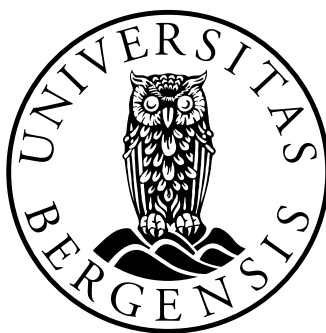


Kombinatoriske Hopf-algebraer og Loday-Ronco Hopf-algebraen av plane binære trær

Masteroppgave i matematikk

Andreas Østhus



Matematisk institutt
Universitetet i Bergen

11. juni 2020

Takk!

Jeg vil rette en stor takk til noen personer. Denne oppgaven hadde ikke vært mulig uten noen som helst av disse.

En stor takk må rekkles til veilederen min, Gunnar Fløystad, for all hjelp, veiledning og råd, både ved forberedelser til og i løpet av hele mastertiden. I en heller annerledes verdenssituasjon er jeg takknemlig for fleksibiliteten og tilgjengeligheten han har vist.

Takk til Marianne Jensen for all hjelp til å få studiene til å gå rundt og for alltid å være en god støttespiller for oss på lektorutdanningen. Takk for den alltid åpne døren!

Takk til Veslemøy Mørkestøl for hjelp, støtte, råd og oppmuntrende ord, både i gode og mindre gode dager. En dag med deg er en dag med glede.

Jeg vil trekke frem og takke medstudentene mine for noen gode studieår. Spesielt vil jeg trekke frem Jon Asgeir for det aldri sviktende smilet, Roald for de gode og meningsfulle samtalene, Stian for roen i ellers stressende situasjoner, Martha for evnen til å se gleder i hverdagene og Kristin for alle fun facts.

Takk til Christian Lilleheim for støtte, oppmuntring, veiledning og hjelp til å finne plassen min i Bergen.

Sist, men ikke minst, tusen takk til min familie for støtte igjennom hele studietiden min.

Andreas Østhus

11. juni 2020

Innhold

Innledning	iv
1 Forkunnskaper	1
1.1 Hopf-algebra	1
1.2 Komposisjoner og partisjoner	3
1.3 Formell potensrekke	5
1.4 Young Diagram- og tablåer	6
2 Symmetriske funksjoner	8
2.1 Definisjoner	8
2.2 Produkt og koprodukt	11
3 Kvasisymmetriske funksjoner	12
3.1 Definisjoner	12
3.2 Produkt og koprodukt	14
4 Ikke-kommutative symmetriske funksjoner	17
4.1 Definisjoner	17
4.2 Produkt og koprodukt	20
5 Malvenuto-Reutenauer	22
5.1 Produkt og koprodukt	22
6 Loday-Ronco	24
6.1 Trær	24
6.2 Produkt og koprodukt	26
7 Hvordan det henger sammen	30
8 Oversettelser av Loday-Ronco	32
8.1 Definisjoner	32
8.2 Sammenheng mellom trær, AB-strenger og tallsekvenser	33
8.2.1 Trær og tallsekvenser	33
8.2.2 Trær og AB-strenger	34
8.3 Regler for produkt	38
8.3.1 Venstre- og høyreprodukt av AB	38

8.4	Regler for koprodukt	41
8.4.1	Koprodukt for tallsekvenser av formen $1111 \dots 1$	41
8.4.2	Koprodukt for tallsekvenser av formen $1234 \dots n$	42
8.4.3	Koprodukt for tallsekvenser av formen $1111 \dots n$	42
8.5	Ordning av trær	45

Innledning

Etter at mange allerede hadde studert konseptet om Hopf-algebraer fra 1940-årene fra algebraisk topologi og studien av algebraiske grupper ([4, Introduction]), ble det etterhvert interessant å underøke de symmetriske funksjonene og deres Hopf-algebrastruktur, Sym , noe Bender, Knuth, Stanley og MacMahon belte seg ut på ([9, Chapter 1.1]). Zelevinsky brukte de symmetriske funksjonene i hans undersøkelse av representasjonen av klassiske grupper, da Sym nesten kan sees på som prototypen av kombinatoriske Hopf-algebraer ([2, Chapter 1]).

De kvasisymmetriske funksjonenes Hopf-algebra ble videre utforsket av Thomas, Stanley og Gessel ([5, Chapter 1]), der Gessel også utarbeidet definisjonen av disse funksjonene i 1984 og dermed også Hopf-algebrastrukturen deres, $QSym$. Denne blir vist til å være dualen av Solomon descentalgebraen type A, noe som Malvenuto og Reutenauer viste i 1995. Topologien til $QSym$ har vist seg å være viktig for sannsynlighet via stokking av kort og tilfeldige stier. Etter mye undersøkelser rundt $QSym$ blir en ny basis oppdaget, nemlig basisen av de kvasisymmetriske Schur-funksjonene. Da Schur-funksjonene er en basis for Sym , ble de kvasisymmetriske Schur-funksjonene i $QSym$ en raffinering av Schur-funksjonene i Sym på en naturlig måte. Kvasisymmetriske funksjoner har også spilt en rolle på studiet av trær ([9, Chapter 1.1]).

Etterhvert blir Hopf-algebraen av de ikke-kommutative symmetriske funksjonene, $NSym$, undersøkt, og det viser seg at $NSym$ er isomorf med Solomon descentalgebraen type A og den frie Lie-algebraen med endelig antall generatorer ([9, Chapter 1.1]).

Loday og Ronco sitt arbeid om algebraen av binære trær, $YSym$, er fortsettelsen på studiene av disse kombinatoriske Hopf-algebraene, i tillegg til Connes, Kriemer, Brouder og Frabetti sine utvidelser av denne kombinatoriske Hopf-algebraen. Deres utvidelser og oppdagelser rundt dette var stort for fysikkens verden, da denne tilnærmingen gav en annen mening til kompliserte divergerende rekker, i motsetning til den klassiske måten å fremstille det på ved bruk av Feynmandiagrammer ([2, Chapter 1]).

Det er fortsatt mye man kan undersøke rundt disse kombinatoriske Hopf-algebraene, dette ser ut til å bare være starten av historien deres. Denne oppgaven forsøker å presentere noen av de kombinatoriske Hopf-algebraene og undersøke hvordan disse henger sammen, i tillegg til å særlig undersøke Loday-Ronco Hopf-algebraen av plane binære trær og oversettelser av denne til andre strukturer.

Kapittel 1

Forkunnskaper

1.1 Hopf-algebra

I hele dette delkapittelet vil k være en kommutativ ring med identitet. Hentet fritt fra [3, Chapter I.1 & III.1-III.3] og [9, Chapter 3.1].

Definisjon 1.1.1 (Algebra).

En *algebra* A er en k -modul med avbildinger for produkt $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ og enhet $\eta : k \rightarrow A$ slik at følgende diagrammer kommuterer, der id er identitetsavbildingen på A .

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes id} & A \otimes A \\ \downarrow id \otimes \mu & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} k \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes id} & A \otimes A \\ \downarrow & \swarrow \mu & \uparrow id \otimes \eta \\ A & \xleftarrow{\mu} & A \otimes k \end{array}$$

Da sier man at (A, μ, η) er en algebra.

Eksempel 1.1.2. Enhver kommutativ ring med identitet er en algebra. For eksempel, for \mathbb{Z} med vanlig multiplikasjon som produkt μ og en avbildning $\eta : k \rightarrow a \cdot 1$ vil diagrammene i Definisjon 1.1.1 kommutere.

Gitt to algebraer (A, μ, η) og (A', μ', η') og en avbildning $f : A \rightarrow A'$, sier man at f er en *algebromorfisme* om $f \circ \mu = \mu' \circ (f \otimes f)$ og $f \circ \eta = \eta'$.

Definisjon 1.1.3 (Koalgebra).

En *koalgebra* C er en k -modul med avbildinger for koprodukt $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ og koenhet $\epsilon : C \rightarrow k$ slik at følgende diagrammer kommuterer, der id er identitetsavbildingen på C .

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes id \\
 C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C \\
 \\
 C & \xrightarrow{\otimes 1} & C \otimes k \\
 \downarrow 1 \otimes & \searrow \Delta & \uparrow id \otimes \epsilon \\
 k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & C \otimes C
 \end{array}$$

Da sier man at (C, Δ, ϵ) er en koalgebra.

Eksempel 1.1.4. Enhver kropp har en naturlig koalgebrastruktur med $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ og $\epsilon(1) = 1$, som gjør at diagrammene i Definisjon 1.1.3 kommuterer.

På en lignende måte som man kunne definere algebramorfer av algebraer A og A' , kan man definere koalgebramorfer. Gitt to koalgebraer (C, Δ, ϵ) og (C', Δ', ϵ') , vil en avbilding $f : C \rightarrow C'$ være en *koalgebramorfe* om $\Delta' \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$ og $\epsilon = \epsilon' \circ f$.

Videre kan man si at om man har en algebra (B, μ, η) og en koalgebra (B, Δ, ϵ) , vil $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ være en *bialgebra* hvis en av følgende ekvivalente påstander er sanne:

- Δ og ϵ er algebramorfer, eller
- μ og η er koalgebramorfer.

Definisjon 1.1.5 (Hopf-algebra).

