lov til.»

Lise og Ida har kommet frem til at ved å dele en likesidet trekant i to identiske deler vil de få 2 trekanter med vinkelstørrelser på 30, 60 og 90 grader. Lise stiller et *undrende spørsmål*: «Kunne vi egentlig brukt arealsetningen, kunne vi ikke?». Dette utsagnet hører derfor hjemme under Varhol (2017) sin underkategori *Spørsmål*.

I eksempelet under arbeider Gunvild og Troy med *Oppgave 3: Lag et eksempel på en trekant med vinkelsum høyere enn 180°*.

> Troy: «Må alle linjene være rett? Kan vi ha en sånn ... bue?»

Troy stiller et *undrende og undersøkende spørsmål* som inviterer til videre undersøkelser. Dette kommer derfor tydelig inn under Varhol (2017) sin underkategori *Spørsmål*.

Begge eksemplene over kommer tydelig inn under Varhol (2017) sin underkategori *Spørsmål*, men det er likevel en interessant forskjell på spørsmålene. I spørsmålet til Lise: «Kunne vi egentlig brukt arealsetningen, kunne vi ikke?» er hun *undrende* til om de kan bruke en spesiell *prosedyre* for å komme frem til et eksempel som oppfyller de gitte betingelsene. I spørsmålet til Troy: «Må alle linjene være rett? Kan vi ha en sånn ... bue?» er han undrende til *begrepet* trekant og sidene i en trekant. Dette er interessant i forhold til Lithner (2008) sine *Imiterende - og kreative resonnement.* Spørsmålet til Lise kan knyttes til *Algoritmisk resonering* under Lithner (2008) sitt *Imiterende resonnement* siden hennes spørsmål innebærer å *gjenkalle en algoritme.* Troy sitt spørsmål kan knyttes til Lithner (2008) sitt *kreative resonnement* siden det det oppfyller den første betingelsen for *Kreative resonnement: Nyhet. En ny resoneringssekvens blir laget, eller en glemt er laget på nytt.*

4.1.3 *Forslag*, underkategori av *Å oppdage*

Forslag er en underkategori Varhol (2017) har definert under *samtaleelementet Å oppdage* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne underkategorien inneholder kort fortalt *forslag og muligheter til videre utprøving.*

I eksempelet under arbeider Reidar og Ole Jørgen med *Oppgave 6: Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6*

> Reidar: «Vi kan dele den opp i 2 trekanter da. Hvis vi deler den opp får vi to 30, 60, 90 trekanter»

Reidar *oppdager* at trekanten kan deles i to og kommer med *forslaget* som gir *muligheter for videre utprøving*: «Vi kan dele den opp i 2 trekanter da.» Dette kommer derfor tydelig inn under Varhol (2017) sin underkategori *Forslag*. Utsagnet skiller seg tydelig fra utsagnene i underkategorien *Spørsmål* ved at det ikke stilles *undrende og undersøkende spørsmål,* men at det kommer et *forslag* til videre utprøving.

4.1.4 Å identifisere

Å identifisere er en av hovedkategoriene i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne kategorien inneholder kort fortalt å introdusere en ny oppdagelse hvor det også kan være utviklet ny *forståelse*. *Å identifisere* kan innebære å komme med matematiske ideer ut fra gruppens tidligere felles oppdagelser.

I eksempelet under arbeider Reidar og Ole Jørgen med *Oppgave 5: Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med* $\sin A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Reidar: «Vi har glemt at vi kan bruke Pytagoras! Som en av de likningssettene.»

Reidar kommer med en *matematisk idé* og *faglig innhold blir identifisert.* Dette utsagnet hører derfor hjemme under Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å identifisere.*

4.1.5 *Påstand*, underkategori av *Å advokere*

Påstand er en underkategori Varhol (2017) har definert under *samtaleelementet Å advokere* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne underkategorien inneholder kort fortalt å komme med en *påstand* uten å begrunne den.

I eksempelet under arbeider Pernille og Simen med O*ppgave 9: Lag et eksempel på en trekant med 3 oppgitte mål (sider eller vinkler) der du kan bruke cosinussetningen, men ikke sinussetningen for å regne ut et fjerde mål (en side eller en vinkel).*

> Pernille: «For sinussetningen, da må du ha en vinkel»

Pernille kommer med en *påstand:* «For sinussetningen, då må du ha en vinkel.» Videre *begrunner ikke* Pernille hvorfor du må ha en vinkel. Jeg har derfor plassert utsagnet i Varhol (2017) sin underkategori *Påstand.*

I eksempelet under arbeider Kjell og Jan med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $\sin A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Jan: «Hvis denne skal være lik en halv, så må det være en 30, 60, 90 grader»

Her kommer Jan med en *påstand*: «Hvis denne skal være like en halv, så må det være en 30, 60, 90 grader», men kommer *ikke* før eller etter med noen *begrunnelse* på hvorfor det må være en «30, 60, 90 grader». Jeg har derfor plassert også dette utsagnet i Varhol (2017) sin underkategori *Påstand.*

4.1.6 *Argumentasjon*, underkategori av *Å advokere*

Argumentasjon er en underkategori Varhol (2017) har laget under *samtaleelementet Å advokere* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne kategorien inneholder kort fortalt å uttrykke egne synspunkter, komme med løsningsforslag og argumentere hvorfor det må være slik.

I eksempelet under arbeider Reidar og Ole Jørgen med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $\sin A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Ole Jørgen: «Det som er greien er at katet ganger katet delt på 2 må være lik 6. Katetene multiplisert

med hverandre må være lik 12. Det må også gå opp med at hypotenusen må være dobbelt så lang som den korteste kateten. Vi kan ikke bare tilegne de verdier.»

Ole Jørgen avslutter utsagnet med: «Vi kan ikke bare tilegne de verdier.». Det som skiller dette eksempelet fra eksemplene i underkategorien *Påstand*, er at *påstanden* «Vi kan ikke bare tilegne de verdier.» ikke står for seg selv, men at den blir grundig *argumentert* for i setningene før: «Det som er greien er at katet ganger katet delt på 2 må være lik 6. Katetene multiplisert med hverandre må være lik 12. Det må også gå opp med at hypotenusen må være dobbelt så lang som den korteste kateten.» Eksempelet hører derfor tydelig hjemme i Varhol (2017) sin underkategori *Argumentasjon.*

4.1.7 Å tenke høyt

Å tenke høyt er en av *samtaleelementene* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne kategorien inneholder kort fortalt å uttrykke idéer og tanker til videre undersøkelse. Tanker blir offentliggjort som ressurs for gruppen. Det kan være avbrutte og oppstykkede setninger.

I eksempelet under arbeider Sonja og Beate med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med sin* $A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

Beate: «Ja, ok, så ganger vi med 2 b, så får vi 12 …. Som betyr at b = 1/12? og så setter vi at A er lik 2 delt på 1/12, som da er lik … (tenker). Så a blir 24 og b er en tolvtedel»

Beate *uttrykker en idé.* Hennes *tanker blir offentliggjort* og det er *avbrutte og oppstykkede setninger.* Utsagnet hører derfor hjemme i Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å tenke høyt.*

4.1.8 Å reformulere

Å reformulere er en av *samtaleelementene* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne kategorien inneholder kort fortalt å gjenta, å utfylle hverandre og å parafrasere.

I eksempelet under arbeider Gunvild og Troy med *Oppgave 1: Lag et eksempel på en trekant med areal lik 6.*

Gunvild: «Det blir jo litt det samme».

Troy: «Ja, det blir jo litt det samme.»

Gunvild og Troy er enige om at det er det samme hvor de plasserer høyden i trekanten sin. Gunvild kommer med utsagnet: «Det blir jo litt det samme», og Troy *gjentar* det Gunvild har sagt nesten identisk: «Ja, det blir jo litt det samme.» Utsagnet hører derfor hjemme i Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å reformulere.*

I eksempelet under arbeider Kjell og Jan med *Oppgave 5: Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med* $sin\ A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Kjell: «Ok, hvis vi har en 90 grader.»
> Jan: «Rettvinklet trekant.»

Kjell kommer med utsagnet: «Ok, hvis vi har en 90 grader», og Jan *reformulerer og spesifiserer* det Kjell har sagt ved å komme med utsagnet: «Rettvinklet trekant». Dette utsagnet hører derfor også hjemme i Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å reformulere.*

I eksempelet under arbeider Troy og Gunvild med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $sin\ A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Troy: «Du, kan ikke vi bruke arealsetningen? Jo det kan vi, for vi måtte ha …, der må vi bruke sinus av A. Husker du det?»
>
> Gunvild: «Arealsetningen, er ikke det en halv ganger b ganger c ganger sin A?»
>
> Troy: «Jo, c og b er de to her sidene.»
>
> Gunvild: «Og de vet vi ikke.»
>
> Troy: «Nei, de vet vi ikke, men hvis vi vet at den der er 30, det er en halv, en halv ganger en halv. så det er en fjerdedel altså.»
>
> Gunvild: «Så det blir ¼ ganger b ganger c.»
>
> Troy:» Må være lik 6.»
>
> Gunvild: «Ja, 6 er lik ¼ ganger c ganger b.»

I hvert utsagn Gunvild og Troy kommer med over, *utfyller* de hverandre og *bygger videre* på det den andre eleven har sagt. Dette eksempelet hører derfor også hjemme i Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å reformulere,* men slik jeg ser det skiller det seg tydelig fra de to første eksemplene jeg har gitt i denne kategorien. I de to første eksemplene ble utsagnet til den første eleven *gjentatt og reformulert* med egne ord av den andre eleven.

I det siste eksempelet skjer det en progresjon fra utsagn til utsagn, elevene *utfyller* og *bygger videre* på utsagnene til den andre eleven. Slik jeg ser det representerer de to første eksemplene og det siste eksempelet så ulike ting at de fortjener å bli plassert i hver sin underkategori for å få frem flere nyanser i datamaterialet mitt. Jeg har derfor valgt å dele Alrø og Skovsmose (2002) sitt *samtaleelement Å Reformulere* i to underkategorier. Den ene har jeg kalt *Gjenta,* og den andre har jeg kalt *Bygge videre*. Under er beskrivelser av de to underkategoriene:

A. *Gjenta*: Denne underkategorien inneholder utsagn som er en gjentakelse av et utsagn som akkurat er sagt. Gjentakelsen kan være med egne ord og kan være en *reformulering* og *spesifisering*.
B. *Bygge videre*: Denne underkategorien inneholder utsagn som tar utgangspunkt i utsagn som akkurat er blitt sagt av andre og *utfyller og bygger* videre på disse.

4.1.9 Å utfordre

Å utfordre er en av *samtaleelementene* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne kategorien inneholder kort fortalt utsagn som utfordrer løsninger og *strategier*. Det kan være et vendepunkt i en utforskende prosess.

I eksempelet under arbeider Katinka og Maksimillian med Oppgave 2: *Lag et eksempel på en trekant der en av vinklene er større en 90° med areal lik 6*.

> Katinka: «Ja, den linjen der er 6, så da må jo høyden som i dette tilfelle …»
> Maksimillian: «Men dette er jo ikke høyden. Høyden blir jo dette.»

Katinka har en misoppfatning om at høyden ikke kan være på «utsiden» av grunnlinjen og kommer med forslag om å plassere høyden inne i trekanten. Forslaget til Katinka ville ført til et for lite areal av trekanten de har laget. Maksimillian *utfordrer* løsningen til Katinka og kommer med utsagnet: «Men dette er jo ikke høyden. Høyden blir jo dette». Han påpeker at høyden i deres trekant med valgte grunnlinje må være på «utsiden» av trekanten. Utsagnet til Maksimillian hører derfor hjemme i Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å utfordre.*

4.1.10 Å evaluere

Å evaluere er en av *samtaleelementene* i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell*. Denne kategorien inneholder kort fortalt utsagn som viser at elevene innser at det ikke kan stemme, det kan være utsagn som bekrefter eller sier seg enig i andre elevers utsagn eller løsninger, og det kan være påpeking av feil i andre elevers utsagn eller løsninger.

I eksempelet under arbeider Lise og Ida med Oppgave 5: *Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med* $sin\ A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6*. De har brukt CAS-funksjonen (computer algebra system) i GeoGebra og verktøytasten «løs numerisk» som kan gi avrundede desimaltall.

> Lise: «Det er godt nok.»

Lise *evaluerer* svaret de er kommet frem til og kommer med utsagnet: «Det er godt nok». Utsagnet hører derfor hjemme i kategorien *Å evaluere.*

I eksempelet under arbeider Reidar og Ole Jørgen med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $sin\ A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

> Ole Jørgen: «Greit, jeg kan si meg enig i forhold til det.»

I utsagnet før Ole Jørgen sitt utsagn har Reidar kommet med et løsningsforslag. Ole Jørgen *bekrefter og sier seg enig i* Reidars utsagn. Utsagnet til Ole Jørgen hører derfor hjemme i kategorien *Å evaluere.*

I eksempelet under arbeider Lise og Ida med *Oppgave 6: Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6.*

> Ida: «Det kan ikke stemme.»

Ida innser at løsningen de arbeider med må være feil og kommer med utsagnet: «Det kan ikke stemme». Dette utsagnet hører derfor også hjemme i kategorien *Å evaluere.*

4.1.11 Fordeling av *IC-modellen*s elementer i mitt datamateriale

Tabell 4-1 viser antall forekomster av de ulike elementene av Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* i mitt datamateriale. Tallene i Tabell 4-1 er fra hele datamaterialet under ett.

TABELL 4-1 FORDELING AV IC-ELEMENTENE I MITT DATAMATERIALE

Hovedkategorier	**Antall**	**%**	**Underkategorier**	**Antall**	**%**
1 Å kontakte	993	38%			
2 Å oppdage	310	12%			
			2a Spørsmål	117	5%
			2b Forslag	193	7%
3 Å identifisere	29	1%			
4 Å advokere	737	29%			
			4a Påstand	694	27%
			4b Argumentasjon	43	2%
5 Å tenke høyt	193	7%			
6 Å reformulere	91	4%			
			6a Gjenta	23	1%
			6b Bygge videre	68	3%
7 Å utfordre	76	3%			
8 Å evaluere	154	6%			
Sum	2583	100%			

Som vi ser av Tabell 4-1 er *Å kontakte* den kategorien som har klart størst andel. *Påstand*, en av Varhol (2017) sine underkategorier av *Å advokere* kommer på en klar andreplass. De andre kategoriene har en andel fra 1 til 7 prosent.

Varhol (2017) skriver at hennes datamateriale viser at innenfor kategorien *Å advokere*, hendte det oftere at elevene argumenterte enn at de kom med påstander. Dette er helt forskjellig fra mitt materiale der det er 13,5 ganger flere tilfeller av påstander enn argumentasjon. Utvalget hennes av elever (8. klasser) og typen oppgaver (ikke *Elevgenererte eksempler*, men andre undersøkende oppgaver) gjør at man ikke kan sammenligne direkte, men denne forskjellen er likevel oppsiktsvekkende. En annen tydelig forskjell mellom Varhol (2017) og mine elever gjelder Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å reformulere.* Varhol (2017) skriver at gjennom samtalene mellom elevene, var det ikke mange tilfeller av at elever reformulerte. I mitt datamateriale er det et betydelig antall og utgjør 4 % av alle utsagnene. Kan disse forskjellene skyldes typen oppgaver eller alder til elevene? Jeg har vanskelig for å komme med argumenter for hvorfor forskjellen skulle skyldes typen oppgaver eller alder. Både Varhol (2017) og jeg har små utvalg. Variasjoner mellom utvalgene våre kan derfor forventes, men at hennes elever var tydelig forskjellig fra mine med tanke på *samtaleelementer* er uansett interessant.

4.2 Hvilke *samtaleelementer* fra *IC-modellen* som er tilstede på de forskjellige oppgavene for de forskjellige elevgruppene

I tillegg til å se på *antallet forekomster* av de ulike elementene i Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* som er til stede i mitt datamateriale, valgte jeg å se på *antall oppgaver* de ulike *samtaleelementene* til Alrø og Skovsmose (2002) var til stede hos en gruppe. Når jeg senere skulle lete etter sammenhenger mellom variablene *samtaleelementer*, *forståelsestyper*, *strategier* og *antall vellykkede oppgaver*, var det denne oversikten over *samtaleelementene* jeg tok utgangspunkt i. Bakgrunnen for dette valget redegjorde jeg for i kapittel 3.5.1.

Tabell 4-2 viser antallet oppgaver med de ulike *samtaleelementene* til stede for alle elevgruppene jeg har lydopptak av. For eksempel vil tallet 3 i «Forslagkolonnen» og «Gruppe 1-raden» si at *samtaleelementet Forslag* var tilstede i arbeidet med 3 av oppgavene for elevgruppe 1.

TABELL 4-2 ANTALL OPPGAVER MED *SAMTALEELEMENT* TIL STEDE

	Kon-takte	Spørs-mål	For-slag	Identi-fisere	På-stand	Argu-men-tasjon	Tenke høyt	Gjenta	Bygge videre	Utfor-dre	Eva-luere
Gruppe 1	6	2	3	3	6	1	5	0	2	1	3
Gruppe 2	5	3	4	1	2	3	5	0	4	1	4
Gruppe 3	7	4	2	2	7	4	5	1	3	4	6
Gruppe 4	10	4	9	2	7	5	5	1	3	3	4
Gruppe 5	6	2	6	1	5	3	4	0	2	2	3
Gruppe 6	5	2	5	1	5	1	4	1	0	1	2
Gruppe 7	8	5	8	0	8	1	6	0	1	2	3
Gruppe 8	8	2	5	1	9	6	4	6	5	3	7
Gruppe 9	8	4	6	2	6	0	6	0	0	7	5

Vi ser i tabellen over at det er stor variasjon fra gruppe til gruppe for de fleste av *samtaleelementene* til Alrø og Skovsmose (2002). Analyse av denne variasjonen kommer i kapittel 5 i forbindelse med korrelasjonsanalysene jeg har gjort.

4.3 Elevenes *strategier* i arbeidet med eksempeloppgaver i trigonometri

Elevgenerte eksempler er en didaktisk tilnærming som kan brukes på alle *matematiske* tema. *Trigonometri* som tema er derfor like egnet som andre tema i matematikk og ble valgt fordi det er et av flere store tema i matematikk 1T. Dette temaet er også godt egnet fordi det har en triviell side de fleste elever kan godt med for eksempel grunnlinje ganger høyde delt på 2 som areal til en trekant. Det har også en mer avansert side med bruk av *sinus, cosinus og tangens.* En kan si at trigonometri har en slags dobbel bunn. Oppgavene elevene arbeidet med ble presentert en om gangen, og jeg forsøkte å begynne enkelt og ha noe stigende vanskelighetsgrad etter hvert. 8 av 10 oppgaver i hovedundersøkelsen hadde uendelig mange løsninger og er da et godt utgangspunkt for gode diskusjoner. Alle oppgavene jeg brukte i hovedundersøkelsen ligger tilgjengelig som vedlegg 8.3.

På den ene siden har jeg i mitt datamateriale sett på *samtaleelementer*, men jeg har også blant annet sett på hvilke *strategier* elevene bruker i arbeidet med å *generere eksempler*. På hver eksempeloppgave har jeg forsøkt å anslå hvilke *strategier* elevene bruker. Jeg har som jeg redegjorde for i kapittel 2.3.1, tatt utgangspunkt i de 3 *strategiene* som Antonini (2006) definerte i sin studie: *Prøving og feiling*, *Transformasjon* og *Analyse*.

Elevene i hovedundersøkelsen hadde 10 oppgaver tilgjengelige til å arbeide med, men ikke alle gruppene arbeidet med alle oppgavene fordi de brukte lengre tid på enkelte. På noen av oppgavene kommer flere *strategier* til syne, dette har jeg kommentert i kommentarkolonnen. *Strategien* på en oppgave er uavhengig av om oppgaven er vellykket løst eller ikke, jeg har fastslått *strategi* på alle oppgaver der jeg har tilstrekkelig med data uavhengig av om *strategien* har ført frem til et *vellykket eksempel* eller ikke. Med *vellykket eksempel* mener jeg et *eksempel* som elevene har laget som oppfyller betingelsene i eksempeloppgaven.

4.3.1 Eksempler på *strategien Prøving og feiling* fra mitt datamateriale

Under er et eksempel på *Prøving og feiling* fra mitt datamateriale. *Strategien Prøving og feiling* innebærer å søke etter eksempler fra hukommelsen og sjekke om eksempelet oppfyller de gitte betingelsene (Antonini, 2006).

I eksempelet under arbeider elevene med *Oppgave 6: Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6*. På denne oppgaven hadde elevene alle hjelpemidler tilgjengelig og elevene i eksempelet bruker GeoGebra som hjelpemiddel. GeoGebra er en gratis, dynamisk programvare for matematikk. Programmet består av fire deler; geometri, graftegner, CAS og regneark.

Katinka: «Det gikk nesten.»

Maksimillian: «Du fikk nesten riktig svar?»

(Jobbing i GeoGebra)

Katinka: «Jeg får det nesten da, jeg får 6,1.»

Maksimillian: «Ja, det er close.»

(pause, tenking og regning)

Maksimillian: «Der, det er det nærmeste jeg kommer. At alle sider er 3,5, men det er ikke helt riktig.»

Katinka: «Jeg kommer enda nærmere med et tall som 3, 725 ... Da får jeg 6,008.»

(pause)

Katinka: «6,001»

(pause)

Katinka: «Ok, 6,0002»

Maksimillian: «Hva har du som tall? 3 komma.»

Katinka: «3,7225»

Når Maksimillian sier: «Der, det er det nærmeste jeg kommer. At alle sider er 3,5, men det er ikke helt riktig», antyder ordet «nærmeste» at han har prøvd forskjellige ting og at løsningen med sider på 3,5 er den *nærmeste* det riktige svaret av de tilfellene han har prøvd. Katinka sier at hun har en løsning som er «enda nærmere» og med dette antyder hun at hun har prøvd noe annet enn Maksimillian. Progresjonen i tallene «6,008», «6,001» og «6,0002» antyder at Katinka prøver med ulike sidelengder for å komme nærmere og nærmere det riktige arealet i trekanten. *Strategien* Katinka og Maksimillian bruker kommer tydelig inn under Antonini (2006) sin kategori *Prøving og feiling.* I dette eksempelet førte denne *strategien* frem til et vellykket eksempel for Maksimillian og Katinka. Elevene brukte GeoGebra som hjelpemiddel, og i den forbindelse er det interessant å trekke inn Niss og Jensen (2002) sin *Hjelpemiddelkompetanse*. Elevene viser i dette eksempelet at de har noe *kompetanse* i GeoGebra som hjelpemiddel i matematikk. Ved en høyere *Hjelpemiddelkompetanse* i GeoGebra kombinert med en høyere *Problembehandlingskompetanse*, kunne elevene valgt en annen *strategi* som raskere og mer nøyaktig hadde gitt et vellykket eksempel på oppgaven. De kunne for eksempel brukt Antonini (2006) sin *strategi Analyse* og CAS-delen i GeoGebra.

Under er et annet eksempel på kategorien *Prøving og feiling.* Elevene arbeider her med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med sin A = ½ og areal lik 6.*

1. Troy: «Sin er lik lengden foran ...»
2. Gunvild: «Motstående delt på hypotenus.»
3. Troy: «Ja, så da må denne her være 1 og den må være 2. Du er enig i dette her sant?»

4. Gunvild: «Ja»
5. Troy: «Også den … arealet måtte være 6, da må vi … den linjen må være 12, ja den må være 12.»
6. Gunvild: «Da blir jo arealet, den er grunnlinje og den er høyde, da blir det 12. Det blir litt mer sånn her da.»
7. Troy: «Jo, ja, det blir jo det men Herre Gud.»
8. Gunvild: «Ja men denne er jo ikke 2 da.»
9. Troy: «Ja, jeg tenkte på det.»
10. Gunvild: «Det går jo ikke …»
11. Troy: «Men …»
12. Gunvild: «Det går ikke …»
13. Troy: «Jeg er klar over det, men …»
14. Gunvild: «For arealet blir 6, men sin blir ikke en halv her.»
15. Troy: «Nei»
16. Gunvild: «I dette tilfellet.»
17. Troy: «Men vent da.»
18. Gunvild: «Vi må forstørre begge 2.»
19. Troy: «vi må forstørre de med et eller annet tall, men jeg vet ikke med hvilket.»
20. Gunvild: «Hvis denne er 2 og denne skal være 1, og denne er 12. Hvis vi forstørrer sånn at det blir seks tredeler. Da må jo denne her bli …»
21. Troy: «Men …»
22. Gunvild: «Det er grunnlinje ganger høyde sant, da må denne være 4. Sånn, 4, 3, 6.»
23. Troy: «Skal jeg konstruere?»
24. Gunvild: «Blir ikke det? Regn ut hypotenussetningen. Vi kan ikke bruke CAS, det er uten hjelpemidler. Se, ta eeeh …, katet, det blir 16 pluss»
25. Troy: «9»
26. Gunvild: «9, men det er ikke 36.»
27. Troy: «Ha, ha, ha, That´s close enough.»
28. Gunvild: «Ikke 36, så det må bli 36.»
29. Troy: «Vent da.»
30. Hint. sin 30 er lik ½
31. Gunvild: «Men det trenger ikke vi vite.»
32. Troy: «Nei, det har ingenting å si.»
33. Gunvild: «da finner vi … vi tar noen andre tall da.»
34. Troy: «z delt på y er lik …»
35. Gunvild: «Hvis vi tar 8 og 4 …»

Troy og Gunvild *tar utgangspunkt* i en rettvinklet trekant med motstående katet til vinkel A som 1 og hypotenusen som 2. For at arealet til trekanten skal bli 6, må grunnlinjen være 12 som vi ser Troy kommer frem til i utsagn 5 over. Dette funnet kunne raskt ført frem til et vellykket eksempel hvis Troy og Gunvild ikke hadde låst seg til en rettvinklet trekant. Vi ser i utsagn 7, 8, 9 og 10 over at de innser at en trekant med sidelengder lik 12, 1 og 2 ikke eksisterer. De begynner å tegne en rettvinklet trekant med katetlengder lik 12 og 1 og *innser at hypotenusen da ikke vil ha lengde lik 2* som vi ser i disse utsagnene. I utsagn 18 og 19 tar de videre utgangspunkt i en rettvinklet trekant med forhold mellom motstående katet og hypotenus lik en halv og sier at de «må forstørre» disse sidelengdene. Videre *prøver* elevene litt forskjellige tall. I utsagn 20 og 22 foreslår Gunvild en trekant med sidelengder lik 3, 4 og 6. I utsagn 24, 25 og 26 og ser vi at elevene *innser at dette ikke blir en rettvinklet trekant* siden Pytagoras setning ikke går opp for disse sidelengdene. I utsagn 35 foreslår Gunvild å *prøve* med hypotenuslengde lik 8 og motstående katet med lengde lik 4, men heller ikke dette førte fram til et *vellykket eksempel*. Ut ifra utsagnene jeg har pekt på over er det tydelig at *strategien* elevene bruker på denne oppgaven kommer tydelig inn under Antonini (2006) sin *strategi Prøving og feiling.*

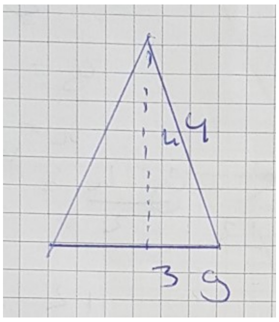
Denne gruppen endte ikke opp med et vellykket eksempel på denne oppgaven. De låser seg til hele tall i sin *Prøving og feiling*. Siden dette er en oppgave uten hjelpemidler er *Prøving og feiling* en tidkrevende og vanskelig *strategi* dersom man tar utgangspunkt i en rettvinklet trekant. Det vil innebære bruk av Pytagoras og kvadratrøtter av brøk eller desimaltall.

4.3.2 Eksempel på *strategien Transformasjon* fra mitt datamateriale

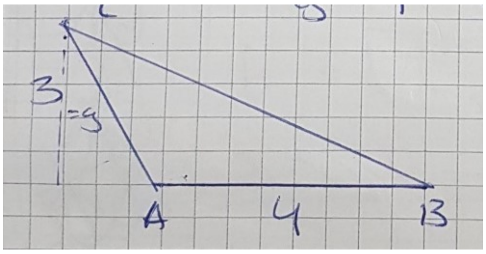
Under er et eksempel på *Transformasjon* fra mitt datamateriale. Ved *strategien Transformasjon* tar en utgangspunkt i et eksempel som tilfredsstiller noen av de gitte betingelsene. Deretter endrer en eksempelet gjennom en eller flere transformasjoner til det har blitt til et nytt objekt med alle de oppgitte egenskapene (Antonini, 2006).

I eksempelet under arbeider med elevene med *Oppgave 2: Lag et eksempel på en trekant med areal lik 6 der en av vinklene er større enn 90 grader.* De har valgt å ta utgangspunkt i trekanten de lagde på *Oppgave 1: Lag et eksempel på en trekant med areal lik 6».*

1. Beate: «Da kan vi ha en trekant som … jeg må skisse»
2. Sonja: «Men, da kan jo høyden fortsatt være den samme liksom.»
3. Beate: «Han kan jo egentlig det, og lengden kan jo også være den samme»
4. Sonja: «Vi bare forskyver han litt.»
5. Beate: «Da kan vi ha …»



FIGUR 4-1 GRUPPE 2 SITT EKSEMPEL PÅ OPPGAVE 1



FIGUR 4-2 GRUPPE 2 SITT EKSEMPEL PÅ OPPGAVE 2, TRANSFORMASJON SOM *STRATEGI*

I utsagn 2 sier Sonja: «Men, da kan jo høyden fortsatt være den samme liksom». At Sonja sier «den samme» viser at de tar utgangspunkt i trekanten de har laget på *Oppgave 1*. Sonja bekrefter dette i utsagn 3 når hun sier: «lengden kan jo også være den samme». I utsagn 4 der Sonja sier: «Vi bare forskyver han litt», og ved å se på Figur 4-1 og Figur 4-2, kommer det frem hvilken *Transformasjon* de gjør med trekanten fra *Oppgave 1*. Motstående hjørne til grunnlinjen blir forskjøvet mot venstre slik at høyden kommer på utsiden av trekanten. Forskyvningen fører også at vinkel A blir større enn 90 grader, og eksempelet deres oppfyller alle betingelsene som ble spurt etter. At verdiene for grunnlinje og høyde er byttet om på Figur 4-1 og Figur 4-2 antar jeg er tilfeldig og ikke bevisst tiltenkt, elevene kommenterer ikke dette i dialogen. *Strategien* Sonja og Beate bruker på denne oppgaven kommer tydelig inn under Antonini (2006) sin *strategi Transformasjon.*

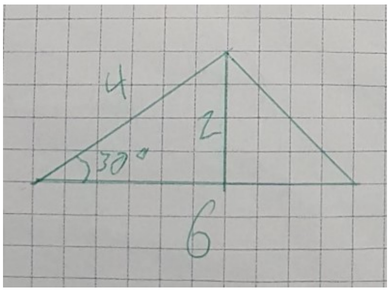
4.3.3 Eksempel på *strategien Analyse* fra mitt datamateriale

Under er et eksempel på *Analyse* fra mitt datamateriale. Ved *strategien Analyse* blir betingelsene til et eksempel som skal genereres utledet til logiske konsekvenser. Konsekvensene kan fremkalle enten et kjent eksempel eller en prosedyre som kan generere et eksempel som oppfyller betingelsene som er gitt Antonini (2006).

I eksempelet under arbeider elevene med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med*

$sin\ A = \frac{1}{2}\ og\ areal\ lik\ 6.$

1. Asbjørn: «Vi bruker arealsetningen.»
2. Bjarne: «Arealsetningen»
3. Asbjørn: «Jeg vet ikke om de godkjenner sinus når du referer til en trekant inne i en trekant.»
4. Bjarne: «Nei, så vi tar en halv ganger en halv ganger b ganger c.»
5. Asbjørn: «Ja»
6. Svein: «Er lik 6.»
7. Asbjørn: «Så du får jo en fjerdedel, så hvis du ganger med 4, så er du ferdig med det. b c er lik 24. Så da bare lager vi et eller annet som har de målene.»
8. Svein: «Som har det produktet?»
9. Asbjørn: «Vi har da altså konstruert en trekant hvor grunnlinjen er 6 et eller annet, enhet er ikke oppgitt. Det andre vinkelbeinet til vinkel A er da altså 4. Og høyden blir da altså 2. Vi vil også bemerke at det hadde fungert med grunnlinje 4 og det andre vinklebenet lik 6, men da ville altså høyden hvert 3. En spennende oppgave.»



FIGUR 4-3 GRUPPE 9 SITT EKSEMPEL PÅ OPPGAVE 4, ANALYSE SOM *STRATEGI*

I utsagn 1 og 2 i eksempelet over blir betingelsene til trekanten som skal konstrueres *utledet til konsekvenser* som *fremkaller en prosedyre* i form av arealsetningen. I Utsagn 7 er *betingelsene* til trekanten, $sin\ A = \frac{1}{2}\ og\ areal\ lik\ 6,$ satt inn i arealsetningen, som igjen *leder til den logiske konsekvensen* at «b c er lik 24». I utsagn 9 er 4 og 6 valgt som verdier for *b* og *c*. Dette eksempelet kommer derfor tydelig inn under Antonini (2006) sin *strategi Analyse*.

4.3.4 En egenutviklet kategori for *strategi*

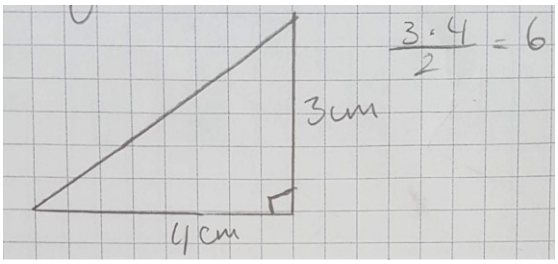
I arbeidet med noen av eksemplene opplevde jeg at *strategien* elevene brukte ikke helt ble dekket av Antonini (2006) sine kategorier. Dersom jeg opplevde at eksempelet elevene kom med var så lett tilgjengelig i deres *eksempelrom* at det fremkom uten at jeg kunne registrere at det hadde skjedd noen *Prøving og feiling*, transformasjon eller analyse, følte jeg behov for å kategorisere det som en egen *strategi*. Det kan argumenteres for at disse eksemplene skulle vært plassert i Antonini (2006) sin kategori *Prøving og feiling* der det første eksempelet elevene henter frem fra hukommelsen har de betingelsen som blir spurt etter og at man derfor ikke trenger å prøve mer siden man ikke feilet. Samtidig er det ikke godt å vite om det i hodet til elevene skjer en lynrask utledning av betingelsene til trekanten som igjen fører lynraskt videre til en prosedyre som igjen gir en trekant med betingelsene som ble oppgitt og dermed kan plasseres i Antonini (2006) sin kategori *Analyse*. Siden dette er uklart for meg, har jeg valgt å definere en egen *strategi* for disse tilfellene som jeg har kalt *Ferdig eksempel* som jeg har definert under:

> I *strategien Ferdig eksempel* fremkommer eksempelet som skal genereres uten at det kan registreres å ha skjedd noen *Prøving og feiling, Transformasjon* eller *Analyse.*

I mitt datamateriale kom denne *strategien* til syne i enklere eksempeloppgaver uten for mange betingelser.

Under er et *eksempel* på *Ferdig eksempel* fra mitt datamateriale. Her arbeider elevene med *Oppgave 1: Lag et eksempel på en trekant med areal lik 6*.

Lise: «Ok, da må vi ta grunnflate ganger høyde»
Ida: «3 ganger 4»
Lise: «Så da har vi en to tre opp her»



FIGUR 4-4 GRUPPE 1 SIN OPPGAVE 1, «FERDIG EKSEMPEL» SOM *STRATEGI*

Gjennom utsagnet til Ida: «3 ganger 4» *fremkommer eksempelet uten at jeg kan registrere at det har skjedd noen Prøving og feiling, Translasjon* eller *Analyse.* Det kan både ha vært *Prøving og feiling* der det første eksempelet fra minnet til Ida oppfylte betingelsene i oppgaven, men det kan også ha skjedd en rask *Analyse* i hodet til Ida før utsagnet: «3 ganger 4». Eksempelet hører derfor hjemme i min egen kategori *Ferdig eksempel.*

4.3.5 Oversikt over antall oppgaver *strategiene* er brukt

TABELL 4-3 OVERSIKT OVER ANTALL OPPGAVER *STRATEGIENE* ER BRUKT FOR DE FORSKJELLIGE OPPGAVENE

	Ferdig eksempel	***Prøving og feiling***	**Trans-formasjon**	***Analyse***
Gruppe 1	2	2	0	2
Gruppe 2	2	4	1	1
Gruppe 3	1	2	2	3
Gruppe 4*	4	2*	1	4*
Gruppe 5*	2	2*	1	2*
Gruppe 6	2	8	0	0
Gruppe 7	2	6	0	1
Gruppe 8	2	1	1	6
Gruppe 9	3	4	0	1

*Disse gruppene hadde 1 oppgave der to forskjellige *strategier* kom til syne på samme oppgave; *Prøving og feiling* og *Analyse.*

I sammenligningen av mine funn på *strategier* med Antonini (2006) sin studie, har jeg kommet over noe interessant. Antall oppgaver der elevene begynner med *strategien Prøving og feiling*, er lavt i min studie sammenlignet med Antonini (2006). Antonini (2006) skriver at *strategien Prøving og feiling* var nesten alltid den første *strategien* i arbeidet med en oppgave, men at studentene raskt gikk videre til andre *strategier*. I mitt datamateriale er det kun 2 tilfeller der elevene går fra en *strategi* til en annen i løpet av en oppgave. Utvalget i Antonini (2006) sin studie var ekspertmatematikere (post graduate students in mathematics), så verken utvalget eller typen oppgaver kan sammenlignes, men det er likevel interessant at forskjellene er så tydelige.

4.4 Type forståelse og antall vellykkede eksempler

Mitt datamateriale består av lydopptak av dialoger og skriftlig arbeid fra elevgrupper på to eller tre elever. Jeg har forsøkt å fastslå hvilken *forståelse* elevene viser i arbeidet med hver oppgave, og jeg opererer med Skemp (1976) sine kategorier*; Instrumentell forståelse* og *Relasjonell forståelse*. Bakgrunnen for at jeg valgte disse ble redegjort for i kapittel 2.2.3. *Forståelse* er noe man vanligvis snakker om på individnivå og ikke i gruppenivå. Derfor har jeg laget noen definisjoner for *forståelse* på gruppenivå til bruk i min studie:

> *Instrumentell forståelse på gruppenivå:* Alle elevene i gruppen viser Skemp (1976) sin *Instrumentelle forståelse* av konseptet oppgaven dreier seg om.
>
> *Relasjonell forståelse* på gruppenivå: Minst én av elevene i gruppen viser Skemp (1976) sin *Relasjonelle forståelse* av konseptet oppgaven dreier seg om.

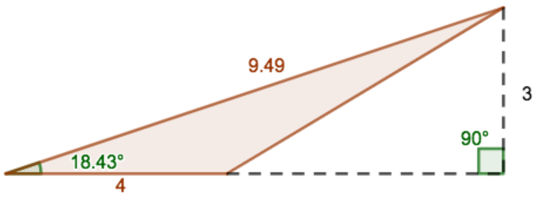
4.4.1 Eksempel på *Relasjonell forståelse* fra mitt datamateriale

Under er et eksempel på *Relasjonell forståelse* fra mitt datamateriale. *Relasjonell forståelse* er å vite både hva en skal gjøre og hvorfor. Ved *Relasjonell* læring knyttes *matematiske* prinsipper sammen med eksisterende kunnskap og skaper en sammenheng mellom gammel og ny kunnskap.