En *Hopf-algebra* er en bialgebra $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ utstyrt med en avbilding $S : H \rightarrow H$ med en avbilding $g \mapsto g^{-1}$, slik at $\mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = \mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta$. Da sier man at $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ er en Hopf-algebra.

Eksempel 1.1.6. Enhver gruppe kan bli utstyrt med en Hopf-algebrastruktur, da de inneholder et identitetsselement og alle elementer har en invers som vil tilfredstille kravene for antipode.

Om man har en gradert bialgebra $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, vil den alltid ha en antipode, og dermed være en Hopf-algebra.

For å kunne diskutere symmetriske funksjoner vil det være nyttig å først forklare noen begreper. Følgende delkapittel om komposisjoner og partisjoner er hentet fritt fra [9, Chapter 2.2].

1.2 Komposisjoner og partisjoner

Noen få ord og definisjoner innenfor dette er også nyttig. For et positivt heltall m sier man at $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. En *komposisjon* er en endelig ordnet liste med positive heltall, også kalt en *tupple*, for eksempel $\alpha = (3, 2, 4, 2, 1)$. Her vil α være en 5-tupple, fordi α har 5 elementer og vi sier den har *lengde* $l(\alpha) = 5$. En partisjon er en endelig uordnet liste med positive heltall der elementene blir sortert i svakt synkende rekkefølge fra venstre til høyre. Den *underliggende partisjonen* til eksempelet over med α vil være $\tilde{\alpha} = (4, 3, 2, 2, 1)$. *Vekten* til en komposisjon (eller partisjon) er summen av alle elementene i komposisjonen (eller partisjonen), og man skriver $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ hvis α har n elementer.

Eksempel 1.2.1. For samme $\alpha = (3, 2, 4, 2, 1)$ som før, har vi $|\alpha| = 3 + 2 + 4 + 2 + 1 = 12$.

Om man har en komposisjon β der $|\beta| = n$, skriver man $\beta \vDash n$ og sier at β er en komposisjon av n . Om man har en partisjon γ der $|\gamma| = m$, skriver man $\gamma \vdash n$ og sier at γ er en partisjon av m .

Eksempel 1.2.2. $\alpha = (3, 2, 4, 2, 1) \vDash 12$

Når man *konkaterer* to komposisjoner $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ og $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ får man at

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l).$$

Man kan også *nærkonkatener* to komposisjoner på følgende vis:

$$\alpha \odot \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k + \beta_1, \dots, \beta_l).$$

Eksempel 1.2.3. $\alpha = (3, 2, 4, 2, 1), \beta = (2, 3, 1)$

$$\alpha \cdot \beta = (3, 2, 4, 2, 1, 2, 3, 1)$$

$$\alpha \odot \beta = (3, 2, 4, 2, 3, 3, 1).$$

Det finnes en naturlig 1-1 korrespondanse mellom komposisjoner $\alpha \vDash n$ og delmengder $\subseteq [n-1]$. De følgende to definisjonene viser dette. For en komposisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \vDash n$ definerer man følgende:

$$\text{set}(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}\} \subseteq [n-1].$$

Tilsvarende, om man har en mengde $A = \{a_1, \dots, a_l\} \subseteq [n-1]$ der elementene er ordnet i svakt stigende rekkefølge fra venstre til høyre, definerer man følgende:

$$\text{comp}(A) = (a_1, a_2 - a_1, \dots, a_l - a_{l-1}, n - a_l) \vDash n.$$

Eksempel 1.2.4. For $\alpha = (3, 2, 4, 2, 1) \vDash 12$ vil

$$\text{set}(\alpha) = \{3, 3+2, 3+2+4, 3+2+4+2\} = \{3, 5, 9, 11\} \subseteq [12-1] = [11].$$

Tilsvarende for $A = \{3, 5, 9, 11\}$ vil:

$$\text{comp}(A) = (3, 3-5, 9-5, 11-9, 12-11) = (3, 2, 4, 2, 1) \vDash 12.$$

Videre er det også en 1-1 korrespondanse mellom komposisjoner $\alpha \vDash n$ og tupler med elementer i delmengden $\{+1, -1\}$ av lengde $n-1$ gitt ved følgende algoritmer:

Algoritme 1.2.5.

- For $\alpha = (n)$, vil α svare til $(n-1)$ -tuppelen $(-1, -1, \dots, -1)$.
- For $\alpha = (1, 1, \dots, 1) \vDash n$, vil α svare til $(n-1)$ -tuppelen $(+1, +1, \dots, +1)$.
- For $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \vDash n$ vil α svare til konkatineringen av følgende tuppler: $(-1, -1, \dots, -1, +1)$ med lengde $= \alpha_1$, $(-1, -1, \dots, -1, +1)$ med lengde $= \alpha_2, \dots, l(-1, -1, \dots, -1)$ med lengde $= \alpha_k - 1$

Eksempel 1.2.6 (Eksempler fra $\alpha \vDash 1$ og $\alpha \vDash 2$).

$n = 1$: (1) svarer til $()$.

$n = 2$: (2) svarer til (-1) , $(1, 1)$ svarer til $(+1)$.

Eksempel 1.2.7 (Eksempler fra $\alpha \vDash 6$).

- $\alpha = (6)$ svarer til $(-1, -1, -1, -1, -1)$.
- $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ svarer til $(+1, +1, +1, +1, +1)$.
- $\alpha = (2, 1, 3)$ svarer til $(-1, +1, +1, -1, -1)$.

Dermed er det også en 1-1 korrespondanse mellom komposisjoner $\alpha \vDash n$, delmengder $\subseteq [n-1]$ og tupler av formen over med lengde $n-1$.

En *descent* i en k -tuppel α vil være en indeks $i \in [k-1]$ der $\alpha_i > \alpha_{i+1}$. *Descentmengden* av en k -tuppel α ($\text{Des}(\alpha)$) vil være mengden av alle descents i α .

Eksempel 1.2.8. $\alpha = (3, 2, 4, 2, 1)$, $\text{Des}(\alpha) = \{1, 3, 4\}$.

Om man har to komposisjoner α og β sier man at α er en *forgroving* av β (eller at β er en *forfining* av α) om man kan lage elementene av α i rekkefølge ved å summere elementer av β som ligger ved siden av hverandre. Om α er en forgroving av β skriver man $\alpha \succcurlyeq \beta$.

Følgende delkapittel om formelle potensrekker er hentet fritt fra [1].

1.3 Formell potensrekke

La \mathbb{N}^2 være mengden av alle par med positive heltall (a, b) der $a, b \in \mathbb{N}$. Man kan da lage en avbildning $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^3$ der $(a, b) \mapsto (a, b, 0)$. Dermed har vi at $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{N}^3$. Tilsvarende kan man si for andre potenser av \mathbb{N} , og vi får at $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{N}^3 \subseteq \dots$ og $\mathbb{N}^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{N}^n$.

La R være en ring. Hvis man tar et polynom p i n variable med koeffisienter i R vil det være av formen

$$p = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I x^I, a_I \in R, I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$$

Dette polynomet vil ha endelig antall ledd, og man sier at $p \in R[x_1, \dots, x_n]$.

La $I = (i_1, \dots, i_n, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$ og la koeffisientene til f være $a_i \in R$. Da vil f være en *formell potensrekke* $f \in R[[x_1, \dots, x_n, \dots]]$ slik at

$$f = \sum_{I \in \mathbb{N}^\infty} a_I x^I, a_I \in R, I = (i_1, \dots, i_n, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$$

Her kan f ha uendelig mange ledd $\neq 0$. Man sier at $f \in R[[x_1, x_2, \dots]]$. På denne måten kan man si at et polynom er et spesielt tilfelle av en formell potensrekke, da polynomet kun kan ha endelig mange ledd $\neq 0$, mens en formell potensrekke kan ha uendelig mange ledd $\neq 0$.

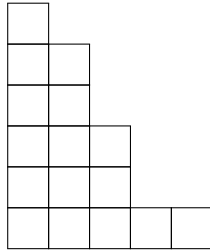
Man kan dele den formelle potensrekken opp i monomer; hvert ledd i den formelle potensrekken er et monom. Gitt et monom $x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$ sier vi at monomet har *grad* n hvis $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \vDash n$. Om alle monomene i en formell potensrekke f har samme maksimalt grad m , sier man at f har grad m .

Følgende delkapittel om Young diagram- og tablåer er tatt fritt fra [9, Chapter 2.3-2.4].

1.4 Young Diagram- og tablåer

Et *Young diagram* er en måte å illustrere en partisjon som et rutenett. For en partisjon $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, der k er antall elementer av partisjonen, vil n være antall celler i Young diagrammet dets på en slik måte at det er λ_i celler i rad nummer i , indeksert fra nederst til øverst.

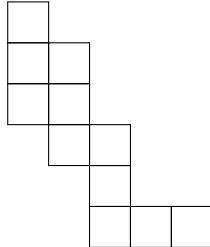
Eksempel 1.4.1. $\lambda = (5, 3, 3, 2, 2, 1)$,



Her kaller man også diagrammet for λ , eller at diagrammet har *form* λ . Et Young diagram kan også være *skjevt*. Det vil i praksis si at diagrammet mangler noen ruter.

Hvis λ er et Young-diagram og man fjerner rutene som tilsvarer Young-diagrammet μ vil man få et diagram med formen λ/μ .