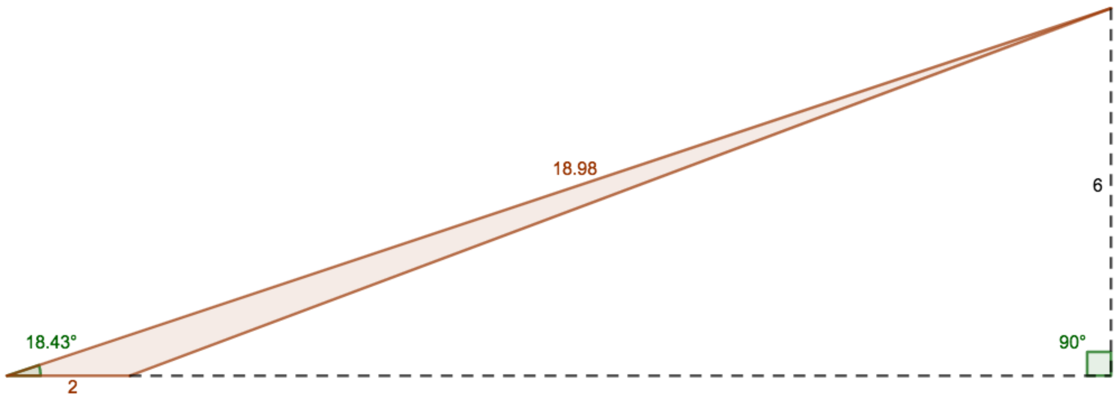
I eksempelet under arbeider elevene med *Oppgave 7: Lag et eksempel på en trekant med* $tan\ A = \frac{1}{3}$ *og areal lik* 6, og *Oppgave 8: Lag et annet eksempel på en trekant med* $tan\ A = \frac{1}{3}$ *og areal lik* 6.

1. Bjarne: «Vi bruker arctan for å finne ut hva gradene skal være. Tan til a er lik en tredjedel, og da får vi at vinkelen må være 18,43 grader.»
2. Asbjørn: «Og så bruker vi bare arealsetningen. En halv ganger bla ganger bla…»
3. Bjarne: «En halv ganger b ganger c ganger sin 18,43.»
4. Asbjørn: «Hvis du putter funksjonen inne i funksjonen, så blir det helt nøyaktig.»
5. Bjarne: «Jeg vet ikke om jeg gidder.»
6. (arbeid i CAS)
7. Asbjørn: «Og så flytter vi alle de tallene over på andre siden. og så finner vi b og c som …»
8. Bjarne: «b ganger c er lik 37,96. Og b og c kan være hva som helst som blir.. som gir 37,96.»

9. Asbjørn: «Skal vi bare lage høyden til en?»
10. Bjarne: «Ja, så altså ...»
11. Asbjørn: «Vi vet at b ganger c må bli det der og samtidig må grunnlinje ganger høyde delt på 2 bli 6.»
12. Bjarne: «Ja, vi må bare ...»
13. Asbjørn: «Et eller annet sånn.»
14. Bjarne: «4 ganger 6 delt på 2 er lik 6, altså er høyden 3.Ene vinkelbeinet er 4, høyden er 3 og det andre vinkelbeinet er 9,49. Vi skulle finne et annet eksempel også, men da tar vi bare og deler 37,96 på 2 i stedet for og får da at de to sidene er 2 og 18,98, og for å finne høyden må vi da ta 2 * x delt på 2 = 6. Altså er høyden 6.»



FIGUR 4-5 GRUPPE 9 SITT EKSEMPEL PÅ OPPGAVE 7 TEGNET I GEOGEBRA



FIGUR 4-6 GRUPPE 9 SITT EKSEMPEL PÅ OPPGAVE 8 TEGNET I GEOGEBRA

I utsagn 1, 2 og 3 ser vi at elevene *tydelig vet hva de skal gjøre,* de viser at de har en klar plan. I utsagn 11 sier Bjarne: «b ganger c er lik 37,96. Og b og c kan være hva som helst som blir.. som gir 37,96.» Dette utsagnet viser at Bjarne har *forståelse* for at oppgaven har uendelig mange løsninger. Dette står i motsetning til andre grupper som i tilsvarende situasjoner ikke kom videre fordi de ikke hadde *forståelse* for at oppgaven de jobbet med hadde uendelig mange løsninger. I utsagn 11 sier Asbjørn: «Vi vet at b ganger c må bli det der og samtidig må grunnlinje ganger høyde delt på 2 bli 6.»

Gjennom dette utsagnet viser Asbjørn at det på et punkt i læringen hans av arealsetningen er *skapt en sammenheng mellom gammel og ny kunnskap*. Den nye kunnskapen (arealsetningen) er knyttet sammen med gammel kunnskap (Areal = grunnlinje · høyde / 2). Gammel og ny kunnskap er ikke forblitt separate enheter hos Asbjørn, men de er blitt satt sammen i et nettverk. Dette eksempelet hører derfor hjemme i Skemp (1976) sin kategori *Relasjonell forståelse.*

Merknad: Gruppe 9 hadde et ekstremt avslappet forhold til nøyaktigheten på skissene sine. Verdier på vinkler og sider kom tydelig frem, men forholdet mellom lengdene på sidene de tegnet og faktiske størrelser på vinklene de tegnet var nesten helt tilfeldig. Jeg har absolutt all grunn til å tro at de kunne tegnet nøyaktig tegninger hvis de la vinn på det. Jeg har derfor valgt å tydeliggjøre noen av eksemplene de laget ved å tegne dem i GeoGebra.

4.4.2 Eksempler på *Instrumentell forståelse* fra mitt datamateriale

Under er et eksempel på *Instrumentell forståelse* fra mitt datamateriale. *Instrumentell forståelse* blir av Skemp (1976) beskrevet som *regler uten grunner*. Å kunne en regel og evne til å bruke den på visse oppgaver, men ikke vite hvorfor regelen er sånn, eller hvordan den henger sammen med det man tidligere har lært.

I eksempelet under arbeider elevene med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $sin\ A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6*

1. Sonja: «Jo, for det at, hvis du skal bruke arealsetningen, så tar du den gange den, gange den gange en halv.»
2. Beate: «Men sin v skal jo også være en halv.»
3. Sonja: «Ja, det er sant…. Det betyr at de to sidene er like! Det er en likesidet trekant eller så er den likebeint. Det er i alle fall ikke en rettvinklet.»
4. Beate: «Ja… den må jo være rettvinklet hvis vi skal bruke…»
5. Sonja: «Jo, hvis sin A er lik sin B, så må jo det være rettvinklet, nei, glem det.»
6. Beate: «Hvis vi vet at vinkel A er 30 grader, og B er 90 grader, så er dette en 30, 60, 90. og då skal den korteste kateten være halvparten av hypotenusen. så kan vi skrive det sånn då?»
7. Sonja: «Men, for å finne sinus av B, sant? Så tar vi jo motstående, nei det går jo ikke. For motstående delt på den, det går jo ikke, det blir 0.»
8. Beate: «Hvis vi bruker liksom at.. det kan vi skrive som en likning då. For hvis vi setter han til …»
9. Og etter en del videre diskusjon og arbeid fortsetter de:

10. Sonja: Hva en ½ gange ½.
11. Beate: Det e ¼ .
12. Beate: Å ja, nei, vent.
13. Beate: Jeg har laget disse to uttrykkene då. at c gang a = 12 og a gange b = 24. Då kan vi si det sånn at ….

Litt senere i arbeidet med oppgaven:

14. Sonja: «Men greien e at det er to ukjente, det er det som er problemet. har vi et uttrykk for c?»

Vi ser i utsagn 1 at Sonja tilsynelatende kan arealsetningen og vet hva som skal ganges sammen for å få arealet. Med en oppgave med oppgitt størrelse på en vinkel og oppgitte lengder på vinkelbeina som utgjør vinkelen, ser jeg for meg at Sonja ved hjelp av en kalkulator kanskje kunnet komme frem til riktig areal.

Vi ser i utsagn 13 at Sonja og Beate etter hvert kommer frem til at *a* ganger *b* skal være 24, men de kommer aldri frem til et vellykket eksempel på oppgaven. De tar utgangspunkt i arealsetningen som de kanskje har evne til å bruke på noen oppgaver, men i arbeidet med denne oppgaven låser de seg til en rettvinklet trekant antageligvis fordi den første definisjonen på *sinus* elever kommer bort i er forholdet mellom *motstående katet* og *hypotenus* i en rettvinklet trekant. Dette ser vi i utsagn 4 der Beate sier: «Ja … den må jo være rettvinklet hvis vi skal bruke …». De forstår ikke at det finnes uendelig mange trekanter som vil oppfylle betingelsene og leter etter en bestemt trekant. Dette kommer tydelig frem i utsagn 14 der Sonja sier: «Men greien e at det er to ukjente». Det kan virke som at når de har lært definisjonen på *sinus* og senere har lært *arealsetningen*, så har dette forblitt som to separate enheter i kunnskapen deres. Det har ikke blitt skapt en sammenheng mellom gammel og ny kunnskap. Etter at de har lært arealsetningen har de ikke gjort den nødvendige koblingen mot definisjonen av *sinus* som ville gitt dypere *forståelse*. Dette eksempelet kommer tydelig inn under det Skemp (1976) ville kalt *Instrumentell forståelse.*

4.4.3 Egen kategori på *forståelse*

På noen av oppgavene jeg analyserte for *strategi* registrerte jeg at begge elevene så ut til å starte med en *Instrumentell forståelse* av konseptet oppgaven dreide seg om, men i løpet av arbeidet med oppgaven beveget de seg mot *Relasjonell forståelse*. Dette synes jeg var så interessant at jeg valgte å definere en egen *forståelseskategori* på for disse tilfellene. Den har jeg kalt *Fra Instrumentell til Relasjonell forståelse*. Under er et eksempel på denne kategorien fra mitt datamateriale. Her arbeider elevene med *Oppgave 4: Lag et eksempel på en trekant med* $\sin A = \frac{1}{2}$ *og areal lik 6.*

1. Ole Jørgen: Denne delt på hypotenus er lik en halv. Da kan det i teorien være en 30, 60, 90 grader med areal lik 6.
2. (Hint blir gitt, «Arealsetningen er en fin måte å regne arealet på.»
3. Ole Jørgen: «Husker vi egentlig arealsetningen? Det er masse oppgaver der vi skal bruke arealsetningen.»
4. Reidar: «12 er lik b c. Jeg husker han nå, 12 er lik b c.»
5. Ole Jørgen: «Trigonometri er det ene temaet der de bare vil at jeg skal brenne».
6. Reidar: «Og så, må disse her være 3. Nei, hvordan skal det funke.»
7. Ole Jørgen: «Nei, hvordan skal det funke.»
8. (Tegning og tenking)
9. Ole Jørgen: «De brukte arealsetningen som hint»
10. (Nytt hint: «Den vinkelen med sinusverdi lik en halv er 30 grader»
11. Ole Jørgen: «Det var det jeg sa, vi kan ta utgangspunkt i en 30, 60, 90 grader. Det er en fin trekant. Det er orgasmisk, *matematisk* sett.»
12. Reidar: «24 er lik b c. Jeg klarer ikke oppgaven. Dette går ikke.»

I utsagn 1 og 11 viser Ole Jørgen at han låser seg til en rettvinklet trekant. På tidspunktet der utsagn 12 kommer, er Ole Jørgen og Reidar egentlig nesten kommet i mål. Reidar har satt inn betingelsene i oppgaven inn i arealsetningen kommet frem til «24 er lik b c». Med en *Relasjonell forståelse* på dette tidspunktet hadde de forstått at det finnes uendelig mange trekanter som oppfyller betingelsene. Da kunne de valgt noen passende verdier for *b* og *c* som ville oppfylle betingelsen om areal lik 6. Deres *forståelse* på dette tidspunktet vil jeg kategorisere som *Instrumentell* med samme argumentasjon som jeg brukte på eksempelet med Sonja og Beate. Videre går dialogen mellom Ole Jørgen og Reidar:

13. Ole Jørgen: «Det som e greien er e at katet ganger katet delt på 2 må være lik 6. Katetene multiplisert med hverandre må være lik 12. Det må også gå opp med at hypotenusen må være dobbelt så lang som den korteste kateten. Vi kan ikke bare tilegne de verdier.»
14. Reidar: Hvis vi har 2 og 6 sant? Nei, det funker ikke. 3 og 4? Da blir denne 6. 6 ganger 6 er 36. Nei, det funker ikke.
15. Ole Jørgen: «3, 4 og 5 er finne verdier»
16. Reidar: «Men det funker ikke, for 5 er ikke det dobbelte av 3.
17. Ole Jørgen: «Vi kan jo prøve å *matematisk* bevise at 5 er det dobbelte av 3 da.

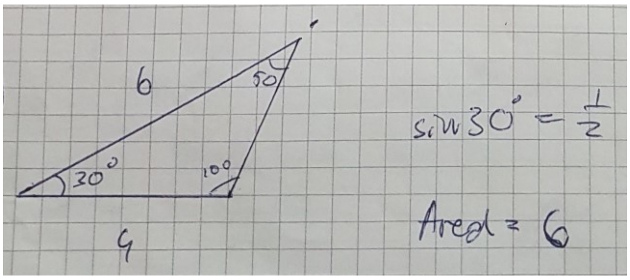
18. Reidar: «Hva om man bare ikke har en rettvinklet trekant?»

Vi ser i utsagn 13, 14, 15 og 16 at de går tilbake på sporet med en rettvinklet trekant og forsøker seg på *strategien Prøving og feiling*. Men i utsagn 18 kommer nøkkelutsagnet til Reidar: «Hva om man bare ikke har en rettvinklet trekant?». Dette utsagnet representerer et gjennombrudd, og spesielt Reidar beveger seg heretter mot *Relasjonell forståelse*. Elevene frigjør seg fra misoppfatningen om at *sinus* bare gjelder i rettvinklede trekanter og kommer etter hvert frem til et vellykket eksempel. Etter litt skriving og tenking kommer det endelige gjennombruddet.

19. Reidar: «Den her er jo 6. Så da kan vi bare gange begge sider med 2. og da får vi b delt på 2 ganger c er lik ... 12. Og så får vi at b c er lik 24.»
20. Ole Jørgen: «Greit, jeg kan si meg enig i forhold til det.»
21. Reidar: «Og b c skal bli 24. Og da må vi bare putte inn noen verdier.»

At *b* ganger *c* skal bli 24 kom de frem til mye tidligere i arbeidet med oppgaven. Men på det første tidspunktet hadde de bare satt inn tall og snudd litt på arealsetningen uten å forstå følgene av det de hadde kommet frem til. I utsagn nummer 21 sier Reidar: «Og så må vi bare putte inn noen verdier». Dette er hele den store forskjellen på første og andre gang de kom frem til at $b \cdot c = 24$, og etter min vurdering har i alle fall Reidar nå beveget seg til en *Relasjonell forståelse*. Han har forstått at det finnes uendelig mange løsninger på oppgaven og at trekanten ikke trenger å være rettvinklet. De har igjen snudd om på arealsetningen, men denne gangen *vet de hvorfor de gjør det* og har nå *forståelse*n som skal til for å fullføre eksempelet. Dette eksempelet hører derfor hjemme i min egen kategori *Fra Instrumentell til Relasjonell forståelse.*

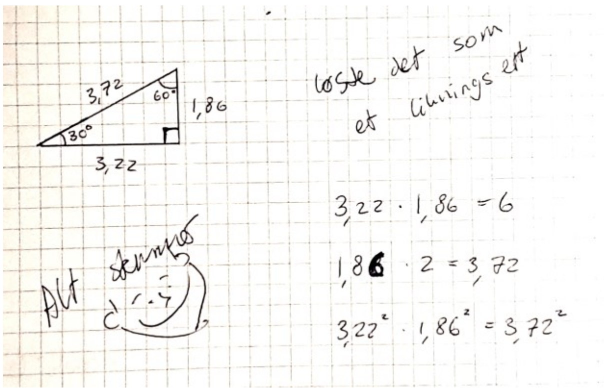
Under er trekanten elevene laget (vinkelmålene på 50 og 100 grader er ekstremt avrundet, i virkeligheten er disse vinklene om lag 38 og 112 grader)



FIGUR 4-7 GRUPPE 6, OPPGAVE 4, FRA *INSTRUMENTELL* TIL *RELASJONELL FORSTÅELSE*

4.4.4 Oversikt over antall oppgaver der de ulike *forståelsestypene* kommer til syne

Tabell 4-4 viser antall oppgaver der de ulike *forståelsestypene* er vist. Den viser også *antall vellykkede eksempler* til hver elevgruppe. Med et *vellykket eksempel* mener jeg et *eksempel* som oppfyller betingelsene som ble gitt i eksempeloppgaven. For de fleste eksempeloppgavene er det uendelig mange løsninger, men for 2 av oppgavene (*Oppgave 5: Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med sin A = ½ og areal lik 6* og *Oppgave 6: Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6*) er det bare en mulig løsning. For noen av gruppene har jeg operert med *halvt vellykket eksempel*. Dette har jeg gjort på eksemplene som ikke var vellykket grunnet det jeg har vurdert til å være en slurvefeil. Da har jeg talt oppgaven som et *halvt vellykket eksempel*. Under er et eksempel på dette. Dette eksempelet hører til *Oppgave 5: Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med sin A = ½ og areal lik 6*



FIGUR 4-8 HALVT VELLYKKET EKSEMPEL

Denne gruppen har satt opp at grunnlinje ganger høyde er lik 6 og hadde på denne oppgaven glemt at grunnlinje ganger høyde blir 12, noe de hadde vist at de kunne på en tidligere oppgave. Alle andre betingelser blir oppfylt av eksempelet, og jeg har derfor talt denne oppgaven som 0,5 *antall vellykkede eksempler*.

TABELL 4-4 ANTALL OPPGAVER DER *FORSTÅELSESTYPENE* ER SYNLIG I OG *ANTALL VELLYKKEDE EKSEMPLER*

	Instrumentell	*Relasjonell*	Fra instr. til *Relasjonell*	Antall vel-lykkede eksempler	Antall oppgaver gruppen har jobbet med
Gruppe 1	1	3	2	5	6
Gruppe 2	2	6	0	6	8
Gruppe 3	4	4	0	5	8
Gruppe 4	2	8	0	8	10
Gruppe 5	1	4	1	4,5	6
Gruppe 6	8	2	0	2	10
Gruppe 7	7	2	0	4	10
Gruppe 8	1	9	0	9	10
Gruppe 9	3	5	0	5	8

Disse tallene er en del av grunnlaget for korrelasjonsanalysene jeg har gjort på datamaterialet mitt og vil bli videre analysert i kapittel 5.