Eksempel 1.4.2. $\mu = (2, 2, 1)$, λ , $\lambda/\mu = (5, 3, 3, 2, 2, 1)/(2, 2, 1)$

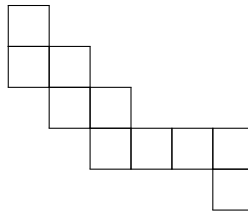


Et Young diagram er et *bånd* om den ikke inneholder Young diagrammet $\lambda = (2, 2)$ på noe sted, det vil si Young diagrammet



finnes ikke blant båndet. Bånd blir ofte indeksert ved en komposisjon og i motsatt rekkefølge enn andre Young-diagram, altså fra øverst til nederst. Hver indeks sier hvor mange ruter det er på den raden.

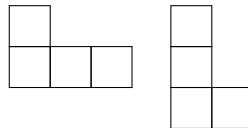
Eksempel 1.4.3. $\lambda/\mu = (6, 6, 3, 2, 1)/(5, 2, 1)$



$$\alpha = (1, 2, 2, 4, 1)$$

For et Young diagram λ kan man finne *transponeringen* λ^t ved $\lambda^t = \{(j, i) | (i, j) \in \lambda\}$. Det samme gjelder for bånd komposisjonene deres.

Eksempel 1.4.4.



$$\alpha = (1, 3) \quad \alpha^t = (1, 1, 2)$$

Man kan også fylle inn positive heltall i et Young diagram, da kaller man det for et Young tablå. Man sier at et Young tablå λ/μ er et *semistandard Young tablå (SSYT)* om tallene det inneholder følger to regler: Tallene øker svakt fra venstre til høyre, og tallene øker strengt fra nederst til øverst. Tablået vil være *standard* istedet for semistandard om hvert tall blir brukt kun en gang i tablået. Nedenfor vises først et SSYT og deretter et standard Young tablå (SYT).

Eksempel 1.4.5 (SSYT).

6		
4	4	
2	3	3
1	2	2

Eksempel 1.4.6 (SYT).

5		
3	4	
1	2	

Kapittel 2

Symmetriske funksjoner

Følgende kapittel er hentet fritt fra [9, Chapter 3.2] om symmetriske funksjoner.

2.1 Definisjoner

Hvis vi lar $R = \mathbb{Q}$ i definisjonen av formelle potensrekker, vil $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ være en Hopf-algebra av formelle potensrekker med uendelig antall variabler over \mathbb{Q} , det vil si med uendelig antall variabler med koeffisienter i \mathbb{Q} . Ethvert element i $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ vil da være en formell potensrekke som tilfredsstiller kravene til at $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ er en Hopf-algebra.

For et positivt heltall n og en mengde $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, vil en permutasjon av $[n]$ være en bijeksjon $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ som sender et element fra $[n]$ til et element av $[n]$. Vi kaller mengden av alle permutasjoner σ av n elementer for \mathfrak{S}_n . Hvis \mathfrak{S}_{n+1} blir definert slik at \mathfrak{S}_{n+1} sender $n+1$ til $n+1$ og har samme permutasjoner som \mathfrak{S}_n for resten av n , vil vi ha $\mathfrak{S}_n \subseteq \mathfrak{S}_{n+1}$. Vi definerer $\cup_{n \geq 0} \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_\infty$, der \mathfrak{S}_∞ kalles den *symmetriske gruppen*.

Definisjon 2.1.1 (Symmetrisk funksjon).

En *symmetrisk funksjon* er en formell potensrekke $f \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ slik at f er av endelig grad og f er uforandret av følgende operasjon:

For enhver $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ og $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ vil

$$\sigma \cdot (x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}) = x_{\sigma(i_1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\sigma(i_k)}^{\alpha_k}$$

Med andre ord vil det si at $\sigma \cdot f = f$ når σ er utvidet på den naturlige måten.

Eksempel 2.1.2. Hvis man har $f = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$ og $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, har man at

$$\sigma \cdot f = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = f.$$

Mengden av alle symmetriske funksjoner er en Hopf-algebra og har noen spesielle type funksjoner som basis ved hjelp av produkt og koprodukt beskrevet senere. En av basisene er den *monomiale symmetriske funksjonen* m_λ er definert som $m_\lambda = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_k}^{\lambda_k}$, der $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ er en partisjon

og summen går over alle k -tuppler $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ slik at det blir distinkte monomer. Vi definerer $m_\emptyset = 1$.

Eksempel 2.1.3 (Monomial funksjon).

$$m_{(3,1)} = x_1^3 x_2^1 + x_2^3 x_1^1 + x_1^3 x_3^1 + x_3^3 x_1^1 + x_1^3 x_4^1 + x_2^3 x_3^1 + \dots$$

For å kunne forklare en annen type funksjon som utspenner Hopf-algebraen av symmetriske funksjoner, må man først forklare de n -te *elementære symmetriske funksjonene*, e_n , definert som (for n positivt heltall)

$$e_n = m_{(1^n)} = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

der $m_{(1^n)} = m_{(1,1,\dots,1)}$ der partisjonen inneholder n antall 1.

Eksempel 2.1.4 (Elementær symmetrisk funksjon).

$$e_3 = m_{(1^3)} = m_{(1,1,1)} = x_1^1 x_2^1 x_3^1 + x_1^1 x_2^1 x_4^1 + x_1^1 x_3^1 x_4^1 + \dots$$

Man må også forklare h_n , den n -te *fullstendige homogene symmetriske funksjonen*, som er definert som

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

Eksempel 2.1.5 (Fullstendig homogen symmetrisk funksjon).

$$h_3 = m_{(3)} + m_{(2,1)} + m_{(1,1,1)} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_1^2 x_2^1 + x_1^2 x_3^1 + \dots$$

Både den n -te elementære symmetriske funksjonen og den fullstendige homogene symmetriske funksjonen kan utvides til partisjoner. For en partisjon $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sier man at den *elementære symmetriske funksjonen* e_λ er

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_k} = \prod_{\lambda_i} e_{\lambda_i}$$

og man sier at den *fullstendige homogene symmetriske funksjonen* h_λ er

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k} = \prod_{\lambda_i} h_{\lambda_i}$$

Man sier at e_λ og h_λ utspenner Hopf-algebraen av symmetriske funksjoner, beskrevet litt senere.

For en partisjon λ vil *Schur funksjonen* s_λ være

$$s_\lambda = \sum_T x^T$$

der T er alle semi-standard Young tablåer (SSYT) med formen λ . Man kan også ha Schur funksjoner av skjeve tablåer; for en skjev form λ/μ vil Schur funksjonen $s_{\lambda/\mu}$ være

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_T x^T$$

der T er alle semi-standard Young tablåer (SSYT) med formen λ/μ . Schur funksjonen vil også være en basis av Hopf-algebraen av symmetriske funksjoner.

Eksempel 2.1.6 (Schur funksjon).

$s_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + 2x_1 x_2 x_3$ fra SSYT-ene

2	3	2	3	3	3	3	2
1	1	1	2	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3	3

Videre kan man se på *bånd-Schur funksjonen* r_α , definert som

$$r_\alpha = \sum_{\beta \geq \alpha} (-1)^{l(\alpha) - l(\beta)} h_{\tilde{\beta}}$$

der α er komposisjonen til båndet. Bånd-Schur funksjonen er enda en basis av Hopf-algebraen av symmetriske funksjoner.

Eksempel 2.1.7 (Bånd-Schur funksjon).

Hvis vi har $\alpha = (2, 1, 1)$, har vi $(2, 1, 1) \leq \{(2, 1, 1), (3, 1), (2, 2), (4)\}$,

$l((2, 1, 1)) = 3$, $l((3, 1)) = 2$, $l((2, 2)) = 2$ og $l((4)) = 1$. Da får vi at

$$r_{(2,1,1)} = \sum_{\beta \geq (2,1,1)} (-1)^{3-l(\beta)} h_{\tilde{\beta}} = h_{(2,1,1)} - h_{(3,1)} - h_{(2,2)} + h_{(4)}$$

Fordi de fem forskjellige funksjonene er basiser av Hopf-algebraen av symmetriske funksjoner, kan man definere Sym^n som Hopf-algebraen av symmetriske funksjoner slik at

$$\begin{aligned} Sym^n &= span\{m_\lambda | \lambda \vdash n\} = span\{e_\lambda | \lambda \vdash n\} = span\{h_\lambda | \lambda \vdash n\} \\ &= span\{s_\lambda | \lambda \vdash n\} = span\{r_\lambda | \lambda \vdash n\} \end{aligned}$$

og vi får at mengden av alle symmetriske funksjoner Sym blir en direkte sum

$$Sym = \bigoplus_{n \geq 0} Sym^n$$

2.2 Produkt og koprodukt

Vi skal nå diskutere produkt og koprodukt ved hjelp av tre av basisene nevnt ovenfor. Det finnes ikke et enkelt uttrykk for produktet av monomiale funksjoner m_λ . For h_λ og e_λ vil produktet være enkelt, vist med et kort eksempel.

Eksempel 2.2.1. $h_{(3,2,2,1)}h_{(2,1,1)} = h_{(3,2,2,2,1,1,1)}$.

Tilsvarende for e_λ .