5 *Analyse* av sammenhenger mellom *samtaleelementer*, *strategier*, *forståelse* og vellykkede eksempler

I dette kapittelet søker jeg å finne svar på mitt andre forskningsspørsmål

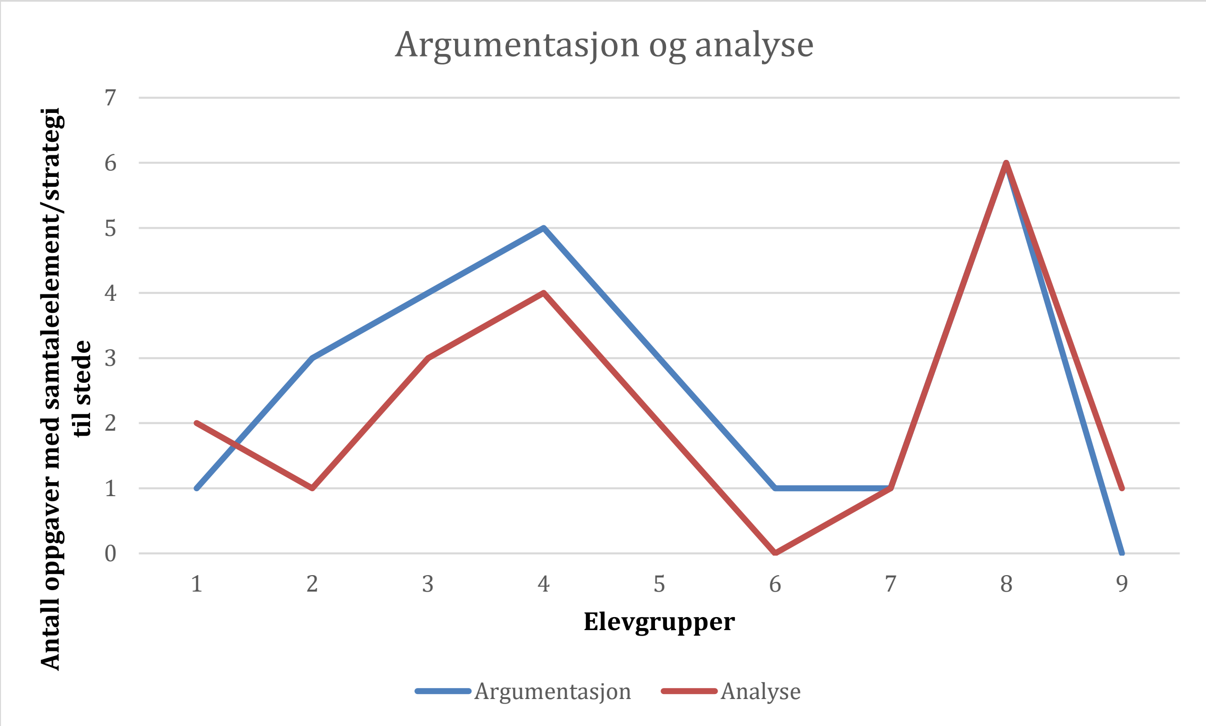
2. Er det sammenheng mellom noen av variablene *strategi, samtaleelement, forståelsestype og antall vellykkede eksempler* i arbeid med *Elevgenererte eksempler*?

For å lete etter sammenhenger mellom disse tingene har jeg brukt korrelasjonsanalyser. Til dette formålet har jeg organisert datamaterialet mitt i Excel regneark. Jeg har talt opp antall oppgaver der de ulike *samtaleelementene* er tilstede, antall oppgaver der de ulike *forståelsestypene* er vist, antall oppgaver der de ulike *strategiene* er brukt og *antall vellykkede eksempler*. Jeg har altså for eksempel ikke brukt det totale antall utsagn av typen *Evaluering* til en gruppe, bare antall oppgaver er *Evaluering* er tilstede. Dette redegjorde jeg for i kapittel 3.5.1.

5.1 Eksempler på variabler fra mitt datamateriale med sterk -, ingen og negativ korrelasjon

5.1.1 Eksempel på variabler med sterk korrelasjon

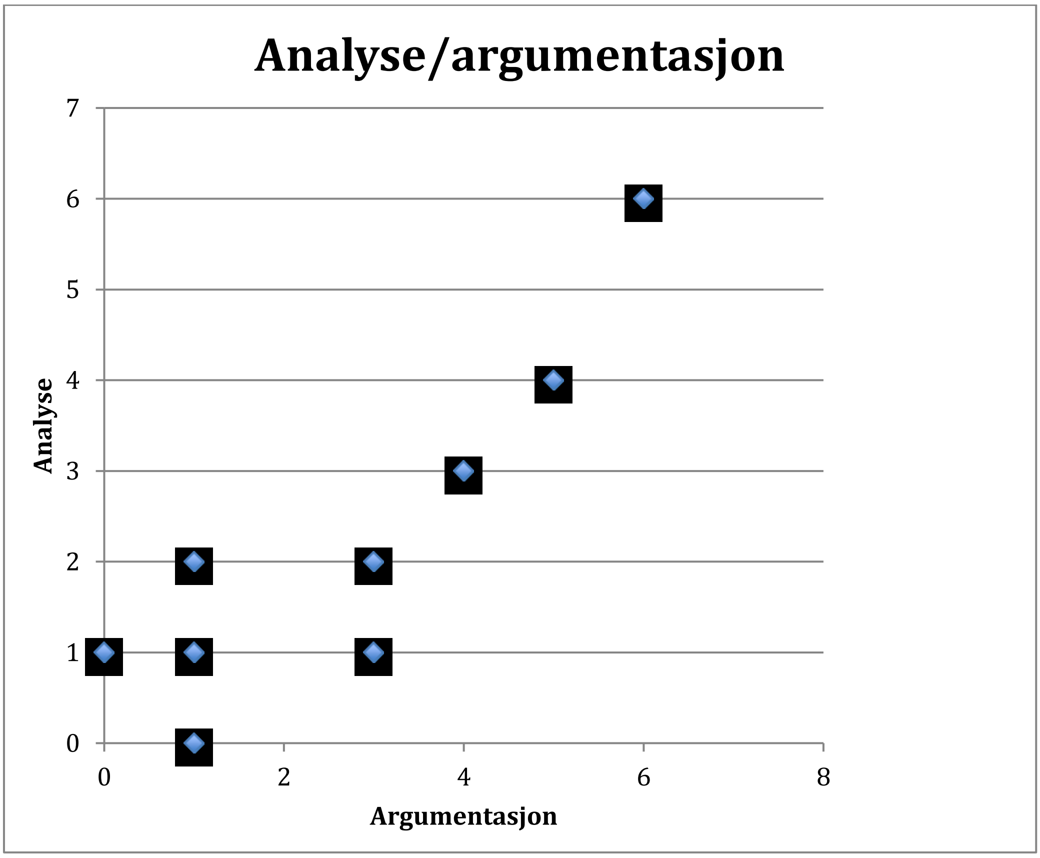
Under er et eksempel på to variabler fra mitt datamateriale som har sterk korrelasjon, antallet oppgaver der *samtaleelementet Argumentasjon* er tilstede, og antallet oppgaver der *strategien Analyse* er brukt.



FIGUR 5-1 ANTALL OPPGAVER MED *SAMTALEELEMENTET ARGUMENTASJON* TIL STEDE OG ANTALL OPPGAVER MED *ANALYSE* SOM *STRATEGI*

Vi ser at disse variablene sine verdier samsvarer sterkt for de ulike gruppene. Elevene som har et høyere antall oppgaver der analyse er brukt som *strategi*, har også et høyere antall oppgaver med *samtaleelementet Argumentasjon* til stede. Og grupper med et lavere antall oppgaver der *Analyse* er brukt som *strategi*, har også et lavere antall oppgaver med *samtaleelementet Argumentasjon* til stede. Korrelasjonskoeffisienten på 0,87 mellom disse variablene bekrefter dette. Denne korrelasjonen med korrelasjonskoeffisient på 0,87 er godt innenfor signifikansnivå på 0,01. (0,798 er grenseverdien for signifikansnivå 0,01 ved antall tilfeller lik 9)

En annen måte å se den tydelige sammenhengen mellom disse variablene er å plotte verdiene i et spredningsplott:

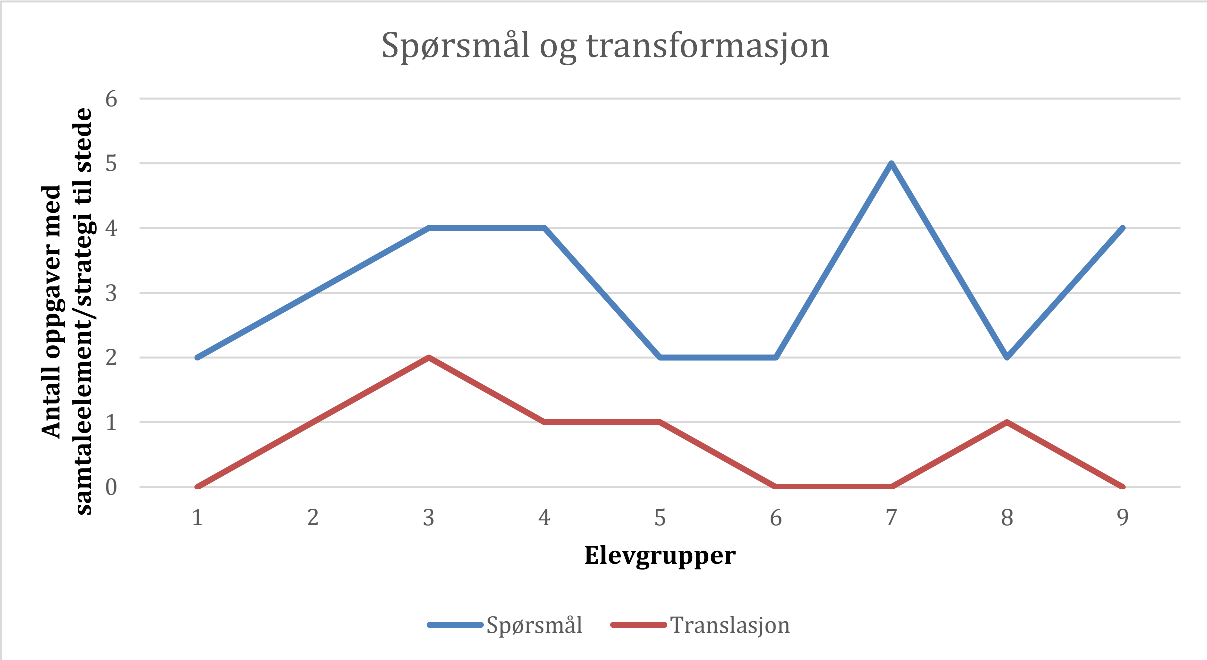


FIGUR 5-2 SPREDNINGSPLOTT FOR VARIABLENE *ANALYSE* OG *ARGUMENTASJON*

Jeg diskuterer denne - og andre korrelasjoner i kapittel 5.2.

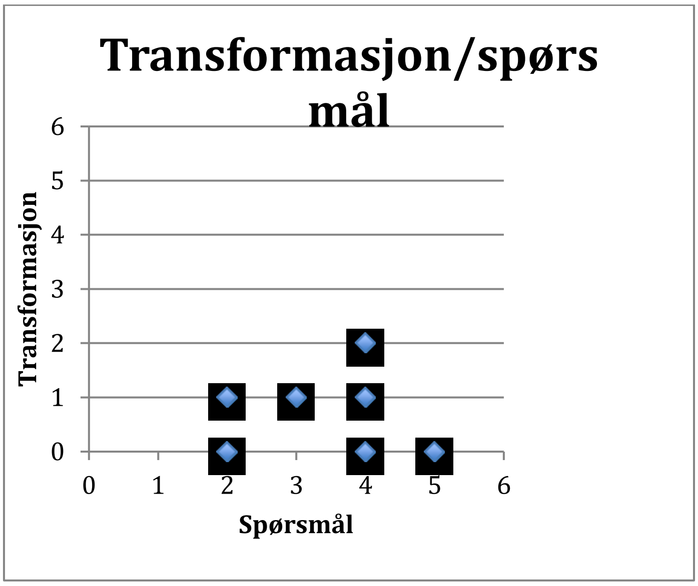
5.1.2 Eksempler på variabler med ingen korrelasjon

Under kommer et eksempel på variabler som ikke korrelerer, hverken positivt eller negativt. I mitt datamateriale er dette for eksempel korrelasjonen mellom antall oppgaver der *samtaleelementet Spørsmål* er tilstede og antall oppgaver der *strategien Transformasjon* er brukt.



FIGUR 5-3 ANTALL OPPGAVER MED *SAMTALEELEMENTET SPØRSMÅL* TIL STEDE OG ANTALL OPPGAVER MED *TRANSFORMASJON* SOM *STRATEGI*

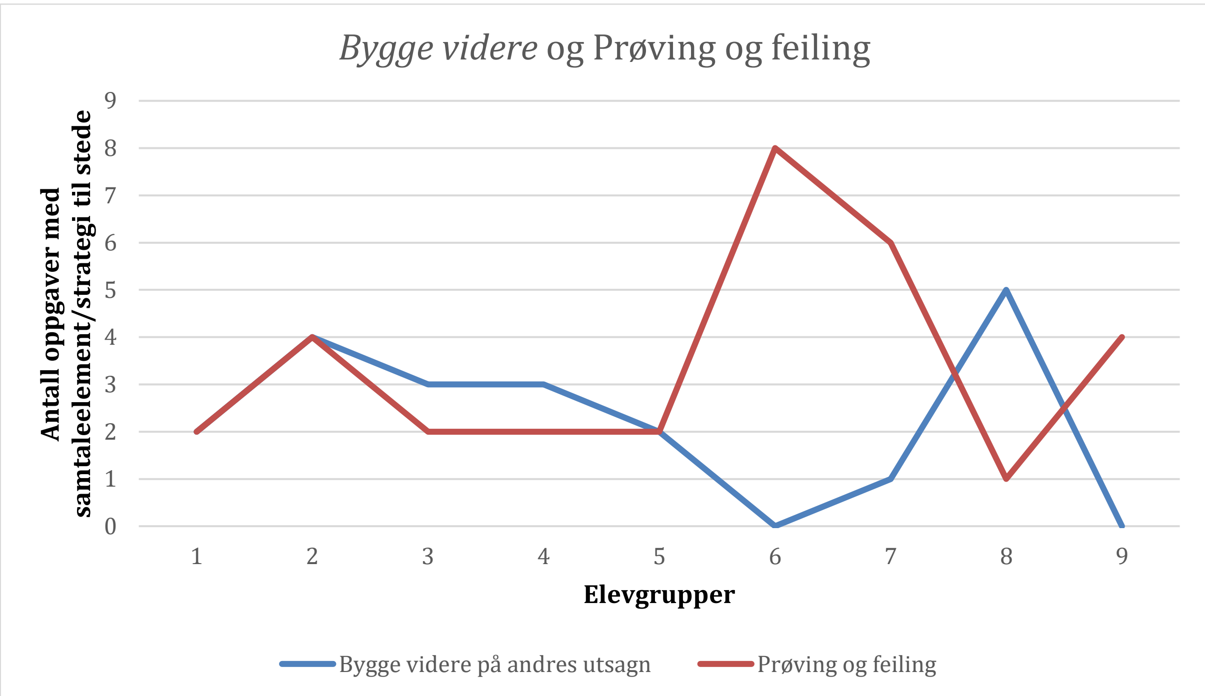
Vi ser at variablene ser ut til å forholde seg helt tilfeldig til hverandre, og korrelasjonskoeffisienten på tilnærmet 0 (0,05) og spredningsplottet under bekrefter dette. Noen av punktene i spredningsplottet ligger oppå hverandre, derfor sees bare 7 av 9 punkter.



FIGUR 5-4 SPREDNINGSPLOTT FOR VARIABLENE *TRANSFORMASJON* OG *SPØRSMÅL*

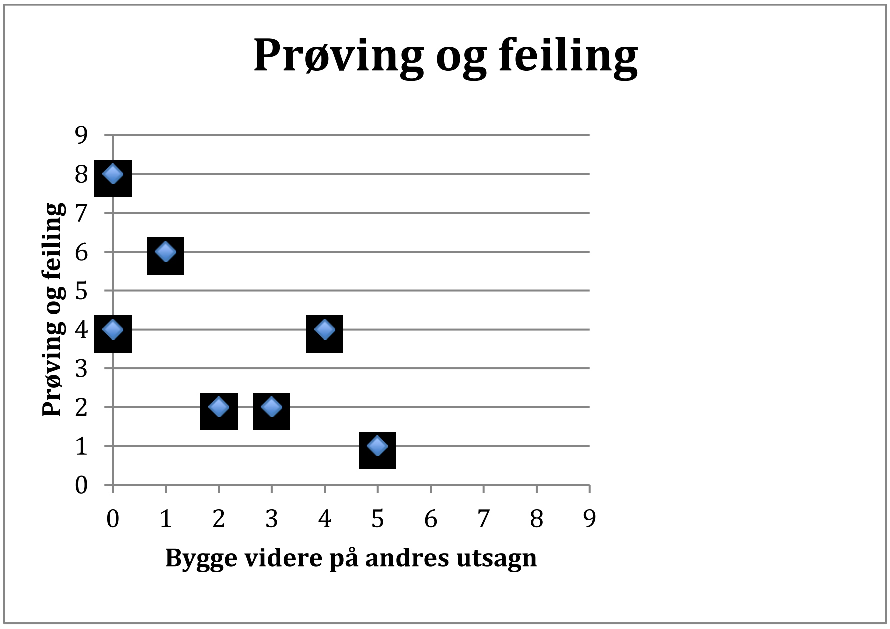
5.1.3 Eksempler på variabler med negativ korrelasjon

Under kommer et eksempel fra mitt datamateriale på variabler som korrelerer negativt. Antall oppgaver der *samtaleelementet Bygge videre* er tilstede og antall oppgaver der *strategien Prøving og feiling* er brukt.



FIGUR 5-5 ANTALL OPPGAVER MED *SAMTALEELEMENTET BYGGE VIDERE* TIL STEDE OG ANTALL OPPGAVER MED *PRØVING OG FEILING* SOM *STRATEGI*

Vi ser at grafene til variablene *ikke varierer sammen, men heller varierer motsatt av hverandre*. En høyere verdi av den ene variabelen gir i flere tilfeller en lavere verdi av den andre variabelen. Den negative korrelasjonskoeffisienten på -0,69 og spredningsplottet i Figur 5-6 med disse variablene bekrefter også dette. Korrelasjonen med korrelasjonskoeffisient på -0,69 er innenfor et signifikansnivå på 0,05 (-0,666 er grenseverdien for signifikansnivå 0,05 ved antall tilfeller lik 9).



FIGUR 5-6 SPREDNINGSPLOTT MED VARIABLENE *PRØVING OG FEILING* OG *BYGGE VIDERE*

Noen av punktene ligger oppå hverandre, derfor sees bare 7 av 9 punkter i Figur 5-6. Jeg diskuterer denne - og andre korrelasjoner i kapittel 5.2

5.2 Korrelasjonsanalyser

I dette delkapittelet presenterer jeg alle korrelasjonsanalysene jeg har gjort på datamaterialet mitt. Jeg legger så frem alle tallene og forsøker å tydeliggjøre hva disse tallene egentlig viser et funn på. Videre kommentarer og diskusjon rundt funnene i dette kapittelet har jeg plassert i kapittel 6.2.4.

Jeg har valgt å tydeliggjøre sterke korrelasjoner med å merke tilhørende korrelasjonskoeffisienter med farge i alle tabellene i dette kapittelet. I tabellene er alle korrelasjonskoeffisienter med absoluttverdi på 0,666 og høyere merket med grønn (positiv korrelasjon) eller rød (negativ korrelasjon). Korrelasjonskoeffisienter som har absoluttverdi lavere enn 0,666, men i nærheten er merket med gult (kan være både positive og negative korrelasjon). 0,666 er grenseverdien for signifikansnivå på 0,05 ved antall tilfeller lik 9. Jeg vil igjen tydeliggjøre hva som er grunnlaget for datasettene som jeg har gjort korrelasjonsanalyser på (se kapittel 3.5.1 for bakgrunnen for valg av organisering av data). Hvert *samtaleelement* har et tilhørende datasett på 9 punkter som består av antall oppgaver *samtaleelementet* var synlig på for de 9 elevgruppene. Alle *strategier* har et tilhørende datasett på 9 punkter som består av antall oppgaver der *strategien* var brukt for de 9 elevgruppene. Alle *forståelsestyper* har et tilhørende datasett på 9 punkter som består av antall oppgaver der *forståelsestypen* var synlig for de 9 elevgruppene. Og *antall vellykkede eksempler* har et tilhørende datasett på 9 punkter som består av *antall vellykkede eksempler* for de 9 elevgruppene.

TABELL 5-1 KORRELASJONER MELLOM *SAMTALEELEMENTER* OG *STRATEGIER*

	Å kontakte	Spørsmål	Forslag	Å identifisere	Argumentasjon	Påstand	Å tenke høyt	Gjenta	Bygge videre	Å utfordre	Å valuere
Analyse	0,57	-0,13	0,04	0,16	0,87	0,62	-0,33	0,80	0,77	0,16	0,74
Transformasjon	0,11	0,05	-0,32	0,07	0,77	0,03	-0,30	0,27	0,69	0,09	0,58
Prøving og feiling	-0,36	0,17	0,19	-0,48	-0,65	-0,28	0,17	-0,37	-0,69	-0,22	-0,62
Ferdig eksempel	0,63	0,23	0,76	0,19	0,05	0,06	0,23	-0,08	-0,13	0,28	-0,11

Sammenhengen mellom *strategien Analyse* og samtaletyper

I mitt utvalg korrelerer antall oppgave der Antonini (2006) sin *strategi Analyse* er brukt, sterkt positivt med antall oppgaver der *samtaleelementene Argumentasjon, Gjenta, Bygge videre* og *Å evaluere* er til stede (*samtaleelementene* er ikke nødvendigvis til stede i akkurat de samme oppgavene). *Argumentasjon er Varhol (2017) sin underkategori av* Alrø og Skovsmose (2002) sin *Å advokere. Gjenta* og *Bygge videre* er mine underkategorier av Alrø og Skovsmose (2002) sin *Å reformulere. Å evaluere er* en egen kategori *i IC-modellen* til Alrø og Skovsmose (2002).

Dette vil si at i min studie er det sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene som *strategi* utleder betingelsene til logiske konsekvenser som fremkaller en prosedyre eller ferdig eksempel (*Analyse*)

og antall oppgaver der:

- De i samtalene argumenterer for sine påstander (*Argumentasjon)*, gjentar utsagn som akkurat er blitt sagt med egne ord (*Gjenta)*, tar utgangspunkt i det som er sagt av andre og utfyller og bygger videre på det (*Bygge videre)* og at de kan påpeke feil, respondere med kritikk eller støtte, bekreftelse eller ros (*Å evaluere*).

Sammenhengen mellom *strategien Transformasjon* og samtaletyper

I mitt utvalg korrelerer Antonini (2006) sin *strategi Transformasjon* sterkt positivt *samtaleelementene Argumentasjon og Bygge videre.*

Dette viser at i min studie er det sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene som *strategi* i *eksempelgenerering* tar utgangspunkt i et eksempel som tilfredsstiller noen av de gitte betingelsene og deretter endrer de eksempelet gjennom en eller flere transformasjoner til det har blitt til et nytt objekt med alle de oppgitte egenskapene (*Transformasjon)*

og antall oppgaver der

- de i samtalene argumenterer for sine påstander (*Argumentasjon)* og tar utgangspunkt i det som er sagt av andre og utfyller og bygger videre på det (*Bygge videre)*

Sammenhengen mellom *strategien Prøving og feiling* og samtaletyper

I mitt utvalg korrelerer Antonini (2006) sin *strategi Prøving og feiling* sterkt negativ *samtaleelementene Argumentasjon og Bygge videre.*

Dette viser at i min studie er *negativ* sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene som *strategi* i eksempelgenerering søker etter eksempler fra hukommelsen og sjekker om eksempelet oppfyller de gitte betingelsene eller ikke (*Prøving og feiling).*

Og antall oppgaver der:

- de argumenterer for sine påstander (*Argumentasjon)* og tar utgangspunkt i det som er sagt av andre og utfyller og bygger videre på det (*Bygge videre).*

Sammenhengen mellom *strategien Ferdig eksempel* og *samtaletyper*

I mitt utvalg korreler min *strategi Ferdig eksempel* sterkt positivt med *samtaleelementet Forslag. Forslag* er Varhol (2017) sin *underkategori av* Alrø og Skovsmose (2002) sin *Å oppdage.*

Dette viser at i min studie er det sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene som *strategi* i *eksempelgenerering* lager eksempelet som skal genereres uten at det kan registreres å ha skjedd noen *Prøving og feiling, Transformasjon* eller *Analyse (Ferdig eksempel)*

og antall oppgaver der:

- de i samtalene kommer med mulige løsninger og forslag til videre utprøving

TABELL 5-2 KORRELASJONER MELLOM *SAMTALEELEMENTER* OG *FORSTÅELSE*

	Å kontakte	Spørsmål	Forslag	Å identifisere	Argumentasjon	Påstand	Å tenke høyt	Gjenta	Bygge videre	Å utfordre	Å valuere
Relasjonell forståelse	0,51	-0,08	0,19	0,11	0,79	0,20	-0,21	0,65	0,74	0,27	0,69
Instrumentell forståelse	-0,14	0,36	0,16	-0,48	-0,47	0,06	0,20	-0,22	-0,62	-0,11	-0,42
Fra instr. til *Relasjonell forståelse*	-0,32	-0,51	-0,32	0,53	-0,26	-0,12	-0,15	-0,27	-0,07	-0,37	-0,36

Sammenhengen mellom *Relasjonell forståelse* og samtaletyper

I mitt utvalg korrelerer Skemp (1976) sin kategori *Relasjonell forståelse* sterkt positivt *samtaleelementene Argumentasjon, Bygge videre* og *Å evaluere.*

Dette viser at i min studie er det sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene i arbeidet med å generere eksempler både vet hva de skal gjøre og hvorfor og at de viser en *matematisk* kunnskap rik på relasjoner (*Relasjonell forståelse*)

og antall oppgaver der

- de i samtalene argumenterer for sine påstander (*Argumentasjon),* tar utgangspunkt i det som er sagt av andre og utfyller og bygger videre på det (*Bygge videre)* og at de kan påpeke feil, respondere med kritikk eller støtte, bekreftelse eller ros (*Å evaluere*).

TABELL 5-3 KORRELASJONER MELLOM *SAMTALEELEMENTER* OG *ANTALL VELLYKKEDE EKSEMPLER*

	Å kontakte	Spørsmål	Forslag	Å identifisere	Argumentasjon	Påstand	Å tenke høyt	Gjenta	Bygge videre	Å utfordre	Å valuere
Antall vellykkede eksempler	0,60	0,01	0,17	0,17	0,79	0,36	-0,09	0,63	0,81	0,21	0,71

Sammenhengen mellom *antall vellykkede eksempler* og samtaletyper

I mitt utvalg korrelerer *antall vellykkede eksempler* positivt med *samtaleelementene Argumentasjon, Bygge videre* og *Å evaluere.*

Dette viser at i min studie er det sammenheng mellom:

- Hvor mange vellykkede eksempler de greier å lage

Og antall oppgaver der

- de i samtalene argumenterer for sine påstander (*Argumentasjon),* tar utgangspunkt i det som er sagt av andre og utfyller og bygger videre på det (*Bygge videre)* og at de kan påpeke feil, respondere med kritikk eller støtte, bekreftelse eller ros (*Å evaluere*).

TABELL 5-4 KORRELASJONER MELLOM *FORSTÅELSE* OG *STRATEGIER*

	Instrumentell forståelse	*Relasjonell forståelse*	Fra *Instrumentell* til *Relasjonell forståelse*
Analyse	-0,57	0,80	-0,06
Transformasjon	-0,36	0,45	-0,25
Prøving og feiling	0,89	-0,64	-0,33
Ferdig eksempel	-0,20	0,45	-0,14

Sammenhengen mellom Relasjonell forståelse og *strategien* Analyse

I mitt utvalg korrelerer Skemp (1976) sin kategori *Relasjonell forståelse* sterkt positivt Antonini (2006) sin *strategi Analyse*.

Dette vil si at i min studie er det sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene i arbeidet med å *generere eksempler* både vet hva de skal gjøre og hvorfor og at de viser en *matematisk* kunnskap rik på relasjoner (*Relasjonell forståelse*)

og antall oppgaver der:

- de som *strategi* i *eksempelgenerering* utleder betingelsene til logiske konsekvenser som fremkaller en prosedyre eller ferdig eksempel (*Analyse*)

Sammenhengen mellom Instrumentell forståelse og *strategien* Prøving og feiling

I mitt utvalg korrelerer Skemp (1976) sin kategori *Instrumentell forståelse* sterkt positivt med Antonini (2006) sin *strategi Prøving og feiling*.

Dette vil si at i min studie er det sammenheng mellom antall oppgaver der:

- elevene i arbeidet med å generer eksempler viser at de bruker *regler uten å* vite hvorfor regelen er sånn, eller hvordan den henger sammen med det man tidligere har lært (*Instrumentell forståelse*).

og antall oppgaver der:

- de som *strategi* i eksempelgenerering søker etter eksempler fra hukommelsen og sjekker om eksempelet oppfyller de gitte betingelsene eller ikke (*Prøving og feiling).*

TABELL 5-5 KORRELASJONER MELLOM *STRATEGIER* OG *ANTALL VELLYKKEDE EKSEMPLER*

	Antall vellykkede eksempler
Analyse	0,88
Transformasjon	0,44
Prøving og feiling	-0,76
Ferdig eksempel	0,38

Sammenhengen mellom *antall vellykkede eksempler* og *strategien* Analyse

I mitt utvalg korrelerer *antall vellykkede eksempler* positivt med Antonini (2006) sin *strategi Analyse.*

Dette viser at i min studie er det sammenheng mellom:

- Hvor mange vellykkede eksempler de greier å lage

Og antall oppgaver der:

- de som *strategi* i eksempelgenerering utleder betingelsene til logiske konsekvenser som fremkaller en prosedyre eller ferdig eksempel (*Analyse*)

Sammenhengen mellom *antall vellykkede eksempler* og *strategien* Prøving og feiling

I mitt utvalg korrelerer *antall vellykkede eksempler* negativt med Antonini (2006) sin *strategi Prøving og feiling.*

Dette viser at i min studie er det *negativ sammenheng* mellom:

- Hvor mange vellykkede eksempler de greier å lage og

- At elevene som *strategi* i eksempelgenerering søker etter eksempler fra hukommelsen og sjekker om eksempelet oppfyller de gitte betingelsene eller ikke (*Prøving og feiling).*

TABELL 5-6 KORRELASJONER MELLOM *FORSTÅELSE* OG *ANTALL VELLYKKEDE EKSEMPLER*

	Instrumentell forståelse	*Relasjonell forståelse*	Fra *Instrumentell* til *Relasjonell forståelse*
Antall vellykkede eksempler	-0,70	0,94	-0,14

Sammenhengen mellom *antall vellykkede eksempler* og *Instrumentell forståelse*

I mitt utvalg korrelerer *antall vellykkede eksempler* positivt med Antonini (2006) sin *strategi Analyse.*

Dette viser at i min studie er det *negativ sammenheng* mellom:

- Hvor mange vellykkede eksempler elevene greier å lage

og antall oppgaver der

- de i arbeidet med å generer eksempler viser at de bruker *regler uten å* vite hvorfor regelen er sånn, eller hvordan den henger sammen med det man tidligere har lært (*Instrumentell forståelse*).

Sammenhengen mellom *antall vellykkede eksempler* og *Relasjonell forståelse*

I mitt utvalg korrelerer *antall vellykkede eksempler* med antall oppgaver der *Relasjonell forståelse* er synlig.

Dette viser at i min studie er det sammenheng mellom:

- Hvor mange vellykkede eksempler elevene greier å lage

Og antall oppgaver der:

- elevene i arbeidet med å generer eksempler både vet hva de skal gjøre og hvorfor og at de viser en matematisk kunnskap rik på relasjoner (*Relasjonell forståelse*)

5.2.1 Internkorrelasjoner på *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelse*

Under har jeg listet opp internkorrelasjonene på *samtaleelementene* som er innenfor et signifikansnivå på 0,05. Verdien til korrelasjonskoeffisienten står i parentes.

Internkorrelasjoner mellom *samtaleelementene.*

- Antall oppgaver med *Påstand* til stede korrelerer positivt med antall oppgaver med *Å kontakte* til stede (0,71)

- Antall oppgaver med *Å tenke høyt* til stede korrelerer positivt med antall oppgaver med *Spørsmål* til stede (0,84)

- Antall oppgaver med *Argumentasjon* til stede korrelerer positivt med antall oppgaver med *Bygge videre* til stede (0,87) og antall oppgaver med *Gjenta* til stede (0,69)

- Antall oppgaver med *Å evaluere* til stede korrelerer positivt med antall oppgaver med *Gjenta* til stede (0,67)

Internkorrelasjoner mellom *forståelsestypene*

Ingen av internkorrelasjonene mellom *forståelsestypene* er innenfor et signifikansnivå på 0,05, men internkorrelasjonen under er i nærheten (P-verdi 0,063).

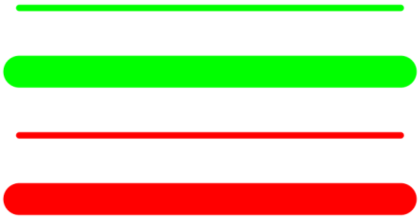
- Antall oppgaver der *Relasjonell forståelse* er synlig korrelerer negativt med antall oppgaver der *Instrumentell forståelse* er synlig (-0,64)

Internkorrelasjoner mellom *strategi*typene

- Antall oppgaver der *Analyse* blir brukt som *strategi* korrelerer negativt med antall oppgaver der *Prøving og feiling* er brukt som *strategi* (-0,79)

5.3 En visuell oversikt over alle korrelasjoner i mitt datamateriale

For å få et overblikk over alle korrelasjonene i datamaterialet mitt, har jeg laget en visuell figur der fargene viser om det er positiv eller negativ korrelasjon og tykkelsen på strekene viser hvor sterk korrelasjonen er (internkorrelasjoner er ikke tatt med). Grønne streker viser positiv korrelasjon og røde streker viser negativ korrelasjon. Jeg har visualisert korrelasjoner større eller lik 0,5 og negative korrelasjoner mindre eller lik -0,5. De helt tynneste strekene vil for min størrelse på datasettene ikke være innenfor et signifikansnivå på 0,05.



Tilsvarer positiv korrelasjon på 0,5

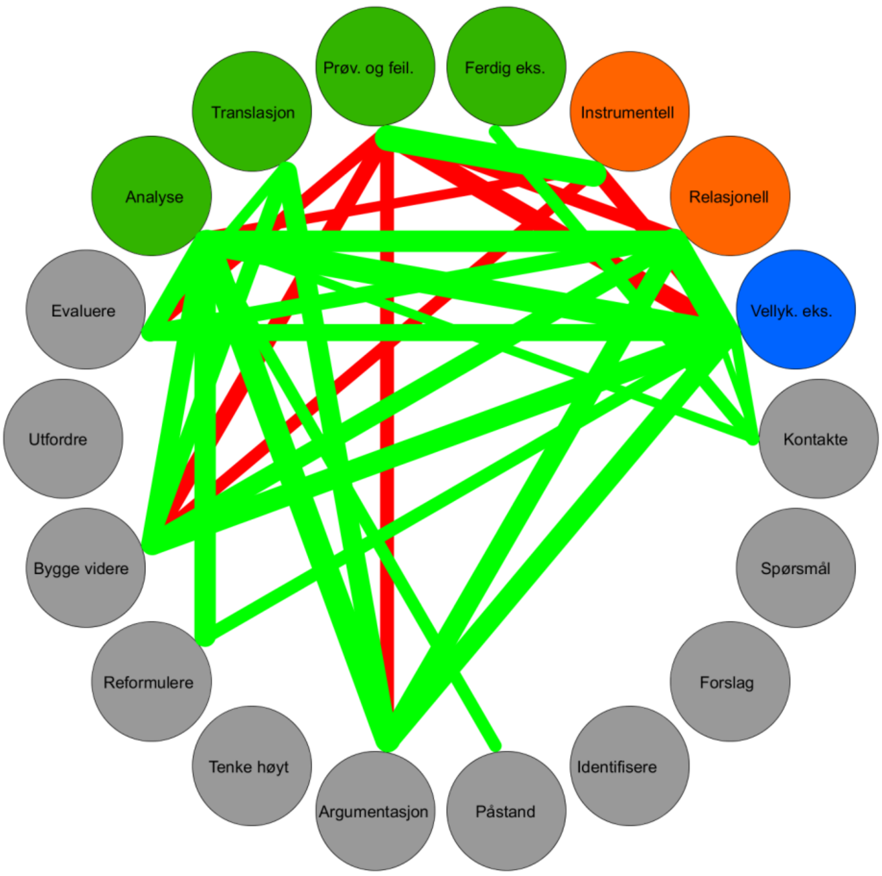
Tilsvarer positiv korrelasjon på 1

Tilsvarer negativ korrelasjon på -0,5

Tilsvarer negativ korrelasjon på -1.

FIGUR 5-7 TYKKELSE PÅ STREKER SOM VISER KORRELASJONER

Tykkelsen på strekene er proporsjonal med korrelasjonskoeffisientene, og eksemplene i Figur 5-7 viser yttergrensene på strektykkelsen.



6 Diskusjon

I dette kapittelet skal jeg oppsummere noen av hovedtrekkene av resultatene mine og se på hvordan de ulike funnene henger sammen, samt drøfte dem i lys av eksisterende teori og litteratur. Men aller først skal jeg si litt om hvordan studien min plasserer seg i forhold til liknende studier.

6.1 Min studie i forhold til andre studier

Det er flere som har forsket på *Elevgenererte eksempler*. I Norge har Amdal m. fl. (2011) brukt *Elevgenererte eksempler* i en R1-gruppe (R1 er fordypning i matematikk på andre året på videregående skole i Norge). De ønsket å finne ut mer om hvordan *Elevgenererte eksempler* kunne brukes i videregående skole og har skrevet en 5 sider lang artikkel i Tangenten, et tidsskrift for matematikkundervisning. På en fagdag i matematikk jobbet elevene i par med 7 oppgaver der de skulle lage eksempler på likninger og ulikheter som oppfylte visse betingelser. Elevene ble observert (ingen lyd eller video) med tanke på diskusjoner og samtaler, engasjement, løsnings*strategier* og *forståelse*. Det skriftlige arbeidet ble samlet inn og elevene fylte også ut et spørreskjema der de svarte på hvordan de opplevde å jobbe med *Elevgenererte eksempler*. På bakgrunn av elevbesvarelsene de samlet inn etter fagdagen, valgte de ut noen elever som de intervjuet i tillegg for å få dypere innsikt i *løsningsstrategiene*. Jeg har latt meg inspirere av Amdal m. fl. (2011) i min studie. I likhet med dem arbeidet også mine elever i par med noenlunde likt matematisk nivå, og også jeg observerte elevene med tanke på *samtaler*, løsnings*strategier* og *forståelse*. I tillegg fylte også mine elever ut spørreskjema om hvordan de opplevde å arbeide med elevgenerte eksempler, og jeg spurte de samme spørsmålene som Amdal m. fl. (2011) for å ha mulighet til å sammenligne med deres studie. Med bakgrunn i den omfattende mengde data jeg har samlet inn, har jeg måttet velge bort deler av datamaterialet for å holde meg innenfor rammen til en masteroppgave. Utvalget i min studie er i likhet med Amdal m. fl. (2011) også elever på videregående skole, men mine elever gikk første året på videregående skole. Amdal m. fl. (2011) sine elever gikk andre året på videregående skole. Det er også vesentlige forskjeller på min og Amdal m. fl. (2011) sin studie. Hvor omfattende studiene er, er det mest åpenbare. Deres studie har endt opp med en 5 siders artikkel, mens min studie er en masteroppgave på over 100 sider. I undervisningsøkten har jeg brukt lydopptak for å kunne gå enda dypere i samtaleanalysen enn jeg kunne gjort ved kun observasjon og notater. Amdal m. fl. (2011) valgte intervju for å få større innblikk i elevenes løsnings*strategier* og *forståelse*, mens jeg valgte å analysere lydopptakene fra undervisningsøkten i tillegg til det skriftlige arbeidet for å få innblikk i dette. Jeg kunne også ha valgt intervjuer av utvalgte elever for å komme enda dypere i *strategier* og *forståelse*, men igjen måtte jeg ta hensyn til rammene til en masteroppgave og mengden data det er realistisk å håndtere. For samtaleanalyse har jeg valgt rammeverket til Alrø og Skovsmose (2002). Amdal m. fl. (2011) har ikke knyttet samtalene og diskusjonene opp mot noen teori i sin studie. I *strategianalysen* har jeg valgt å bruke generelle *strategier* som kan brukes på alle *matematiske* emner, mens Amdal m. fl. (2011) har pekt på *strategier* som er spesifikke i eksempelgenerering av likninger og ulikheter. Under analyse av *forståelse* har jeg gått grundig inn i elevdialogene og pekt på kjennetegn som antyder forskjellige typer *forståelse*. Amdal m. fl. (2011) har nevnt at «Arbeidet med å utvide elevenes *eksempelrom* kan opplagt bidra til å gi dem det Skemp (1976) beskriver som *Relasjonell forståelse*.» I forbindelse med analysen av en av løsnings*strategiene* har de kommentert «Vi mener en slik *strategi* bidrar til en dypere *forståelse* av likninger». Amdal m. fl. (2011) har ikke gått dypere enn dette i forbindelse med *forståelse*. Min studie er tydelig inspirert av Amdal m. fl. (2011). Jeg har bygget videre på deres forskning og valgt å gå dypere både i analyser av *samtaler*, *strategier* og *forståelse*.