For produktet $r_\alpha r_\beta$ får man

$$r_\alpha r_\beta = r_{\alpha \cdot \beta} + r_{\alpha \circ \beta}$$

Eksempel 2.2.2. For $\alpha = (1, 3, 1, 1, 2), \beta = (3, 1, 1)$ vil

$$r_{(1,3,1,1,2)}r_{(3,1,1)} = r_{(1,3,1,1,2,3,1,1)} + r_{(1,3,1,1,5,1,1)}.$$

Koproduktet kan også bli beskrevet for noen av basisene til Sym ved følgende formler:

$$\Delta(m_\lambda) = \sum_{\lambda = \mu \bar{\nu}} m_\mu \otimes m_\nu$$

$$\Delta(e_n) = \sum_{i=0}^n e_i \otimes e_{n-i}$$

$$\Delta(h_n) = \sum_{i=0}^n h_i \otimes h_{n-i}$$

Her følger noen eksempler for å vise hvordan koproduktet blir regnet ut for hver av disse basisene.

Eksempel 2.2.3.

$$\Delta(m_{(2,2,1)}) = m_{(2,2,1)} \otimes 1 + m_{(2,1)} \otimes m_{(2)} + m_{(2,2)} \otimes m_{(1)} + m_{(2)} \otimes m_{(2,1)} + m_{(1)} \otimes m_{(2,2)} + 1 \otimes m_{(2,2,1)}$$

$$\Delta(e_3) = 1 \otimes e_3 + e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes 1$$

$$\Delta(h_3) = 1 \otimes h_3 + h_1 \otimes h_2 + h_2 \otimes h_1 + h_3 \otimes 1$$

For at Sym skal være en Hopf-algebra, må man også definere en koenhet og antipode.

Koenheten er gitt ved

$$\epsilon(m_\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \lambda = \emptyset \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og antipoden er gitt ved

$$S(s_\lambda) = (-1)^n s_{\lambda^t}$$

Kapittel 3

Kvasisymmetriske funksjoner

Dette kapittelet om kvasisymmetriske funksjoner er hentet fritt fra [9, Chapter 3.3].

3.1 Definisjoner

Definisjonen på en *kvasisymmetrisk funksjon* kan ligne på definisjonen til en symmetrisk funksjon.

Definisjon 3.1.1 (Kvasisymmetrisk funksjon).

En *kvasisymmetrisk funksjon* er en formell potensrekke $f \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ slik at f er av endelig grad og f er uforandret av følgende operasjon:

For $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ og $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ vil

$$\sigma \cdot x_I^\alpha = x_{\sigma \cdot I}^\alpha$$

der $\sigma \cdot I$ er k -tuppelen man får når man arrangerer $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)$ i stigende rekkefølge. Med andre ord vil det si at $\sigma \cdot f = f$ når σ er utvidet på den naturlige måten.

En lignende versjon av følgende definisjon kan også brukes på symmetriske funksjoner.

Definisjon 3.1.2 (Kvasisymmetrisk funksjon).

En *kvasisymmetrisk funksjon* er en formell potensrekke $f \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \dots]]$ slik at f er av endelig grad og for enhver komposisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ vil monomene $x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k} \in f$ der indeksene er $i_1 < \dots < i_k$ ha samme koeffisienter.

Eksempel 3.1.3. Hvis man har $f = x_1^2 x_2^1 + x_1^2 x_3^1 + x_2^2 x_3^1$ og $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, har man at

$$\sigma \cdot f = x_1^2 x_2^1 + x_1^2 x_3^1 + x_2^2 x_3^1 = f.$$

Hopf-algebraen av kvasisymmetriske funksjoner har noen basiser som skal diskuteres her. Vi starter med de *monomiale kvasisymmetriske funksjonene*, M_α . For en komposisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, vil $M_\alpha = \sum x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$ hvis summen går over k -tuppelen (i_1, \dots, i_k) og $i_1 < \dots < i_k$. Vi definerer $M_\emptyset = 1$.

Eksempel 3.1.4 (Monomial kvasisymmetrisk funksjon).

$$M_{(3,1)} = x_1^3 x_2^1 + x_1^3 x_3^1 + x_1^3 x_4^1 + \dots$$

Mengden av alle kvasisymmetriske funksjoner kaller vi $QSym$, og fordi M_α er en basis av de kvasisymmetriske funksjoner, har vi at de kvasisymmetriske funksjoner av grad n er

$$QSym^n = \text{span}\{M_\alpha | \alpha \vDash n\}.$$

Dermed får vi at

$$QSym = \bigoplus_{n \geq 0} QSym^n$$

Vi har også at *den fundamentale kvasisymmetriske funksjonen* F_α er definert som

$$F_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} M_\beta$$

Eksempel 3.1.5 (Fundamental kvasisymmetrisk funksjon).

$$F_{(2,1)} = M_{(2,1)} + M_{(1,1,1)} \text{ der}$$

$$M_{(2,1)} = x_1^2 x_2^1 + x_1^2 x_3^1 + x_1^2 x_4^1 + x_2^2 x_3^1 + \dots \text{ og}$$

$$M_{(1,1,1)} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \dots \text{ slik at}$$

$$F_{(2,1)} = x_1^2 x_2^1 + x_1^2 x_3^1 + x_1^2 x_4^1 + x_2^2 x_3^1 + \dots$$

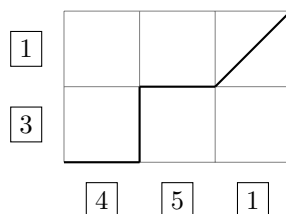
$$+ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \dots$$

3.2 Produkt og koprodukt

Som med symmetriske funksjoner er det bedre å se på disse basisene som spenner ut Hopf-algebraen av kvasisymmetriske funksjoner for å kunne se hvordan produktet og koproduktet oppfører seg. For å illustrere produktet av monomiale kvasisymmetriske funksjoner vil jeg bruke et eksempel, tatt fra [9, Chapter 3.3.1]. For komposisjoner $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ og $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ kan man forestille seg alle stier P i (x, y) -planet fra $(0, 0)$ til (k, l) ved hjelp av stegene $(1, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$. Hvis P_i er koordinatene etter i steg av en sti P (der $P_0 = (0, 0)$), kan man definere den korresponderende komposisjonen γ_P til stien P med m steg som $\gamma_P = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ der

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_q & \text{hvis steg nummer } i = (1, 0) \text{ og } P_{i-1} = (q-1, r-1), \\ \beta_r & \text{hvis steg nummer } i = (0, 1) \text{ og } P_{i-1} = (q-1, r-1), \\ \alpha_q + \beta_r & \text{hvis steg nummer } i = (1, 1) \text{ og } P_{i-1} = (q-1, r-1). \end{cases}$$

Eksempel 3.2.1 (Produkt av M_α og M_β).



Et rektangel har $\alpha = (4, 5, 1)$, $\beta = (3, 1)$ og stien P fra $(0, 0)$ til $(3, 2)$ som vist i figuren ovenfor. Her vil $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (2, 1)$, $P_4 = (3, 2)$ og $\gamma_P = (4, 3, 5, 2)$.

For de monomiale kvasisymmetriske funksjonene vil formelen for produkt være

$$M_\alpha M_\beta = \sum_P M_{\gamma_P}$$

der P er stiene beskrevet i forrige avsnitt i (x, y) -planet fra $(0, 0)$ til $(l(\alpha), l(\beta))$ ved hjelp av stegene $(1, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$.

Hvis man har to ord $\mathbf{a} = a_1 a_2 \dots a_n$ og $\mathbf{b} = b_1 b_2 \dots b_m$ vil en *shuffle* (eller en stokking) av \mathbf{a} og \mathbf{b} være et nytt ord \mathbf{c} med $n + m$ bokstaver som inneholder alle bokstavene a_i og b_j . Bokstavene i \mathbf{c} er ordnet slik at a_i -ene er i sin opprinnelige rekkefølge og b_j -ene er i sin opprinnelige rekkefølge. Mengden av alle shufflene av \mathbf{c} blir ofte denotert $\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b}$.

Eksempel 3.2.2.

For ordene $\mathbf{a} = atu$ og $\mathbf{b} = ms$ har vi at

$$\mathbf{a} \sqcup \mathbf{b} = \{atums, atmus, amtus, matus, atmsu, matsu, amstu, mastu, msatu\}$$

Dette kan også overføres til permutasjoner. Fra kapitlet om symmetriske funksjoner har vi at vi kan skrive en permutasjon av $[n]$ som en n -tupel $\sigma = \sigma(1)\cdots\sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$. For to permutasjoner $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ og $\tau \in \mathfrak{S}_m$, sier man at en *shufffle* (eller en stokking) av σ og τ er en permutasjon $\pi \in \mathfrak{S}_{n+m}$. For at permutasjonen skal være i \mathfrak{S}_{n+m} definerer man elementene $\tau(j) = \tau(j+n)$. Elementene i π er ordnet slik at $\sigma(i)$ -ene er i sin opprinnelige rekkefølge og $\tau(j)$ -ene er i sin opprinnelige rekkefølge. Mengden av alle shuffles av σ og τ kaller vi $\sigma \sqcup \tau$.

Eksempel 3.2.3. $12 \sqcup 21 = \{1243, 1423, 1432, 4123, 4132, 4312\}$

Hvis vi lar $\alpha \vDash n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ slik at $Des(\sigma) = set(\alpha)$, og $\beta \vDash m$, $\tau \in \mathfrak{S}_m$ slik at $Des(\tau) = set(\beta)$. Da har vi at

$$F_\alpha F_\beta = \sum_{\pi \in \sigma \sqcup \tau} F_{comp(Des(\pi))}$$

For å forklare bedre hvordan dette fungerer i praksis, brukes eksempelet nedenfor.