Antonini (2006) sine *strategier* er brukt i flere studier, blant annet Alrø og Skovsmose (2002) og Iannone m. fl. (2011). Ingen av disse eller andre studier jeg har søkt opp bruker elever lavere enn universitets- og høyskolenivå som utvalg. Min studie fyller i så måte et hull i forskningen på dette punktet.

Ingen andre studier jeg har kommet over ved litteratursøk har grundig analysert samtalene til elever eller studenter som arbeider med å *generere eksempler*. Kombinasjonen av Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* og *Elevgenererte eksempler* har jeg derfor grunn til å tro er unik for min studie.

Å se på *Elevgenererte eksempler* i forbindelse med *matematisk forståelse* og –*kompetanse* er svært utbredt. Jeg kan i den forbindelse nevne som eksempel Dahlberg og Housman (1997) som ser på om *Elevgenererte eksempler* kan være en god metode for å bedre studenters ferdigheter til å generere bevis. Iannone m. fl. (2011) ser også på samme problemstillingen, om enn med en litt mer kritisk tilnærming. Denne ferdigheten de undersøker kan knyttes til Niss og Jensen (2002) sin *Resonneringskompetanse.* Andre eksempler på å se på *Elevgenererte eksempler* i forbindelse med *matematisk forståelse* er boken til Watson og Mason (2005) og artikkelen til Watson og Shipman (2008). Disse går inn i hvordan *Elevgenererte eksempler* kan være et redskap til - og motivasjon for *Begrepsbasert forståelse*. Denne typen *forståelse* kan knyttes både til Hiebert og Lefevre (1986) og Kilpatrick m. fl. (2001) sin *Begrepsbaserte* *forståelse*. Jeg ser likevel en tydelig forskjell fra min studie og studiene jeg har nevnt over. I min studie ser jeg bare på hvilken type *forståelse* som er synlig når elevene arbeider med *Elevgenererte eksempler*. Jeg ser for eksempel ikke på om bruken av *Elevgenererte eksempler* i introduksjonen av et tema kan føre til en bestemt type *forståelse* eller *kompetanse* som studiene over gjør. Likevel var det i mitt datamateriale synlig at enkelte elever beveget seg fra en *Instrumentell* – til en *Relasjonell forståelse.* Dette var grunnlaget for at jeg definerte en egen *forståelses*kategori som jeg valgte å kalle *Fra Instrumentell til Relasjonell forståelse.*

Jeg har ikke funnet andre studier som undersøker sammenhenger mellom *samtaleelementer*, løsnings*strategier* og *forståelse* i arbeid med undersøkende oppgaver av noe slag. Min studie kan være et interessant bidrag i den forbindelse. Iannone m. fl. (2011) kommenterer sammenhengen mellom valg av *strategi* og *antall vellykkede eksempler* i sin studie, men ellers har jeg ikke kommet over andre studier som undersøker lignende korrelasjoner som jeg har gjort. Jeg sammenligner min med deres studie i etterkant av Tabell 5-5 i kapittel 5.2.

6.2 Sammendrag av mine funn

Jeg har en omfattende presentasjon av mine funn i kapittel 4 og 5. I dette delkapittelet gir jeg ikke oversikt over alle funnene, men trekker ut det jeg synes er mest interessant og forsøker å gi et sammendrag.

6.2.1 Funn i samtalene

I analysen av samtalene i datamaterialet mitt var det gledelig å se at alle *samtaleelementene* til Alrø og Skovsmose (2002) var tydelig representert med et betydelig antall. Jeg kunne også identifisere et betydelig antall av Varhol (2017) sine underkategorier av Alrø og Skovsmose (2002) sin *IC-modell* (se kapittel 4.1.11).

Det var absolutt ikke gitt at jeg skulle kunne identifisere alle *samtaleelementene* til Alrø og Skovsmose (2002) og underkategoriene til Varhol (2017). For meg var det også gledelig at mitt datamateriale gav grunnlag for å definere to nye underkategorier av Alrø og Skovsmose (2002) sitt *samtaleelement Å reformulere.* I mitt datamateriale fant jeg et tydelig skille i utsagn som hørte hjemme i Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å reformulere.* Resultatet ble underkategoriene *Gjenta* og *Bygge videre* som var med å få frem flere nyanser i datamaterialet mitt. Spesielt vil jeg trekke frem at antall oppgaver med *Bygge videre* til stede har sterk sammenheng med *antall vellykkede eksempler* og antall oppgaver der *Relasjonell forståelse* er synlig. Det samme gjelder ikke for underkategorien *Gjenta.* Denne nyansen hadde jeg ikke fått frem uten at underkategoriene hadde blitt laget. Underkategoriene *Gjenta* og *Bygge videre* er helt konkrete tilskudd min studie har tilført forskningsfeltet.

Jeg har egentlig blitt overrasket over kvaliteten på den muntlige aktiviteten mellom elevene i arbeidet med disse oppgavene. Det er stort sett matematiske diskusjoner gjennom hele lydopptakene og mange tilfeller der de utfordrer løsninger, argumenterer, oppdager, stiller spørsmål, identifiserer utfordringer osv. I intervjuene jeg gjorde med lærerne i etterkant av pilotundersøkelsen og hovedinnsamlingen, ble de spurt om hvordan de opplevde den muntlige aktiviteten til elevene under undervisningsopplegget som ble gjennomført sammenlignet med en mer vanlig matematikktime. Her er deler av det de svarte:

> Lærer A: «Med ditt opplegg merket jeg at alle elevene var entusiastisk med, og de små gruppene gjorde at alle fikk uttrykt seg.»
>
> Lærer B: Sammenlignet med en vanlig matematikktime var elevene aktive. Jeg hadde forventet at de ville være litt mer tilbakeholdne … I en vanlig matematikktime pleier jeg sjelden å oppmuntre elevene til å vise fremme ved tavlen. Det var sånn sett forbausende i hvor stor grad de var på og gjerne ville legge frem for klassen. I en vanlig matematikktime er det jo mer det at elevene stiller spørsmål og i mindre grad kommer med løsninger.»
>
> Lærer C: «I disse timene så jobbet elevene mer fokusert, fordi de hadde konkrete oppgaver og de snakket sammen om de oppgavene. Jeg så at flere meldte seg på til å snakke. Og de flinkeste, de snakker jo sammen hele tiden. Jeg synes at aktiviteten var mer målrettet enn i en vanlig time. Absolutt. Selv om det var litt støy, så var de mer målrettet. Jeg tror rett og slett de ble litt fenget av de oppgavene. At det er litt gøy, selv om de synes det er vanskelig. Selv disse aller svakeste meldte seg litt på.»

Disse utsagnene sammen med forekomsten av *samtaleelementene* i datamaterialet mitt, kan være med å peke i retning av at arbeid med *Elevgenererte eksempler* kan være positivt for den matematiske samtalen i et klasserom.

Jeg opplevde i likhet med Amdal m. fl. (2011) at elevene snakket matematikk med hverandre på en naturlig måte. Det er ikke lett å lage en undervisningssituasjon hvor elevene føler seg komfortable med å snakke matematikk med medelever. Derfor var det inspirerende å lykkes i å lage en situasjon hvor samtalen dreier seg om mer enn «hvordan har du gjort oppgave 3a?»

6.2.2 Funn i *strategianalysene*

Jeg fant flere tilfeller av alle de tre *strategiene* fra Antonini (2006) sin studie. Se kapittel 4.3.5. Dette var ikke opplagt. Iannone m. fl. (2011) fant for eksempel ingen tilfeller av *strategien Analyse* i sin studie. For meg var det også gledelig å finne grunnlag for en ny kategori av *strategi* for *eksempelgenerering* i datamaterialet mitt. Denne kategorien kalte jeg for *Ferdig eksempel* (se kapittel 4.3.4).

6.2.3 Funn i analysene av *forståelse*

På forhånd hadde jeg forventet at både *Instrumentell* – og *Relasjonell forståelse* skulle være synlig i datamaterialet mitt, noe som viste seg å stemme. Jeg var også på forhånd nysgjerrig på om det var synlig at elever beveget seg fra en *Instrumentell* – til en *Relasjonell forståelse.* Forventningene mine til dette var ikke veldig høye, så det var ekstra gledelig at jeg fant tilfeller av dette. Dette var også grunnlaget for at jeg definerte en ny kategori for *forståelse* til bruk i min studie: *Fra Instrumentell til Relasjonell forståelse* (se kapittel 4.4.3).

6.2.4 Funn i korrelasjonsanalysene

I dette underkapittelet kommenterer jeg funnene som fremkom i kapittel 5.2.

Da jeg skulle gå i gang med korrelasjonsanalyser, var sammenhenger mellom *strategi* og *forståelse* noe jeg var ganske sikker på å finne. Jeg hadde en sterk antakelse om at jeg ville finne en sammenheng mellom *Relasjonell forståelse* og *strategien Analyse* og mellom *Instrumentell forståelse* og *strategien Prøving og feiling.* Slik jeg ser det er det en logikk og naturlighet i disse sammenhengene. Skemp (1976) sin korte beskrivelse av *Relasjonell forståelse* er at en vet hva en skal gjøre og hvorfor. Den *strategien* som kanskje da ligger nærmest er det Antonini (2006) kaller *Analyse. Analyse innebærer* at elevene utleder betingelsene til logiske konsekvenser som fremkaller en prosedyre eller et ferdig eksempel. *Regler uten grunner* er Skemp (1976) sin korte beskrivelse av *Instrumentell forståelse. Strategien* Antonini (2006) kaller *Prøving og feiling* er kanskje nærliggende å benytte seg av ved *Instrumentell forståelse* siden reglene en da kan ikke alltid er dypere grunnfestet. Mine antakelser om sammenhengene mellom *forståelse* og *strategi* viste seg å stemme. Korrelasjonskoeffisientene var på 0,80 for korrelasjonen mellom *Relasjonell forståelse* og *Analyse* og 0,89 for korrelasjonen mellom *Instrumentell forståelse* og *Prøving og feiling* (Se Tabell 5-4). Jeg antok også at jeg ville finne positiv korrelasjon mellom *Relasjonell forståelse* og *Antall vellykkede eksempler.* Denne sammenhengen sier seg nærmest selv. Ved *Relasjonell forståelse* av et emne har du alle muligheter for å lage *vellykkede eksempler*. Dette viste seg også å stemme med en korrelasjonskoeffisient på 0,94 (Se Tabell 5-6). Mellom *Analyse* og *Antall vellykkede eksempler,* forventet jeg å finne en positiv korrelasjon og en negativ korrelasjon mellom *strategien Prøving og feiling* og *Antall vellykkede eksempler*. Dette viste seg også å stemme med korrelasjonskoeffisienter på henholdsvis 0,88 og -0,76 (Se Tabell 5-5). Det som var interessant i dette funnet, var å sammenligne det med funnene til Iannone m. fl. (2011) på *strategier* og *vellykkede eksempler*. I deres studie er *Prøving og feiling* brukt i 82% av genereringsforsøkene og i 80% av de vellykkede forsøkene. Disse tallene kan umulig gi en negativ korrelasjon mellom denne *strategien* og *Antall vellykkede eksempler* i deres studie. I min studie er *Prøving og feiling* brukt i 41% av alle genereringsforsøkene og i 27% av de vellykkede forsøkene. Utvalget av elever er ikke sammenlignbart i disse to studiene, ei heller tema og måten oppgavene ble lagt frem på. Likevel er det interessant at studiene viser så forskjellige ting på dette punktet.

Jeg må innrømme at jeg var ganske skeptisk til å finne noen sammenhenger mellom *samtaleelementene* og *strategier/forståelse/antall vellykkede eksempler* i datamaterialet mitt. Noe tvilende gikk jeg gikk jeg i gang med korrelasjonsanalysen som hadde med *samtaleelementer* å gjøre.

Samtaleelementer var det første jeg så på i datamaterialet mitt. I denne prosessen konsentrerte jeg meg utelukkende om samtalene, og jeg tok ikke stilling til *strategivalg*, *forståelsestyper*, *vellykkede eksempler* eller hvorvidt utsagnene deres var matematisk riktig eller ikke. Om en elev sine utsagn kom under kategorien *Argumentasjon,* var uavhengig av om argumentene var *matematisk* riktig eller ikke. Og elevene kunne *Bygge videre* på hverandres utsagn, uavhengig av om deres viderebygging førte dem nærmere en riktig løsning eller ikke. Elevers *evalueringer* av egne, andres eller felles forslag eller løsninger kom under Alrø og Skovsmose (2002) sin kategori *Å evaluere* uavhengig av om evalueringen var matematisk korrekt eller ikke. Jeg hadde derfor en følelse av at jeg i denne prosessen var en ren samtaleanalytiker og at matematikeren i meg var satt på sidelinjen. Følelsen min var at *samtaleelementene* var uavhengige, at de fleste forekom under flere typer *forståelse*, *strategivalg* og uavhengig av om eksemplene var *vellykket* løst eller ikke. Overraskelsen og gleden var derfor stor når korrelasjonene mellom *samtaleelementer* og de andre variablene var så tydelige. Jeg ble oppriktig forbauset.

I *Tabell 5-1 Korrelasjoner mellom samtaleelementer og strategier,* er det mest interessante for meg hvordan *samtaleelementene Argumentasjon* og *Bygge videre* korrelerer så sterkt positivt med *strategiene Analyse* og *Transformasjon* og så sterkt negativt med *strategien Prøving og feiling*. Dette viser at antagelsen jeg hadde om at det samtaletekniske i mitt datamateriale var uavhengig av *strategier* var helt feil. Korrelasjonskoeffisientene i Tabell 5-1 viser at det er tydelige sammenhenger mellom disse variablene i mitt datamateriale.

I *Tabell 5-2 Korrelasjoner mellom samtaleelementer og forståelse og Tabell 5-3 Korrelasjoner mellom samtaleelementer og antall vellykkede eksempler,* er det tre *samtaleelementer* som peker seg ut med kraftige korrelasjoner. *Argumentasjon, Bygge videre* og *Å evaluere* korrelerer positivt både med *Relasjonell forståelse* og *Antall vellykkede eksempler.* Dette viser at antagelsen jeg hadde om at det samtaletekniske i mitt datamateriale var uavhengig av *forståelse* og at *antall vellykkede eksempler* også var helt feil.

Disse funnene kan sees på som en bekreftelse på det Niss og Jensen (2002) skriver om at *matematiske kompetanser* ikke er adskilt fra hverandre, men at de overlapper hverandre. Forekomstene av *samtaleelementene Argumentasjon, bygge videre og Å evaluere* i mitt datamateriale kan tolkes inn under både *Resonneringskompetansen, Kommunikasjonskompetansen og* modeller*ingskompetansen. Antall vellykkede eksempler* kan tolkes tydeligst inn under *Problembehandlingskompetansen,* og mine funn viser at i min studie er det overlapping og sammenheng mellom disse.

Her viste det seg at det ikke hadde vært en fordel å bruke *kompetanser* på grunn av stor overlapp.

7 Avslutning

7.1 Konklusjon

Når jeg til avslutningsvis skal komme med en konklusjon er det naturlig å hente frem igjen forskningsspørsmålene for å vurdere om funnene jeg har gjort kan være med å svare på dem:

1. Hvilke typer *samtaleelementer*, *strategier* og *forståelsestyper* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å *generere* egne *eksempler*?
2. Er det sammenheng mellom noen av variablene *strategi, samtaleelement, forståelsestype og antall vellykkede eksempler* i arbeid med *Elevgenererte eksempler*?

Svaret på mitt første forskningsspørsmål er:

- Alle *samtaleelementene* til Alrø og Skovsmose (2002), underkategoriene til Varhol (2017) og mine egne underkategorier *Bygge videre* og *Gjenta* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å generere egne eksempler.
- Alle Antonini (2006) sine *strategier* og min egen *strategi Ferdig eksempel* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å generere egne eksempler.
- Begge Skemp (1976) sine *forståelsestyper* og min egen kategori *Fra Instrumentell til Relasjonell forståelse* kan identifiseres hos elevene i arbeid med å generere egne eksempler

Svaret på mitt andre forskningsspørsmål er: Ja, det er forskjellige sammenhenger mellom variablene *strategi, samtaleelement, forståelsestype og antall vellykkede eksempler* i arbeid med *Elevgenererte eksempler* i min studie. Disse er utførlig beskrevet kapittel 5.2 og kapittel 6.2.4.

Det er fristende å utvide og lete etter andre typer av *strategier*, *forståelse* og *kompetanser* i mitt datamateriale. Jeg kunne for eksempel prøvd å finne svar på spørsmålene:

- Hvilke av Pólya (1957) sine *problemløsningsstrategier* kan identifiseres i datamaterialet mitt?

- Hvilke av Niss og Jensen (2002) sine *kompetanser* kan identifiseres i datamaterialet mitt?
- Hvilke av Kilpatrick m. fl. (2001) sine *kompetanser* kan identifiseres i datamaterialet mitt?

Jeg har så vidt berørt og nevnt Niss og Jensen (2002) sine *kompetanser* i funnene, men ellers har jeg nøyd meg med kategoriene for *strategier* og *forståelse* jeg valgte ut og redegjorde for i kapittel 2. Med rammen til en masteroppgave tror jeg dette var et godt valg.

7.2 Feilkilder

I kapittel 3.8 var jeg inne på feilkilder som typen oppgaver, utvalg av elever og kategoriseringsprosessen av datamaterialet mitt. Jeg har analysert datamaterialet mitt for *samtaleelementer, forståelsestyper, strategier og antall vellykkede eksempler*. En type feilkilde som jeg ikke var inne på i kapittel 3.8, kan være at noen av begrepene under disse hovedtemaene jeg har analysert kanskje overlapper noe. For eksempel ligger det i *Strategien Analyse og forståelsestypen Relasjonell forståelse* noe likt begrepsmessig som kanskje kan være en feilkilde. Å finne korrelasjoner mellom disse variablene var noe jeg antok og fant (se kapittel 5.2). Når det gjelder de ulike *samtaleelementene* opp mot de andre hovedtemaene er det ingen naturlige begrepsmessige overlapper slik jeg ser det.

7.3 Mulige implikasjoner

For meg har kvaliteten på samtalene i datamaterialet mitt overrasket meg. Jeg ble også overrasket over sammenhengen mellom *samtaleelementene* og *strategi/forståelse/antall vellykkede eksempler.* For min egen del kommer jeg som matematikklærer til å benytte meg av *Elevgenererte eksempler* i mange tema i matematikken. I min studie kom *Elevgenererte eksempler* inn etter at elevene var ferdig med et emne og fungerte mest som en indikator på type *forståelse* og ikke like mye som et redskap til dypere *forståelse*. Jeg kommer nok til å eksperimentere med å bruke *Elevgenererte eksempler* i innlæringen av et tema for å se om det kan være et redskap til mer *Relasjonell forståelse*, ikke bare en indikator på forståelse.

Min studie er begrenset, utvalget av elever er lite og jeg har bare brukt eksempeloppgaver i trigonometri. Jeg har også vært inne på mulige feilkilder i studien min. Mine funn kan derfor ikke generaliseres, men det er interessant å spekulere i mulige implikasjoner dersom det viser seg at funnene kan gjelde for et større utvalg elever og for flere *matematiske* emner. Hvilke anbefalinger ville jeg da gi til andre matematikklærere?