Eksempel 3.2.4 (Produkt, fundamental kvasisymmetrisk funksjon).

$$F_{(1,3)}F_{(1)} = F_{(1,4)} + F_{(1,3,1)} + F_{(1,2,2)} + F_{(2,3)} + F_{(1,1,3)}$$

Her har vi at $\alpha = (1, 3) \vDash 4$ og $\beta = (1) \vDash 1$, derfor må vi finne $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ slik at $Des(\sigma) = set((1, 3))$ og $\tau \in \mathfrak{S}_1$ slik at $Des(\tau) = set((1))$.

$set((1, 3)) = \{1\}$, så vi må ha en $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ der $Des(\sigma) = \{1\}$, så la $\sigma = 2134$. $set((1)) = \emptyset$, så vi må ha en $\tau \in \mathfrak{S}_1$ der $Des(\tau) = \emptyset$, så la $\tau = 1$.

$\sigma \sqcup \tau = 2134 \sqcup 1 = \{21345, 21354, 21534, 25134, 52134\}$.

For hver $\pi \in 2134 \sqcup 1$ vil dens respektive descent være $\{\{1\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, og deretter følger deres komposisjoner $\{(1, 4), (1, 3, 1), (1, 2, 2), (2, 3), (1, 1, 3)\}$. Disse komposisjonene blir indeksene som brukes på leddene i summen.

Koproduktene vil bli generert ved formelene nedenfor:

$$\Delta(M_\alpha) = \sum_{\alpha=\beta\cdot\gamma} M_\beta \otimes M_\gamma$$

$$\Delta(F_\alpha) = \sum_{\alpha=\beta\cdot\gamma \text{ eller } \alpha=\beta\oplus\gamma} F_\beta \otimes F_\gamma$$

Eksempel 3.2.5 (Koprodukt, monomial kvasisymmetrisk funksjon).

$$\Delta(M_{(2,1,3)}) = 1 \otimes M_{(2,1,3)} + M_{(2)} \otimes M_{(1,3)} + M_{(2,1)} \otimes M_{(3)} + M_{(2,1,3)} \otimes 1$$

Eksempel 3.2.6 (Koprodukt, fundamental kvasisymmetrisk funksjon).

$$\Delta(F_{(2,2)}) = 1 \otimes F_{(2,2)} + F_{(2)} \otimes F_{(2)} + F_{(2,2)} \otimes 1$$

$$+ F_{(1)} \otimes F_{(1,2)} + F_{(2,1)} \otimes F_{(1)} + F_{(1,1)} \otimes F_{(1,1)}$$

Fordi $(2, 2) \preceq \{(2, 2), (1, 1, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$

Her er konkatineringsene i første linje og nærkonkatineringsene i andre linje.

Videre definerer man koenhet og antipode som følger:

Koenheten er gitt ved

$$\epsilon(M_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \alpha = \emptyset \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og antipoden gitt ved

$$S(F_\alpha) = (-1)^n F_{\alpha^t}$$

Kapittel 4

Ikke-kommutative symmetriske funksjoner

Dette kapittelet om ikke-kommutative symmetriske funksjoner er tatt fritt fra [9, Chapter 3.4].

4.1 Definisjoner

For å kunne forklare Hopf-algebraen av ikke-kommutative symmetriske funksjoner, må man først forklare noen av dets basiser.

Definisjon 4.1.1 (Elementær ikke-kommutativ symmetrisk funksjon).

Den n -te elementære ikke-kommutative symmetriske funksjonen, e_n , er den ubestemte e_n .

Vi definerer $e_0 = 1$.

For en komposisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ vil den elementære ikke-kommutative symmetriske funksjonen e_α være definert som produktet

$$e_\alpha = e_{\alpha_1} \cdots e_{\alpha_k}.$$

Definisjon 4.1.2 (Fullstendig homogen ikke-kommutativ funksjon).

Ved hjelp av e_n kan man definere den n -te fullstendige homogene ikke-kommutative funksjonen h_n som summen

$$h_n = \sum_{(y_1, y_2, \dots, y_m) \models n} (-1)^{n-m} e_{y_1} e_{y_2} \cdots e_{y_m},$$

der $h_0 = 1$.

For en komposisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ vil den fullstendige homogene ikke-kommutative symmetriske funksjonen h_α være definert som produktet

$$h_\alpha = h_{\alpha_1} \cdots h_{\alpha_k} = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha| - l(\beta)} e_\beta.$$

Eksempel 4.1.3.

La $\alpha = (2, 1)$. Da har vi at de mulige forfiningene av α er $\{(2, 1), (1, 1, 1)\}$. Videre har vi at $|\alpha| = 2 + 1 = 3$ og $l((2, 1)) = 2$ og $l((1, 1, 1)) = 3$, slik at

$$\mathbf{h}_{(2,1)} = \sum_{\beta \preccurlyeq (2,1)} (-1)^{3-l(\beta)} \mathbf{e}_\beta = -\mathbf{e}_{(2,1)} + \mathbf{e}_{(1,1,1)}$$

For å verifisere dette kan man se på definisjonen av \mathbf{h}_α , \mathbf{h}_n og \mathbf{e}_α .

$$\mathbf{h}_{(2,1)} = \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1$$

$$\mathbf{h}_2 = \sum_{(y_1, y_2, \dots, y_m) \models 2} (-1)^{2-m} \mathbf{e}_{y_1} \mathbf{e}_{y_2} \cdots \mathbf{e}_{y_m} = (-1)^{2-1} \mathbf{e}_2 + (-1)^{2-2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{h}_1 = \sum_{(y_1, y_2, \dots, y_m) \models 1} (-1)^{1-m} \mathbf{e}_{y_1} \mathbf{e}_{y_2} \cdots \mathbf{e}_{y_m} = (-1)^{1-1} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 = (-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_{(2,1)} + \mathbf{e}_{(1,1,1)}$$

som verifiserer formelen for den fullstendige homogene ikke-kommutative symmetriske funksjonen.

Definisjon 4.1.4 (Ikke-kommutativ bånd-Schur funksjon).

For en komposisjon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ vil den *ikke-kommutative bånd-Schur funksjonen* \mathbf{r}_α være definert som

$$\mathbf{r}_\alpha = \sum_{\beta \succcurlyeq \alpha} (-1)^{l(\alpha)-l(\beta)} \mathbf{h}_\beta.$$

Eksempel 4.1.5.

La $\alpha = (1, 2, 1)$. Da vil de mulige forgrovingene av α være $\{(1, 2, 1), (3, 1), (1, 3), (4)\}$. Videre har vi at $l(\alpha) = 3$, $l((3, 1)) = 2$, $l((1, 3)) = 2$ og $l((4)) = 1$, slik at

$$\mathbf{r}_{(1,2,1)} = \sum_{\beta \succcurlyeq (1,2,1)} (-1)^{3-l(\beta)} \mathbf{h}_\beta = \mathbf{h}_{(1,2,1)} - \mathbf{h}_{(3,1)} - \mathbf{h}_{(1,3)} + \mathbf{h}_{(4)}$$

Mengden av ikke-kommutative symmetriske funksjoner, kalt $NSym$, har disse tre funksjonene beskrevet ovenfor som basis. Dermed får vi at de ikke-kommutative funksjonene av grad n kalt $NSym^n$ blir utspent av basisene

$$NSym^n = \text{span}\{\mathbf{e}_\alpha | \alpha \models n\} = \text{span}\{\mathbf{h}_\alpha | \alpha \models n\} = \text{span}\{\mathbf{r}_\alpha | \alpha \models n\}$$

og vi sier at $NSym$ er den direkte summen

$$NSym = \bigoplus_{n \geq 0} NSym^n$$

der $NSym$ er Hopf-algebraen av ikke-kommutative symmetriske funksjoner.

Videre forteller [9, Chapter 3.4.2] om arbeidet til Gessel, Malvenuto og Reutenauer som sier at $NSym$ er den graderte dualen av $QSym$, der basisene av $QSym$ blir koblet sammen med dens duale i $NSym$ slik at følgende tilfredstilles:

$$\langle M_\alpha, \mathbf{h}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

og

$$\langle F_\alpha, \mathbf{r}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

der $\delta_{\alpha\beta}$ er *Kronecker deltaen* som gir $\delta_{\alpha\beta} = 1$ for $\alpha = \beta$ og $\delta_{\alpha\beta} = 0$ for $\alpha \neq \beta$.