Jeg ville anbefalt å tilrettelegge for arbeid med *Elevgenererte eksempler* og andre åpne oppgaver i matematikktimene. Dette kan føre til økt samtalekvalitet. Og noen av *samtaleelementene* korrelerer positivt med *Relasjonell forståelse* og *antall vellykkede oppgaver*. Dette gjelder *samtaleelementene Argumentasjon, Bygge videre* og *Å evaluere*. Som matematikklærer ville jeg da forsøkt å styre samtalene i retning av disse *samtaleelementene*. Hvordan kunne det vært gjort? Et mulig redskap kunne kanskje vært å bevisst og konkret utdele roller elevene skal innta og lage et slags rollespill i læringssituasjonen. «I samtalen om disse oppgavene skal du innta «*Argumentasjonsrollen*», og du skal innta, «*bygge videre på det den andre sier-rollen*». Drageset og Allern (2019) har forsket på bruk av rollespill i bruk i matematikkundervisningen, og på siste masterseminaret på studiet mitt våren 2019 gjorde vi en øvelse der vi skulle innta roller som «nysgjerrigper» og «skeptiker». Dette kan være gode redskaper for å styre samtalen i ønsket retning.

Men økt kvalitet på den matematiske samtalen er ikke det eneste en kan gjøre. Et funn i min studie er at valg av *strategi* har sterk sammenheng med *forståelsestyper* og *Antall vellykkede eksempler*. Som lærer ville jeg gitt opplæring i – og forsøke å styre elevene mot å bruke *Analyse* som strategi siden dette er så sterkt knyttet opp mot *Relasjonell forståelse* og *Antall vellykkede eksempler.* Schoenfeld (1992) skriver utdypende om hvordan elever kan lære seg nye løsningsstrategier

Det kan ikke utelukkes at mine funn kan gjelde for et større utvalg elever og for flere *matematiske* emner. Mine anbefalinger i avsnittet over er basert på dette.

Jeg har i likhet med Amdal m. fl. (2011) stor tro på at *Elevgenererte eksempler* kan være en måte å variere og forbedre undervisningen på både i videregående skole og i grunnskolen.

7.4 Forslag til videre forskning

Det mest nærliggende forslaget fra meg til videre forskning, er å forske på om en kan finne tilsvarende funn som mine med andre utvalg av elever eller med et annet matematisk tema for oppgavene. Dette er jeg nysgjerrig på.

Jeg har brukt Alrø og Skovsmose (2002) sine *samtaleelementer* som hadde utgangspunkt i forskning på *Undersøkelseslandskap.* Et av mine funn er at jeg har identifisert alle Alrø og Skovsmose (2002) sine *samtaleelementer* i mitt datamateriale. Dette kan kanskje antyde at elevgenerte eksempler kan være et godt utgangspunkt for *Undersøkelseslandskap.* Undervisningsopplegget mitt var ikke spesielt designet for å legge til rette for at *Undersøkelseslandskap* skulle oppstå. Jeg har tro på både *elevgenerte eksempler* og *Undersøkelseslandskap* og skulle gjerne forsket på om *Undersøkelseslandskap*er med *Elevgenererte eksempler* som utgangspunkt kunne oppstått. Og i så tilfelle hvor omfattende disse *Undersøkelseslandskapene* hadde vært og hvilken «kvalitet» de hadde hatt.

En annen ting som hadde vært interessant å forske på, er mulige sammenhenger mellom *strategier*, *samtaleelementer*, *forståelse* og antall vellykkede løste oppgaver med en annen type av undersøkende oppgaver enn *Elevgenererte eksempler*.

Litteraturliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique* (1 ed.). Netherlands: Springer Netherlands.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006). Undersøgende samarbeijde i matematikkundervisning - udvikling av IC-moldellen. In M. Blomhøj & O. Skovsmose (Eds.), *Kunne det tænkes?: Om matematiklæring* (pp. 110-126): Albertslund: Malling Beck.

Amdal, A., Bjørnestad, A., & Sanne, A. (2011). Elevgenererte eksempler. *Tangenten, 22*(4), 18--22.

Anderson, J. R. (1976). *Language, Memory, and Thought*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Antonini, S. (2006). Graduate students' processes in generating examples of mathematical objects. *Proceedings of the 30th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, 2*, 57-64.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). *Exemplification in mathematics education* (Vol. 1).

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two Preservice Teachers' Conceptions and Practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153. doi:10.1023/A:1009947032694

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5 ed.). London: RoutledgeFalmer.

Dahlberg, R., & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*(33), 283-299.

Davidson, J., Davidson, B., & Vanderkam, L. (2007). *Genius Denied: How to Stop Wasting Our Brightest Young Minds*: Simon & Schuster.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions--a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics.(Report). *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 281. doi:10.1007/s10649-013-9515-1

Drageset, O. G., & Allern, T.-H. (2019). Curious classrooms, Changing classroom discourse in mathematics using roles. *Ikke publisert enda (mai 2019), 2019*.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*: NCTM.

Halmos, P. R. (1985). Pure Thought is Better Yet. *The College Mathematics Journal, 16*(1), 14-16. doi:10.1080/07468342.1985.11972845

Henrici, P. (1974). The influence of computing on mathematical research and education. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 20*.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Iannone, P., Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educ Stud Math, 77*.

Kaput, J. J. (1979). Mathematics and learning: Roots of wpistemological status, . In J. Lochhead & J. Clement (Eds.), *Cognitive Process Instruction*: Franklin Institute Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kleve, B., & Solem, I. H. (2014). Aspects of teacher´s mathematical knowledge in the orchestration of a discussion about rational numbers. In *Nordic Studies in Mathematics Education* (pp. 119-134.).

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-267. doi:10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J. (2010). Phenomenology of example construction. *Zdm, 43*(2), 195-204. doi:10.1007/s11858-010-0297-y

Mortimer, E. F., & Scott, P. (2003). *Meaning Making in Secondary Science Classroomsaa*. Buckingham: Open University Press.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? : a study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.* (no. 154), Faculty of Educational Sciences, University of Oslo, Oslo.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet

Pettersen, A., & Nortvedt, G. A. (2018). Identifying Competency Demands in Mathematical Tasks: Recognising What Matters. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(5), 949-965.

Piaget, J., & Duckworth, E. (1970). Genetic Epistemology. *American Behavioral Scientist, 13*(3), 459-480. doi:10.1177/000276427001300320

Pólya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed. ed.): Princeton Uneversity Press.

Pólya, G. (1962). *Mathematial discovery: On understanding, learning, ad teaching problem solving*. New York, USA: Wiley.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural kvowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75-110). London: Psychology Press.

Romberg, T. A. (1994). Classroom Instruction That Fosters Mathematical Thinking and Problem Soving: Connections Between Theory and Practice. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*: L. Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). LEARNING TO THINK MATHEMATICALLY: PROBLEM SOLVING, METACOGNITION, AND SENSE-MAKING IN MATHEMATICS. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi:10.1007/bf00302715

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. In T. Dalvang & R. V. (Eds.), *Matematikk for alle: Rapport fra Lamis 1. sommerkurs, Trondheim 6.-9.august 1998*: Landslaget for matematikk i skolen.

Sollid, H. (2013). *Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning*: Universitetsforlaget.

Varhol, A. (2017). "Jeg hadde aldri fått til dette om jeg skulle gjort det alene" -Å lære gjennom samtale. In.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples*: Taylor & Francis.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using Learner Generated Examples to Introduce New Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 97-109. doi:10.1007/s10649-008-9142-4

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78. doi:10.2307/749198

8 Vedlegg

8.1 Oppgaver brukt til pre- og posttest under pilotundersøkelsen

Mål med oppgave

Vise elevenes eksempelrom på trekanter med et visst areal, og vise elevene sine *strategier* for å tegne trekanter med et visst areal.

Oppgave før undervisningsopplett

Lag eksempler på minst 6 ulike trekanter med areal lik 10. Skriv på mål på nok sider og vinkler til at arealet kommer tydelig frem.

Ekstraspørsmål

Kan dere lage et eksempel på en trekant med areal 10 som ser helt annerledes enn disse?

Kan dere gi eksempel på en annen strategi enn dere har brukt til nå som også kan gi trekanter med areal lik 10?

Kan dere gi et eksempel der dere bruker arealsetningen for å løse oppgaven?

Oppgave etter

Lag eksempler på minst 6 ulike trekanter med areal lik 7. Skriv på mål på nok sider og vinkler til at arealet kommer tydelig frem.

8.2 Oppgaver gitt til elever i pilotundersøkelsen

(Elevene fikk oppgavene en om gangen på lerret og fikk bare teksten som står i kolonnene «Oppgave» og «Hjelpemidler» oppgitt)

Nr	**Oppgave**	**Hjelpe-midler**	**Type eksempel**	**Strategi**	**Forventning**
1	Lag et eksempel på en trekant. (Den første trekanten du kommer på)	Linjal og gradskive	Sentrale, generiske og dominante eksempler	"Lag et eksempel"	Rettvinklet, eller alle vinklene mindre enn 90°. Grunnlinje parallell med bunnen av siden.
2	Lag et eksempel på en trekant med areal lik 6	Linjal og gradskive	Sentrale, generiske og dominante eksempler	"Legg til betingelser sekvensielt"	Rettvinklet trekant for enkelhets skyld. $\frac{3 \cdot 4}{2}$ eller $\frac{6 \cdot 2}{2}$. Velger noen ikke heltall?
3	Lag et eksempel på en trekant som ikke er rettvinklet med areal lik 6	Linjal og gradskive	Ikke-eksempel	"Legg til betingelser sekvensielt"	Trekant med alle vinklene mindre enn 90°, grunnlinje horisontalt på arket. $\frac{3 \cdot 4}{2}$ eller $\frac{6 \cdot 2}{2}$
4	Lag et eksempel på en trekant der en av vinklene er større en 90° med areal lik 6	Linjal og gradskive	Sentrale, generiske og dominante eksempler	"Legg til betingelser sekvensielt"	Noen med høyde som ikke skjærer grunnlinjen? Noen med vinkelen som er større en 90° som motstående til grunnlinjen?
5	Lag et eksempel på en trekant der høyden ikke treffer				Noen samme som oppgave 4, noen som lager ny. Grunnlinje parallell

	grunnlinjen med areal lik 6				med bunnsiden av ark
6	Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6	CAS		”Bytt ut betingelse”	Kun et mulig eksempel. Mulig løsningsmetode: $6 = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
7	Lag et eksempel på en trekant med vinkelsum høyere enn 180°	Linjal og gradskive	Spesielle eksempler	”Forvirrende forventninger”	Sfærisk trekant, trekant på overflaten til en kule
8	Lag et eksempel på en trekant med $\sin A = \frac{1}{2}$ og areal lik 6	Linjal og gradskive. Oppgitt at $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$? Eller ikke?		”Bytt betingelse”	Ikke rettvinklet trekant med sidene som omslutter vinkel A som 2 og 12, 4 og 6 eller 8 og 3.
9	Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med $\sin A = \frac{1}{2}$ og areal lik 6	CAS		”Legg til en betingelse”	Kun en mulig løsning. Forslag løsningsmetode: $c^2 + a^2 = b^2$ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ $\frac{c \cdot a}{2} = 6$

10	Lag et eksempel på en trekant med $\tan A = \frac{1}{3}$ og areal lik 6.	CAS		”Bytt ut betingelse”	Rettvinklet trekant med grunnlinje 6 og høyde 2
11	Lag et annet eksempel på en trekant med $\tan A = \frac{1}{3}$ og areal lik 6.	CAS		”Lag et annet eksempel”	Forventet løsningsmetode: $6 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, velger en verdi for a. Eller tilsvarende i flere steg. Eller ta utgangspunkt i kateter på 1 og 3 og forlenge hypotenus til høyden blir 4.

8.3 Oppgaver gitt til elever på hovedundersøkelsen

(Elevene fikk oppgavene en om gangen på lerret og fikk bare teksten som står i kolonnene «Oppgave» og «Hjelpemidler» oppgitt)

Nr	Oppgave	Hjelpe-midler	Type eksempel	Kommentar	Forventning
1	Lag et eksempel på en trekant med areal lik 6	Linjal og gradskive	Sentrale, generiske og dominante eksempler	”Legg til betingelser sekvensielt”	Rettvinklet trekant for enkelhets skyld. $\frac{3 \cdot 4}{2}$ eller $\frac{6 \cdot 2}{2}$. Velger noen ikke heltall?
2	Lag et eksempel på en trekant der en av vinklene er større en 90° med areal lik 6	Linjal og gradskive	Sentrale, generiske og dominante eksempler	”Legg til betingelser sekvensielt”	Noen med høyde som ikke skjærer grunnlinjen? Noen med vinkelen som er større en 90° som motstående til grunnlinjen?
3	Lag et eksempel på en trekant med vinkelsum høyere enn 180°	Linjal og gradskive	Spesielle eksempler	”Forvirrende forventninger”	Sfærisk trekant, trekant på overflaten til en kule
4	Lag et eksempel på en trekant med $\sin A = \frac{1}{2}$ og areal lik 6	Linjal og gradskive.		”Bytt betingelse”	Ikke rettvinklet trekant med sidene som omslutter vinkel A som 2 og 12, 4 og 6 eller 8 og 3.
5	Lag et eksempel på en rettvinklet trekant med	Linjal, gradskive, kalkulator		”Legg til en betingelse”	Kun en mulig løsning. Forslag løsningsmetode:

	$\sin A = \frac{1}{2}$ og areal lik 6	og GeoGebra			$c^2 + a^2 = b^2$ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ $\frac{c \cdot a}{2} = 6$
6	Lag et eksempel på en likesidet trekant med areal lik 6	Linjal, gradskive, kalkulator og GeoGebra		”Bytt ut betingelse”	Kun et mulig eksempel. Mulig løsningsmetode: $6 = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
7	Lag et eksempel på en trekant med $\tan A = \frac{1}{3}$ og areal lik 6	Linjal, gradskive, kalkulator og GeoGebra		”Bytt ut betingelse”	Rettvinklet trekant med grunnlinje 6 og høyde 2
8	Lag et annet eksempel på en trekant med $\tan A = \frac{1}{3}$ og areal lik 6	Linjal, gradskive, kalkulator og GeoGebra		”Lag et annet eksempel”	Forventet løsningsmetode: $6 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\left(tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, velger en verdi for a. Eller tilsvarende i flere steg. Eller ta utgangspunkt i kateter på 1 og 3 og forlenge hypotenus til høyden blir 4.
9	Lag et eksempel på en trekant med 3 oppgitte mål (sider eller	Linjal, gradskive, kalkulator			Alle 3 sider oppgitt, men ingen vinkler. En vinkel og to sider oppgitt, men ikke

	vinkler) der du kan bruke cosinussetningen, men ikke sinussetningen for å regne ut et fjerde mål (en side eller en vinkel)	og GeoGebra			motstående side til vinkelen.
10	Lag et eksempel på en trekant med 3 oppgitte mål (sider eller vinkler) der du både kan bruke cosinussetningen, og sinussetningen for å regne ut et fjerde mål (en side eller en vinkel)	Linjal, gradskive, kalkulator og GeoGebra			En vinkel og 2 sider, en av sidene motstående til vinkelen.

8.4 Intervjuer med lærerne til klassene jeg samlet inn data fra

I dette vedlegget er svarene til lærerne som var involvert i pilotundersøkelsen eller hovedundersøkelsen. De har her svart på hvordan de opplevde den muntlige aktiviteten til elevene under undervisningsopplegget som ble gjennomført sammenlignet med en mer vanlig matematikktime.

Lærer A i pilotundersøkelse

Jeg synes at opplegget var en fin avveksling. Jeg har også et prosjekt der jeg prøver å få mer muntlig aktivitet i klassene som jeg har. I hver time har jeg som mål å få en eller flere elever opp på tavlen, og få i gang en klassediskusjon om det som foregår på tavlen. Men det er en del elever som ikke ønsker fram på tavlen, og det blir gjerne de samme elevene som er aktive fra time til time. Med ditt opplegg merket jeg at alle elevene var entusiastisk med, og de små gruppene gjorde at alle fikk uttrykt seg.
Men merket også at de som er stille hos meg, også ble stille i klassediskusjonen som du hadde til slutt i timen. Så det ga ideer til mer bruk av smågrupper for å øke den muntlige aktiviteten blant elevene, også de som i utgangspunktet er stille. Og kanskje også oppgaver der det ikke er ett fasitsvar, dette gjør at det blir mer «mattesnakk».

Lærer B i pilotundersøkelse

Sammenlignet med en vanlig matematikktime var elevene aktive. jeg hadde forventet at dei ville vere litt meir tilbakeholdne. Både fordi vi slo sammen de to klassene og at det dermed var en god del fleire tilstades enn normalt. Du kom jo også utenfra. I en vanlig matematikktime pleier jeg sjelden å oppmuntre elevene til å vise fremme ved tavlen. Det var sånn sett forbausende i hvor stor grad de var på og gjerne ville legge frem for klassen. I en vanlig matematikktime er det jo mer det at elevene stiller spørsmål og i mindre grad kommer med løsninger. En annen ting er jo at oppgaven i hvert fall til en viss grad la til rette for at elevene hadde løsninger på de fleste problemstillinger. Alt i alt meiner jeg eleven var bra aktive.

Lærer i hovedundersøkelse

I disse timene så jobbet elevene mer fokusert. fordi de hadde konkrete oppgaver og de snakket sammen om de oppgavene. Jeg så at flere meldte seg på til å snakke. Og de flinkeste, de snakker jo sammen hele tiden. Jeg synes at aktiviteten var mer målrettet enn i en vanlig time. Absolutt. Selv om det var litt støy, så var de mer målrettet. Jeg tror rett og slett de ble litt fenget av de oppgavene. At det er litt gøy, selv om de synes det er vanskelig. Selv disse aller svakeste meldte seg litt på. Det var veldig bra. Det er oppgaver de ikke har sett før. Det er sånn problemløsende synes jeg. Det er jo noe de ikke kan. Du ser at de blir litt frustrert, men… jeg synes jo det var en del kreative løsninger.

8.5 Meldeskjema til NSD

MELDESKJEMA

Meldeskjema (versjon 1.6) for forsknings- og studentprosjekt som medfører meldeplikt eller konsesjonsplikt (jf. personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter).