4.2 Produkt og koprodukt

Produktene for de tre nevnte basisene kan ligne på produktet til noen av basisene i Sym . For to komposisjoner α og β , har vi

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{h}_\alpha \mathbf{h}_\beta = \mathbf{h}_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_{\alpha\beta} + \mathbf{r}_{\alpha\odot\beta}$$

Eksempel 4.2.1 (Eksempel på produkter).

$$\mathbf{e}_{(1,3,1,1,2)} \mathbf{e}_{(3,1,1)} = \mathbf{e}_{(1,3,1,1,2,3,1,1)}$$

$$\mathbf{r}_{(1,3,1,1,2)} \mathbf{r}_{(3,1,1)} = \mathbf{r}_{(1,3,1,1,2,3,1,1)} + \mathbf{r}_{(1,3,1,1,5,1,1)}$$

Koproduktet går lett an å forklare for \mathbf{e}_n og \mathbf{h}_n som

$$\Delta(\mathbf{e}_n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{n-i}, \quad \Delta(\mathbf{h}_n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{h}_i \otimes \mathbf{h}_{n-i}$$

Eksempel 4.2.2 (Eksempel på koprodukt).

$$\Delta(\mathbf{e}_4) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{4-i} = \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 \otimes \mathbf{e}_0$$

Eksempel 4.2.3 (Eksempel på koprodukt).

$$\Delta(\mathbf{e}_{(1,1)}) = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^1 \mathbf{e}_{(i,j)} \otimes \mathbf{e}_{(1-i,1-j)} = \mathbf{e}_{(0,0)} \otimes \mathbf{e}_{(1,1)} + \mathbf{e}_{(0,1)} \otimes \mathbf{e}_{(1,0)} + \mathbf{e}_{(1,0)} \otimes \mathbf{e}_{(0,1)} + \mathbf{e}_{(1,1)} \otimes \mathbf{e}_{(0,0)}$$

Slik at det skal bli en Hopf-algebra, må man også ha koenhet og antipode.

Koenheten er gitt ved

$$\epsilon(\mathbf{e}_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \alpha = \emptyset \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og antipoden gitt ved

$$S(\mathbf{h}_n) = (-1)^n \mathbf{e}_n$$

Om man sammenligner \mathbf{r}_α der $\alpha \vDash n$ med tupler av formen $\{+1, -1\}^{n-1}$, kan man se en korrespondanse mellom dem på en lignende måte som man kunne se korrespondanse mellom komposisjoner $\alpha \vDash n$ og $\{+1, -1\}^{n-1}$, som vist nedenfor.

Algoritme 4.2.4.

- For $\alpha = (n)$, vil \mathbf{r}_α svare til $(n-1)$ -tuppelen $(-1, -1, \dots, -1)$.
- For $\alpha = (1, 1, \dots, 1) \vDash n$, vil \mathbf{r}_α svare til $(n-1)$ -tuppelen $(+1, +1, \dots, +1)$.
- For $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \vDash n$ vil \mathbf{r}_α svare til konkatineringen av følgende tuppler: $(-1, -1, \dots, -1, +1)$ med lengde = α_1 , $(-1, -1, \dots, -1, +1)$ med lengde = α_2 , \dots , $(-1, -1, \dots, -1)$ med lengde = $\alpha_k - 1$

Eksempel 4.2.5 (Eksempler fra $\alpha \vDash 1$ og $\alpha \vDash 2$).

$n = 1$: $\mathbf{r}_{(1)}$ svarer til $()$.

$n = 2$: $\mathbf{r}_{(2)}$ svarer til (-1) , $\mathbf{r}_{(1,1)}$ svarer til $(+1)$.

Eksempel 4.2.6 (Eksempler fra $\alpha \vDash 6$).

- $\alpha = (6)$ svarer til $\mathbf{r}_{(-1,-1,-1,-1,-1)}$.
- $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ svarer til $\mathbf{r}_{(+1,+1,+1,+1,+1)}$.
- $\alpha = (2, 1, 3)$ svarer til $\mathbf{r}_{(-1,+1,+1,-1,-1)}$.

Videre blir et produkt på slike tupler definert i [7, Chapter 4.6] som $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) * (\delta_1, \dots, \delta_{m-1}) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, +1, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}) + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, -1, \delta_1, \dots, \delta_{m-1})$. Man kan sammenligne dette med produktet av den ikke-kommutative bånd-Schur funksjonen $\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta = \mathbf{r}_{\alpha \circ \beta} + \mathbf{r}_{\alpha \otimes \beta}$, og se at produktene også vil samsvare, slik som eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 4.2.7.

$\mathbf{r}_{(1)}\mathbf{r}_{(3)} = \mathbf{r}_{(1,3)} + \mathbf{r}_{(4)}$ svarer til $(+1, -1, -1) + (-1, -1, -1)$, noe som også stemmer for produktet av tuplene de tilsvare.

$\mathbf{r}_{(2,3)}\mathbf{r}_{(4)} = \mathbf{r}_{(2,3,4)} + \mathbf{r}_{(2,7)}$ svarer til $(-1, +1, -1, -1, +1, -1, -1, -1) + (-1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$, noe som også stemmer for produktet av tuplene de tilsvare.

Om man kaller vektorrommet av slike tupler av grad n for $ESym^n$, kan man si at

$$ESym = \bigoplus_{n \geq 0} ESym^n$$

og dermed ser man at det er en naturlig isomorfi mellom $ESym$ og $NSym$.

Kapittel 5

Malvenuto-Reutenauer

Følgende kapittel er tatt fritt etter [4, Chapter 8.1] og [5, Chapter 3] om Malvenuto-Reutenauer Hopf-algebraen av permutasjoner $FQSym$ (på engelsk *free quasisymmetric functions*, derfor FQ), men i denne oppgaven blir det kalt $SSym$, da permutasjoner er viktige for å definere basisen, og mengden av permutasjoner av n objekter ofte er kalt \mathfrak{S}_n .

For en permutasjon α kan man assosiere det med et *ord*, der ordet det blir assosiert med er laget av elementene i α ; α er assosiert med ordet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Definisjon 5.0.1. Basisen til $SSym$ vil være F_w indeksert av ordet (w_1, \dots, w_n) , der permutasjonen w er assosiert med ordet (w_1, \dots, w_n) .

5.1 Produkt og koprodukt

Proposisjon 5.1.1 (Produkt).

Gitt to permutasjoner $u \in \mathfrak{S}_k$ og $v \in \mathfrak{S}_l$ har man at produktet av F_u og F_v er

$$F_u F_v = \sum_{w \in u \sqcup v[k]} F_w$$

der permutasjonene er sett på som ord og for $v = (v_1, \dots, v_l)$ har vi at $v[k] = (k+v_1, \dots, k+v_l)$.

Eksempel 5.1.2 (Eksempel på produkt).

La $u = 21$ og $v = 312$, slik at $v[k] = 534$. Videre betyr dette at

$$u \sqcup v[k] = \{21534, 25134, 25314, 25341, 52134, 52314, 52341, 53214, 53241, 53421\}$$

og dermed

$$F_{21} F_{312} = \sum_{w \in 21 \sqcup 534} F_w = F_{21534} + F_{25134} + \dots + F_{53421}$$

For å forklare koproduktet er det nyttig å først forklare et nytt begrep, standardisering.

Algoritme 5.1.3 (Standardisering).

For et ord $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$ vil *standardiseringen* av \mathbf{i} være $std(\mathbf{i})$ som er en permutasjon som følger følgende regelsett:

Start med den minste bokstaven i \mathbf{i} og bytt ut alle tilfeller av bokstaven med tallene $1, 2, \dots, m_1$. m_1 vil da være antall ganger den minste bokstaven inntreffer i ordet. Deretter fortsett med den nestminste bokstaven i \mathbf{i} og bytt ut alle tilfeller av bokstaven med tallene $m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_1 + m_2$. m_2 vil da være antall ganger den nestminste bokstaven inntreffer i ordet. Fortsett slik helt til alle bokstavene er byttet ut med naturlige heltall.

Eksempel 5.1.4 (Standardisering).

$$std(abbcabcab) = std(1bbc2bc3b) = std(145c26c37) = (145826937).$$

Proposisjon 5.1.5 (Koprodukt).

For et ord (en permutasjon) $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathfrak{S}_n$ vil

$$\Delta(F_w) = \sum_{k=0}^n F_{std(w_1, w_2, \dots, w_k)} \otimes F_{std(w_{k+1}, w_{k+2}, \dots, w_n)}.$$

Eksempel 5.1.6 (Eksempel på koprodukt).

For ordet $accab$ vil $std(accab) = 14523 \in \mathfrak{S}_5$ og man får at

$$\begin{aligned} \Delta(F_{accab}) &= \sum_{k=0}^5 F_{std(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)} \otimes F_{std(w_{k+1}, w_{k+2}, w_{k+3}, w_{k+4}, w_n)} \\ &= 1 \otimes F_{14523} + F_1 \otimes F_{4523} + F_{14} \otimes F_{523} + F_{145} \otimes F_{23} + F_{1452} \otimes F_3 + F_{14523} \otimes 1 \end{aligned}$$

Enheden for $SSym$ er gitt ved avbildingen som sender et element fra kroppen k til identitetspermutasjonen 1.

Koeheten er, for en permutasjon w , gitt ved

$$\epsilon(w) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } w = id \\ 0 & \text{hvis } w \in \mathfrak{S}_{n \geq 1} \end{cases}$$

Fordi $SSym$ er en gradert bialgebra, kan man si at den har en antipode, og dermed har man at $SSym$ er en Hopf-algebra.

Kapittel 6

Loday-Ronco

For å kunne diskutere Loday-Ronco Hopf-algebraen av plane binære trær, må man forklare hva trær er og hvordan operasjoner på trær fungerer. Dette kapitlet er tatt fritt etter [7, Chapter 2 & 3].

6.1 Trær

Definisjon 6.1.1 (Trær).

Et *plant* tre er en graf som er tegnet i planet, som kun har én rot. Det er *binært* om etthvert indre hjørne er trivalent (altså det har kun en rot og to blader). Y_n er mengden av plane binære trær med $n + 1$ blader og dermed n indre hjørner.