1. Intro		
Samles det inn direkte personidentifiserende opplysninger?	Ja ○ Nei ●	En person vil være direkte identifiserbar via navn, personnummer, eller andre personentydige kjennetegn. Les mer om hva personopplysninger er. NB! Selv om opplysningene skal anonymiseres i oppgave/rapport, må det krysses av dersom det skal innhentes/registreres personidentifiserende opplysninger i forbindelse med prosjektet. Les mer om hva behandling av personopplysninger innebærer.
Hvis ja, hvilke?	□ Navn □ 11-sifret fødselsnummer □ Adresse □ E-post □ Telefonnummer □ Annet	
Annet, spesifiser hvilke		
Samles det inn bakgrunnsopplysninger som kan identifisere enkeltpersoner (indirekte personidentifiserende opplysninger)?	Ja ● Nei ○	En person vil være indirekte identifiserbar dersom det er mulig å identifisere vedkommende gjennom bakgrunnsopplysninger som for eksempel bostedskommune eller arbeidsplass/skole kombinert med opplysninger som alder, kjønn, yrke, diagnose, etc. NB! For at stemme skal regnes som personidentifiserende, må denne bli registrert i kombinasjon med andre opplysninger, slik at personer kan gjenkjennes.
Hvis ja, hvilke	Utvalgskriterier (utvalget skjer via mattelærere som underviser i 1T i mitt nettverk)	
Skal det registreres personopplysninger (direkte/indirekte/via IP-/epost adresse, etc) ved hjelp av nettbaserte spørreskjema?	Ja ○ Nei ●	Les mer om nettbaserte spørreskjema.
Blir det registrert personopplysninger på digitale bilde- eller videoopptak?	Ja ○ Nei ●	Bilde/videoopptak av ansikter vil regnes som personidentifiserende.
Søkes det vurdering fra REK om hvorvidt prosjektet er omfattet av helseforskningsloven?	Ja ○ Nei ●	NB! Dersom REK (Regional Komité for medisinsk og helsefaglig forskningsetikk) har vurdert prosjektet som helseforskning, er det ikke nødvendig å sende inn meldeskjema til personvernombudet (NB! Gjelder ikke prosjekter som skal benytte data fra pseudonyme helseregistre). Les mer. Dersom tilbakemelding fra REK ikke foreligger, anbefaler vi at du avventer videre utfylling til svar fra REK foreligger.
2. Prosjekttittel		
Prosjektittel	Elevgenererte eksempler for å forstå matematiske begreper	Oppgi prosjektets tittel. NB! Dette kan ikke være «Masteroppgave» eller liknende, navnet må beskrive prosjektets innhold.
3. Behandlingsansvarlig institusjon		
Institusjon	Universitetet i Bergen	Velg den institusjonen du er tilknyttet. Alle nivå må oppgis. Ved studentprosjekt er det studentens tilknytning som er avgjørende. Dersom institusjonen ikke finnes på listen, har den ikke avtale med NSD som
Avdeling/Fakultet	Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet	

Institutt	Matematisk institutt	personvernombud. Vennligst ta kontakt med institusjonen. Les mer om behandlingsansvarlig institusjon.
4. Daglig ansvarlig (forsker, veileder, stipendiat)		
Fornavn	Christoph	Før opp navnet på den som har det daglige ansvaret for prosjektet. Veileder er vanligvis daglig ansvarlig ved studentprosjekt. Les mer om daglig ansvarlig. Daglig ansvarlig og student må i utgangspunktet være tilknyttet samme institusjon. Dersom studenten har ekstern veileder, kan biveileder eller fagansvarlig ved studiestedet stå som daglig ansvarlig. Arbeidssted må være tilknyttet behandlingsansvarlig institusjon, f.eks. underavdeling, institutt etc. NB! Det er viktig at du oppgir en e-postadresse som brukes aktivt. Vennligst gi oss beskjed dersom den endres.
Etternavn	Kirfel	
Stilling	Førsteamanuensis	
Telefon		
Mobil	91510728	
E-post	Christoph.Kirfel@uib.no	
Alternativ e-post	kirfel.hestholm@gmail.com	

Arbeidssted	Universitetet i Bergen, institutt for matematikk	
Adresse (arb.)	Realfagbygget, Allégt. 41	
Postnr./sted (arb.sted)	5020 Bergen	
5. Student (master, bachelor)		
Studentprosjekt	Ja ● Nei ○	Dersom det er flere studenter som samarbeider om et prosjekt, skal det velges en kontaktperson som føres opp her. Øvrige studenter kan føres opp under pkt 10.
Fornavn	Ola Kåre	
Etternavn	Risa	
Telefon		
Mobil	92054650	
E-post	colabolaola@gmail.com	
Alternativ e-post	ok@huskbedre.no	
Privatadresse	Gosen 91	
Postnr./sted (privatadr.)	5253 Sandsli	
Type oppgave	● Masteroppgave ○ Bacheloroppgave ○ Semesteroppgave ○ Annet	
6. Formålet med prosjektet		

Formål	Å forske på "elevgenererte eksempler" som didaktisk tilnærming i utvalgte tema i trigonometri og algebra. Utkast til forskningsspørsmål er: 1. Hvilken type matematisk muntlig aktivitet kan manobservere hos elever som er med på et undervisningsopplegg der «elevgenererte eksempler» er brukt som didaktisk tilnærming? 2. Hvilke endringer i elevene sine eksempelrom kanman observere hos elever som har vært med på et undervisningsopplegg der «elevgenererte eksempler» er brukt som didaktisk tilnærming?"	Redegjør kort for prosjektets formål, problemstilling, forskningsspørsmål e.l.
7. Hvilke personer skal det innhentes personopplysninger om (utvalg)?		
Kryss av for utvalg	□ Barnehagebarn ■ Skoleelever □ Pasienter □ Brukere/klienter/kunder □ Ansatte □ Barnevernsbarn □ Lærere □ Helsepersonell □ Asylsøkere □ Andre	Les mer om forskjellige forskningstematikker og utvalg.
Beskriv utvalg/deltakere	Elever i VG1 som var valgt matematikkfaget 1T .	Med utvalg menes dem som deltar i undersøkelsen eller dem det innhentes opplysninger om.
Rekruttering/trekking	Utvalget av elever er gjort ved at jeg har benyttet meg av matematikklærere i mitt eget nettverk som underviser i matematikkfaget 1T. Elevene i studiet er elevene til disse matematikklærerne.	Beskriv hvordan utvalget trekkes eller rekrutteres og oppgi hvem som foretar den. Et utvalg kan rekrutteres gjennom f.eks. en bedrift, skole, idrettsmiljø eller eget nettverk, eller trekkes fra registre som f.eks. Folkeregisteret, SSB-registre, pasientregistre.
Førstegangskontakt	Jeg tar kontakt med utvalget ved at jeg drar på besøk til klassene til matematikklærerne i mitt nettverk.	Beskriv hvordan førsstegangskontakten opprettes og oppgi hvem som foretar den. Les mer om førstegagskontakt og forskjellige utvalg på våre temasider.
Alder på utvalget	□ Barn (0-15 år) ■ Ungdom (16-17 år) □ Voksne (over 18 år)	Les om forskning som involverer barn på våre nettsider.
Omtrentlig antall personer som inngår i utvalget	31	
Samles det inn sensitive personopplysninger?	Ja ○ Nei ●	Les mer om sensitive opplysninger.

Hvis ja, hvilke?	□ Rasemessig eller etnisk bakgrunn, eller politisk, filosofisk eller religiøs oppfatning □ At en person har vært mistenkt, siktet, tiltalt eller dømt for en straffbar handling □ Helseforhold □ Seksuelle forhold □ Medlemskap i fagforeninger	
Inkluderes det myndige personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse?	Ja ○ Nei ●	Les mer om pasienter, brukere og personer med redusert eller manglende samtykkekompetanse.
Samles det inn personopplysninger om personer som selv ikke deltar (tredjepersoner)?	Ja ○ Nei ●	Med opplysninger om tredjeperson menes opplysninger som kan identifisere personer (direkte eller indirekte) som ikke inngår i utvalget. Eksempler på tredjeperson er kollega, elev, klient, familiemedlem, som identifiseres i datamaterialet. Les mer.
8. Metode for innsamling av personopplysninger		
Kryss av for hvilke datainnsamlingsmetoder og datakilder som vil benyttes	□ Papirbasert spørreskjema □ Elektronisk spørreskjema □ Personlig intervju ■ Gruppeintervju ■ Observasjon ■ Deltakende observasjon □ Blogg/sosiale medier/internett □ Psykologiske/pedagogiske tester □ Medisinske undersøkelser/tester □ Journaldata (medisinske journaler)	Personopplysninger kan innhentes direkte fra den registrerte f.eks. gjennom spørreskjema,intervju, tester, og/eller ulike journaler (f.eks. elevmapper, NAV, PPT, sykehus) og/eller registre (f.eks.Statistisk sentralbyrå, sentrale helseregistre). NB! Dersom personopplysninger innhentes fra forskjellige personer (utvalg) og med forskjellige metoder, må dette spesifiseres i kommentar-boksen. Husk også å legge ved relevante vedlegg til alle utvalgs-gruppene og metodene som skal benyttes. Les mer om registerstudier. Dersom du skal anvende registerdata, må variabelliste lastes opp under pkt. 15 Les mer om forskningsmetoder.
	□ Registerdata	
	□ Annen innsamlingsmetode	
Tilleggsopplysninger	Jeg ønsker å benytte et gruppeintervju med en fortest av 4-6 av elevene før gjennomføring av undervisningsopplegg. Her ønsker jeg å gjøre lydopptak, notater. og samle inn skriftlig arbeid elevene gjør. Så ønsker jeg å gjennomføre et undervisningsopplegg for hele klassen (inkludert de 4-5 elevene som var med på gruppeintervju). Her ønsker jeg også å gjøre lydopptak med flere lydopptakere, gjøre notater og samle inn skriflig arbied av elevene. Etter dette ønsker jeg å gjøre et nytt gruppeintervju med ettertist med de samme 4-6 elevene som ble intervjuet før undervisningsopplegget.	
9. Informasjon og samtykke		
Oppgi hvordan utvalget/deltakerne informeres	■ Skriftlig □ Muntlig □ Informeres ikke	Dersom utvalget ikke skal informeres om behandlingen av personopplysninger må det begrunnes. Les mer.Vennligst send inn mal for skriftlig eller muntlig informasjon til deltakerne sammen med meldeskjema. Last ned en veiledende mal her. Les om krav til informasjon og samtykke. NB! Vedlegg lastes opp til sist i meldeskjemaet, se punkt 15 Vedlegg.

Samtykker utvalget til deltakelse?	● Ja ○ Nei ○ Flere utvalg, ikke samtykke fra alle	For at et samtykke til deltakelse i forskning skal være gyldig, må det være frivillig, uttrykkelig og informert. Samtykke kan gis skriftlig, muntlig eller gjennom en aktiv handling. For eksempel vil et besvart spørreskjema være å regne som et aktivt samtykke. Dersom det ikke skal innhentes samtykke, må det begrunnes. Les mer.
Innhentes det samtykke fra foreldre for ungdom mellom 16 og 17 år?	Ja ○ Nei ●	Les mer om forskning som involverer barn og samtykke fra unge.
Hvis nei, begrunn	Det er et mindre forskningsprosjekt med ikke-sensitive data.	

10. Informasjonssikkerhet

Hvordan registreres og oppbevares personopplysningene?	■ På server i virksomhetens nettverk □ Fysisk isolert PC tilhørende virksomheten (dvs. ingen tilknytning til andre datamaskiner eller nettverk, interne eller eksterne) □ Datamaskin i nettverkssystem tilknyttet Internett tilhørende virksomheten □ Privat datamaskin □ Videoopptak/fotografi ■ Lydopptak ■ Notater/papir ■ Mobile lagringsenheter (bærbar datamaskin, minnepenn, minnekort, cd, ekstern harddisk, mobiltelefon) □ Annen registreringsmetode	Merk av for hvilke hjelpemidler som benyttes for registrering og analyse av opplysninger. Sett flere kryss dersom opplysningene registreres på flere måter. Med «virksomhet» menes her behandlingsansvarlig institusjon. NB! Som hovedregel bør data som inneholder personopplysninger lagres på behandlingsansvarlig sin forskningsserver. Lagring på andre medier - som privat pc, mobiltelefon, minnepinne, server på annet arbeidssted - er mindre sikkert, og må derfor begrunnes. Slik lagring må avklares med behandlingsansvarlig institusjon, og personopplysningene bør krypteres.
Annen registreringsmetode beskriv		
Hvordan er datamaterialet beskyttet mot at uvedkommende får innsyn?	Lydopptakene gjøres med mobiltelefoner i flymodus. Rett etter opptak overføres lydfilene til PC hvor de krypteres og slettes fra mobiltelefonene. Datamaskinen med lydfilene er feskyttet med brukernavn og passord.	Er f.eks. datamaskintilgangen beskyttet med brukernavn og passord, står datamaskinen i et låsbart rom, og hvordan sikres bærbare enheter, utskrifter og opptak?
Samles opplysningene inn/behandles av en databehandler (ekstern aktør)?	Ja ○ Nei ●	Dersom det benyttes eksterne til helt eller delvis å behandle personopplysninger, f.eks. Questback, transkriberingsassistent eller tolk, er dette å betrakte som en databehandler. Slike oppdrag må kontraktsreguleres.
Hvis ja, hvilken		
Overføres personopplysninger ved hjelp av e-post/Internett?	Ja ○ Nei ●	F.eks. ved overføring av data til samarbeidspartner, databehandler mm. Dersom personopplysninger skal sendes via internett, bør de krypteres tilstrekkelig. Vi anbefaler ikke lagring av personopplysninger på nettskytjenester. Bruk av nettskytjenester må avklares med behandlingsansvarlig institusjon. Dersom nettskytjeneste benyttes, skal det inngås skriftlig databehandleravtale med leverandøren av tjenesten. Les mer.
Hvis ja, beskriv?		
Skal andre personer enn daglig ansvarlig/student ha tilgang til datamaterialet med personopplysninger?	Ja ○ Nei ●	
Hvis ja, hvem (oppgi navn og arbeidssted)?		

Utleveres/deles personopplysninger med andre institusjoner eller land?	● Nei ○ Andre institusjoner ○ Institusjoner i andre land	F.eks. ved nasjonale samarbeidsprosjekter der personopplysninger utveksles eller ved internasjonale samarbeidsprosjekter der personopplysninger utveksles.

11. Vurdering/godkjenning fra andre instanser

Søkes det om dispensasjon fra taushetsplikten for å få tilgang til data?	Ja ○ Nei ●	For å få tilgang til taushetsbelagte opplysninger fra f.eks. NAV, PPT, sykehus, må det søkes om dispensasjon fra taushetsplikten. Dispensasjon søkes vanligvis fra aktuelt departement.
Hvis ja, hvilke		
Søkes det godkjenning fra andre instanser?	Ja ○ Nei ●	I noen forskningsprosjekter kan det være nødvendig å søke flere tillatelser. Søkes det f.eks. om tilgang til data fra en registereier? Søkes det om tillatelse til forskning i en virksomhet eller en skole? Les mer om andre godkjenninger.
Hvis ja, hvilken		

12. Periode for behandling av personopplysninger

Prosjektstart Planlagt dato for prosjektslutt	25.03.2018 01.06.2019	Prosjektstart Vennligst oppgi tidspunktet for når kontakt med utvalget skal gjøres/datainnsamlingen starter. Prosjektslutt: Vennligst oppgi tidspunktet for når datamaterialet enten skalanonymiseres/slettes, eller arkiveres i påvente av oppfølgingsstudier eller annet.
Skal personopplysninger publiseres (direkte eller indirekte)?	□ Ja, direkte (navn e.l.) □ Ja, indirekte (identifiserende bakgrunnsopplysninger) ■ Nei, publiseres anonymt	Les mer om direkte og indirekte personidentifiserende opplysninger. NB! Dersom personopplysninger skal publiseres, må det vanligvis innhentes eksplisitt samtykke til dette fra den enkelte, og deltakere bør gis anledning til å lese gjennom og godkjenne sitater.

Hva skal skje med datamaterialet ved prosjektslutt?	■ Datamaterialet anonymiseres □ Datamaterialet oppbevares med personidentifikasjon	NB! Her menes datamaterialet, ikke publikasjon. Selv om data publiseres med personidentifikasjon skal som regel øvrig data anonymiseres.Med anonymisering menes at datamaterialet bearbeides slik at det ikke lenger er mulig å føre opplysningene tilbake til enkeltpersoner. Les mer om anonymisering av data.

13. Finansiering

Hvordan finansieres prosjektet?		Fylles ut ved eventuell ekstern finansiering (oppdragsforskning, annet).

14. Tilleggsopplysninger

Tilleggsopplysninger		Dersom prosjektet er del av et prosjekt (eller skal ha data fra et prosjekt) som allerede har tilrådning fra personvernombudet og/eller konsesjon fra Datatilsynet, beskriv dette her og oppgi navn på prosjektleder, prosjekttittel og/eller prosjektnummer.

15. Vedlegg		
Vedlegg	Antall vedlegg: 2. ● intervjuguide_ola_kaare_risa.docx ● informasjonsskriv_elevgenererte_eksempler.docx	

8.6 Svar og vurdering fra NSD

Christoph Kirfel

5008 BERGEN

Vår dato: 09.03.2018 Vår ref: 59194 / 3 / H JP Deres dato: Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 13.02.2018 for prosjektet:

59194	Elevgenererte eksempler for å forstå matematiske begreper
Behandlingsansvarlig	Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder
Daglig ansvarlig	Christoph Kirfel
Student	Ola Kåre Risa

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
•opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
•vår prosjektvurdering, se side 2
•eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 01.06.2019 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren Hanne Johansen-Pekovic

Kontaktperson: Hanne Johansen-Pekovic tlf: 55 58 31 18 / hanne.johansen-pekovic@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Ola Kåre Risa, colabolaola@gmail.com

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 59194

INFORMASJON OG SAMTYKKE

Du/dere har opplyst i meldeskjema at utvalget vil motta skriftlig informasjon om prosjektet, og samtykker skriftlig til å delta.

Vår vurdering er at informasjonsskrivet til utvalget er mangelfullt utformet, og vi ber deg/dere om å endre/tilføye følgende før du setter i gang med rekruttering:

- Vi ber om at du i femte avsnitt fjerner "Alt vil være anonymt". Siden du skal samle inn datamateriale ved bruk av lydopptaker i klasserom, så er det mulighet for at datamateriale vil inneholde personopplysninger.
- Du må også informere om at datamaterialet anonymiseres ved prosjektslutt

OBSERVASJON I SKOLEN

I følge prosjektmeldingen skal det gjennomføres observasjon i skole/klasserom. Ved videoobservasjon eller lydopptak under observasjon i skole må dere sørge for et alternativt opplegg for ungdommer som ikke skal delta i prosjektet. Dette fordi ungdommene skal kunne delta i sine vanlige aktiviteter uten at det registreres personopplysninger om dem til forskning. Personvernombudet forutsetter at det innhentes informert samtykke fra alle det samles personopplysninger om under observasjonen.

SIKKER LAGRING AV DATAMATERIALET

Personvernombudet forutsetter at du/dere behandler alle data i tråd med Universitetet i Bergen sine retningslinjer for datahåndtering og informasjonssikkerhet. Vi legger til grunn at bruk av mobil lagringsenhet er i samsvar med institusjonens retningslinjer.

ANONYMISERING

Prosjektslutt er oppgitt til 01.06.2019. Det fremgår av meldeskjema/informasjonsskriv at du/dere vil anonymisere datamaterialet ved prosjektslutt.

Anonymisering innebærer vanligvis å:

- slette direkte personopplysninger (som navn/koblingsnøkkel)
- slette eller omskrive/gruppere indirekte identifiserbare opplysninger som bosted/arbeidssted, alder, kjønn- slette lydopptak

For en utdypende beskrivelse av anonymisering av personopplysninger, se Datatilsynets veileder:
https://www.datatilsynet.no/globalassets/global/regelverk-skjema/veiledere/anonymisering-veileder-041115.pdf

8.7 Informasjonsskriv til deltakere i studien

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet

«Elevgenererte eksempler»

Bakgrunn og formål

Formålet med studien er å bruke «*Elevgenererte eksempler*» som didaktisk tilnærming i utvalgte tema i trigonometri og algebra i 1T matematikk. Jeg ønsker å finne ut om denne tilnærmingen kan føre til rikere *matematisk* muntlig aktivitet i timene og dypere forståelse i emnene i undervisningsopplegget.. Studien er en masterstudie ved *matematisk* institutt ved Universitetet i Bergen.

Utvalget er gjort ved at jeg har tatt kontakt med lærere i nettverket mitt som underviser i matematikkfaget 1T.

Hva innebærer deltakelse i studien?

Deltakelsen innebærer å være med på et undervisningsopplegg der det vil bli gjort lydopptak, notater og innsamling av skriftlig arbeid.

Lydopptakene gjøres med mobiltelefoner. Rett etter opptak overføres lydfilene til PC hvor de krypteres og kan slettes fra mobiltelefonene.

Hva skjer med informasjonen om deg?

Informasjon som innhentes vil *ikke* knyttes til navn, klasse eller skole. Det vil i masteroppgaven stå at utvalget er gjort via matematikklærere jeg kjenner og at klassen er en 1T klasse på en skole i Bergen. Deltakerne vil ikke kunne gjenkjennes i en publikasjon.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 1. juni 2019 og datamaterialet anonymiseres ved prosjektslutt.

Frivillig deltakelse

Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn. Dersom du trekker deg, vil alle opplysninger om deg bli anonymisert

Dersom du har spørsmål til studien, ta kontakt med Ola Kåre Risa på tlf. 92 05 46 50 eller veileder Christoph Kirfel på tlf. 91 51 07 28.
Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.