Eksempel 6.1.2.

$$Y_0 = \{ \mid \}, Y_1 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array} \}, Y_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mid \end{array} \},$$
$$Y_3 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mid \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mid \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mid \end{array} \}$$

Elementene i mengden Y_n er trær T , der graden til T er n . Man sier ofte at T er et n -tre. Antall trær i Y_n er talt opp av Catalan-tallene, gitt ved formelen $c_n = (2n)!/n!(n+1)!$.

Eksempel 6.1.3. $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5, c_4 = 14, c_5 = 42.$

Man kan *pode sammen* trær; om man har et p -tre T_1 og et q -tre T_2 , vil man lage et nytt $(p+q+1)$ -tre $T_1 \vee T_2$ ved å sammenføye trærne T_1 og T_2 med en ny felles rot. Fra dette kan man også se at for et hvilket som helst tre T finnes det unike trær T_1 og T_2 slik at $T = T_1 \vee T_2$

Eksempel 6.1.4.

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array} \vee \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mid \end{array}$$

Man kan også gi nivåer til trærne.

Definisjon 6.1.5.

Et planært binært tre med nivåer er et planært binært tre Y_n som definert ovenfor der etthvert indre hjørne har et nivå $i \in \{1, \dots, n\}$. Nivåene til et indre hjørne blir nummerert stigende nedover, slik at det indre hjørnet med nivå 1 er det øverste, nivå 2 er nest øverst og så videre helt til nivå n som er helt nederst i treet, altså ved roten av treet.

Eksempel 6.1.6. Treet  kan bli trærne  og  om man tar med nivåer.

Ethvert planært binært tre med nivåer kan bli unikt definert ved å lese nivåene av de indre hjørnene fra venstre til høyre i treet. På denne måten vil trærne i eksempelet ovenfor kunne bli assosiert med permutasjoner av tre elementer, der trærne i eksempelet vil tilsvare 231 og 132 respektivt sett. Mengden av alle plane binære trær med n nivåer kaller vi \tilde{Y}_n .

Mengden av plane binære trær, kalt $YSym$, har trær Y_n som basis. Dermed får vi at plane binære trær med n indre hjørner kalt $YSym^n$ blir utspent av

$$YSym^n = span\{Y_n\}$$

og vi sier at $YSym$ er den direkte summen

$$YSym = \bigoplus_{n \geq 0} YSym^n$$

der $YSym$ er Hopf-algebraen av plane binære trær.

6.2 Produkt og koprodukt

Proposisjon 6.2.1 (Produkt).

For to trær $T = T_1 \vee T_2$ og $T' = T'_1 \vee T'_2$ har man at produktet av trærne $T * T'$ er

$$\begin{aligned} T * T' &= T_1 \vee (T_2 * T') + (T * T'_1) \vee T'_2 \\ &= T_1 \vee (T_2 * (T'_1 \vee T'_2)) + ((T_1 \vee T_2) * T'_1) \vee T'_2 \end{aligned}$$

der man også har at $| * T = T = T * |$. Hentet fra [7, Proposition 3.2]

Nedenfor følger et eksempel på hvordan regne ut produkt av to trær, samt en tabell over noen av de enkleste produktene.

Eksempel 6.2.2 (Produkt av trær).

For trærne $T = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} = | \vee | = T_1 \vee T_2$ og $T' = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \vee | = T'_1 \vee T'_2$ har vi at produktet $T * T'$ vil være

$$\begin{aligned} T * T' &= T_1 \vee (T_2 * T') + (T * T'_1) \vee T'_2 \\ &= | \vee (| * \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}) + (\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} * \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}) \vee | = | \vee \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} + (\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}) \vee | = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \end{aligned}$$

T	T'	T*T'
	Y	Y
	YY	YY
	YY	YY
Y		Y
Y	Y	YY + YY
Y	YY	YYY + YY + YY
Y	YY	YYY + YY
YY		YY
YY	Y	YYY + YY
YY	YY	YYYY + YY + YY
YY	YY	YYYY + YY
YY		YY
YY	Y	YYY + YY + YY
YY	YY	YYYY + YY + YY + YY + YY + YY
YY	YY	YYYY + YY + YY

Proposisjon 6.2.3 (Koprodukt).

For et tre $T = T_1 \vee T_2 \in Y_{n+m+1}$ der $T_1 \in Y_n$ og $T_2 \in Y_m$ vil man ha et koprodukt slik at

$$\Delta(T) = \sum_{j,k} (T_{1(j)} * T_{2(k)}) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee T'_{2(m-k)}) + T \otimes |$$


der vi har

$$\Delta(T_1) = \sum_j T_{1(j)} \otimes T'_{1(n-j)}$$

$$\Delta(T_2) = \sum_k T_{2(k)} \otimes T'_{2(m-k)}$$

Hentet fra [7, Proposition 3.3].

Eksempelet nedenfor prøver å gjøre det litt lettere å forstå hva dette betyr i praksis.

Eksempel 6.2.4. For treet $T =$  har vi at koproduktet blir

$$\Delta(T) = \Delta(\text{Y}) = | \otimes \text{Y} + \text{Y} \otimes \text{Y} + \text{Y} \otimes |$$

På neste side følger en tabell over koprodukt av trær med opptil 3 indre hjørner.

Videre kan man definere en enhet som sender ethvert tre T til identitetstret, $|$.

Koenheten vil være en avbildning som sender $|$ til 1 og ethvert annet tre T til 0.

Fordi $YSym$ er en gradert bialgebra, kan man også si at den har en antipode, og dermed er det også en Hopf-algebra.

T	$\Delta(T)$
Y	⊗ Y + Y ⊗
Y _Y	⊗ Y _Y + Y _Y ⊗
Y _Y	⊗ Y _Y + Y _Y ⊗
Y _Y _Y	⊗ Y _Y _Y + Y _Y ⊗ Y _Y _Y + Y _Y _Y ⊗
Y _Y _Y	⊗ Y _Y _Y + Y _Y ⊗ Y _Y _Y + Y _Y _Y ⊗
Y _Y _Y	⊗ Y _Y _Y + Y _Y ⊗ Y _Y _Y + Y _Y _Y ⊗
Y _Y _Y	⊗ Y _Y _Y + Y _Y ⊗ Y _Y _Y + Y _Y _Y ⊗
Y _Y _Y	⊗ Y _Y _Y + Y _Y ⊗ Y _Y _Y + Y _Y _Y ⊗

Kapittel 7

Hvordan det henger sammen

I [7, Proposition 2.3] skrives det om en bijeksjon mellom trær med n nivåer (\tilde{Y}_n) og permutasjoner av n elementer (S_n). Det finnes også en avbildning fra permutasjoner av n elementer til komposisjoner $\alpha \vDash n$ (C_n). For en permutasjon $\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$, vil den bli avbildet til komposisjonen $comp(Des(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)))$. Nedenfor er en tabell med eksempler fra $n = 3$.

Eksempel 7.0.1 ($S_n \rightarrow C_n$ for $n = 3$).

Permutasjon	$Des(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$	$comp(Des(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)))$
123	{}	(3)
132	{2}	(2,1)
213	{1}	(1,2)
231	{2}	(2,1)
312	{1}	(1,2)
321	{1,2}	(1,1,1)

Fordi man kan skrive alle plane binære trær med n nivåer som permutasjoner av n elementer og visa versa, kan man derfor se at det er en avbildning fra permutasjoner til binære trær med nivåer til komposisjoner, $S_n \rightarrow \tilde{Y}_n \rightarrow C_n$.

Om man har et vektorrom kX med basis av elementene i X , vil det duale vektorrommet $(kX)^*$ ha en naturlig basis, alle elementene i x^* gitt ved avbildingen $kX \rightarrow k$ der x blir sendt til 1, og alle andre elementer i X blir sendt til 0. Videre kan $(kX)^*$ naturlig identifiseres med vektorrommet kX ved å la x^* svare til x .

Man kan lage vektorrom av mengdene ovenfor (S_n, \tilde{Y}_n, C_n) og få vektorrommene $kS_n, k\tilde{Y}_n$ og kC_n , repsektivt sett. Videre, fordi disse har basiser, vil deres duale også få naturlige basiser gitt på samme måte som ovenfor, og vektorrommene identifisere naturlig med sine dualer slik at $SSym$ nå er $\bigoplus_{n \geq 1} (kS_n)^*$, $YSym$ nå er $\bigoplus_{n \geq 1} (k\tilde{Y}_n)^*$ og $NSym$ nå er $\bigoplus_{n \geq 1} (kC_n)^*$. Så, fra avbildingene $S_n \rightarrow \tilde{Y}_n \rightarrow C_n$, får man de duale avbildingene

$$(ESym \cong) NSym \rightarrow YSym \rightarrow SSym.$$

Eksemplene nedenfor viser hvordan disse avbildingene kan se ut.

Eksempel 7.0.2 (Eksempel for $NSym \rightarrow YSym$).

Fordi $NSym$ og $ESym$ er isomorfe, brukes tuplene her for simplisitetens skyld.

$$\begin{aligned} () * (-1, -1) &= (+1, -1, -1) + (-1, -1, -1) \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \\ () * (-1, -1) &\rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} * \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \end{aligned}$$

og man ser at produktet blir respektert for $NSym \rightarrow YSym$.

Eksempel 7.0.3 (Eksempel for $YSym \rightarrow SSym$).

$$\begin{aligned} \Delta \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) &= \left| \otimes \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \otimes \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \right| \rightarrow 1 \otimes F_{321} + F_1 \otimes F_{21} + F_{21} \otimes F_1 + F_{321} \otimes 1 \\ \Delta \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) &\rightarrow \Delta(F_{321}) = 1 \otimes F_{321} + F_1 \otimes F_{21} + F_{21} \otimes F_1 + F_{321} \otimes 1 \end{aligned}$$

og man ser at koproduktet blir respektert for $YSym \rightarrow SSym$.

Kapittel 8

Øversettelser av Loday-Ronco

8.1 Definisjoner

Definisjon 8.1.1. En *tallsekvens* blir i denne oppgaven definert som en tallsekvens $a_1 a_2 \dots a_n$ for $i = 1, 2, 3, \dots, n$ som følger følgende regler:

- $a_i \leq i$ og
- $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

slik som i [6, Exercise 14].

Eksempel 8.1.2 (Eksempler på tallsekvenser).
1, 11, 12, 111, 112, 113, 122, 123

Definisjon 8.1.3. En *AB-streng* er en streng bestående av like mange A-er og B-er, og om man stopper strengen vil aldri antall B-er overskride antall A-er så langt i strengen.

Eksempel 8.1.4 (Eksempler på AB-strenger).
AB, AABB, ABAB, AAABBB, AABABB, AABBBAB, ABAABB, ABABAB

Tallsekvenser med n siffer og AB-strenger med n A-er er begge talt opp av Catalantallene, akkurat som plane binære trær uten nivåer Y_n , der antall AB-strenger med n A-er og antall tallsekvenser som følger reglene over med n siffer er gitt ved $c_n = (2n)!/n!(n+1)!$

Et av fokuspunktene til denne oppgaven er å undersøke Loday-Ronco Hopf-algebraen og dets produkt og koprodukt. Videre vil oversettelser av disse til tallsekvenser av formen over og til AB-strenger undersøkes, og hvordan produkt og koprodukt oppfører seg i disse oversettelsene.




8.2 Sammenheng mellom trær, AB-strenger og tallsekvenser

8.2.1 Trær og tallsekvenser









Den finnes en sammenheng mellom trær og tallsekvenser av formen over. For en sekvens $a_1 a_2 \dots a_n$ vil kan kunne tegne et unikt tre ut ifra denne sekvensen ved hjelp av følgende fremgangsmåte.

Algoritme 8.2.1. Start med det tomme treet $|$. For hver i tegner man et nytt blad på treet ut fra blad a_i talt fra venstre. Husk å alltid telle blader på nytt for hver gang man skal legge til et nytt blad, da det kan påvirke hvor man skal plassere det nye bladet.

Eksempel 8.2.2.

For en sekvens 122, vil man tegne det treet som svarer til denne sekvensen. Man starter alltid med $|$. På dette treet vil man nå tegne det første bladet på blad nr. 1, så det blir . Deretter skal man tegne et nytt blad på blad nr. 2, så det blir . Deretter skal man tegne et nytt blad på blad nr. 2, så det blir . Dette siste treet tilsvare da sekvensen 122.

Nedenfor er en tabell over hvilken tallsekvens som hører til hvilket tre for trær med opptil tre indre hjørner.

Tallsekvens	Tre, T
1	
11	
12	
111	
112	
113	
122	
123	

Man kan også se en sammenheng når det gjelder podingen av to trær og tallsekvensen det vil gi.

Proposisjon 8.2.3. For to trær T_1 og T_2 med tallsekvenser S_1 og S_2 repsektivt sett, vil podingen $T_1 \vee T_2$ tilsvare tallsekvensen $1S_1S_2^*$, der S_2^* er tallsekvensen S_2 der alle elementene er hevet med antall elementer i S_1 pluss 1.

Eksempel 8.2.4.


For to tallsekvenser 11 og 12, vil podingen av deres tilsvarende trær svare til tallsekvensen $1S_1S_2^* = 11145$.

Bevis for Proposisjon 8.2.3. For å bekrefte denne sammenhengen kan man tenke på to vilkårlige trær T_1 og T_2 , og deres tilsvarende tallsekvenser S_1 og S_2 , der T_1 har $n + 1$ antall blader og dermed S_1 har n antall elementer i sekvensen. Når man poder sammen trærne til $T = T_1 \vee T_2$ vil naturligvis T_1 bli treet på venstre blad av roten til T og T_2 vil bli høyre blad ved roten av T . Fordi T_1 tegnes som venstre venstre blad av roten til T , vil det være naturlig å plassere denne etter 1 i tallsekvensen, da hele T_1 det første bladet av treet. Fordi T_1 har $n + 1$ blader og man plasserte T_1 som det venstre bladet av roten til T , vil det nå være $n + 1$ antall blader på venstre side av roten til T . For at T_2 skal kunne tegnes som høyre blad av roten til T , må man altså øke første element i S_2 med $n + 1$. Fordi man øker første elementet, må man også øke resten av elementene i S_2 med samme mengde for å bevare ordningen av elementene innad i S_2 . Dermed, hvis man har to trær T_1 og T_2 med tallsekvenser S_1 og S_2 repsektivt sett og der antall elementer av $S_1 = n$, vil podingen $T_1 \vee T_2$ tilsvare tallsekvensen $1S_1S_2^*$, der S_2^* er tallsekvensen S_2 der alle elementene er hevet med $n + 1$. □

8.2.2 Trær og AB-strenger

Algoritme 8.2.5. La T være et binært tre i $Y_{n \geq 1}$. Start alltid ved roten og noter strengen AB. Les bladene oppover og start med venstre rotblad. Hvis treet har en forgreining fra et venstre blad, noter AB etter den nyligst noterte A-en. Hvis treet har en forgreining fra et høyre blad, noter AB etter den nyligst noterte B-en. Fortsett med samme regler på forgreiningene til alle blader er gjort rede for på venstre rotblad. Deretter gjør man det samme på høyre rotblad, der første forgreining alltid blir notert i enden av den foreløpige AB-strengen.

Eksempel 8.2.6. I eksempelet vil stegene utført bli markert med **fet** skrift.

 har AB-strengen AABABBAB. Det kan vises steg for steg på denne måten: Start ved roten og skriv

AB

På venstre blad har vi en forgreining, dermed blir AB lagt til etter den nyligst noterte A-en

A**AB**B

Forgreiningen har enda en forgreining, men på høyre blad. Dermed blir AB lagt til etter den nyligste B-en

AABABB

Nå er alle forgreininger på venstre side av roten gjort rede for. Høyre blad av roten har en forgreining, og første forgreining skulle alltid bli lagt til etter den foreløpige AB-strengen

AABABBAB

Dette er AB-strengen for treet .









En alternativ måte man kan se sammenhengen mellom trær og AB-strenger vil være å se på hvordan et tre $T = T_1 \vee T_2$ vil bli skrevet som en AB-streng.

Proposisjon 8.2.7. For et tre $T = T_1 \vee T_2$ der U tilsvarer AB-strengen til T_1 og V tilsvarer AB-strengen til T_2 , vil $AUBV$ tilsvare AB-strengen til T .









Bevis. Det finnes to naturlige måter å definere AB-strengen til $T = T_1 \vee T_2 \in Y_{p+q+1}$ der U tilsvarer AB-strengen til $T_1 \in Y_p$ og V tilsvarer AB-strengen til $T_2 \in Y_q$, enten som $AUBV$ eller som $UAVB$. Denne oppgaven og dette beviset bruker den førstnevnte definisjonen.

La AB-strengen til T være W . T_1 er venstrebladet til T , derfor må U være i starten av W . T_2 er høyrebladet til T , derfor må V være i enden av W . Fordi $T \in Y_{p+q+1}$, må W inneholde én mer A og én mer B enn summen av U og V . Fordi man vil lage en unik AB-streng av podingen $T_1 \vee T_2$, må denne AB omringe enten U eller V , så $W = AUBV$ eller $W = UAVB$. \square

Nedenfor er en tabell over hvilken AB-streng som hører til hvilket tre for trær med opptil tre indre hjørner.

AB-streng	Tre, T
AB	
AABB	
ABAB	
AAABBB	
AABABB	
AABBAB	
ABAABB	
ABABAB	





Man kan slå sammen tabellene om AB-strenger, tallsekvenser og trær, og dermed se en sammenheng mellom både tallsekvenser, AB-strenger og plane binære trær, gitt for trær med opptil 3 indre hjørner nedenfor.

Tallsekvens	AB-streng	Tre, T
1	AB	
11	AABB	
12	ABAB	
111	AAABBB	
112	AABABB	
113	AABBAB	
122	ABAABB	
123	ABABAB	

8.3 Regler for produkt

Fordi man har en korrespondanse mellom trær, AB-strenger og tallsekvenser, vil det være likegyldig hvilken man bruker for å finne regler for produkt og koprodukt. Reglene for produkt vil bruke AB-strenger.

8.3.1 Venstre- og høyreprodukt av AB

For å bevise hvordan produktet av et tre T med treet  oppfører seg, har jeg valgt å gå tilbake og se på produktet mellom to vilkårlige trær, T og T' , og se hvordan dette oppfører seg under spesifikke situasjoner, nemlig når T eller T' er lik treet . La oss først se på hva som skjer når vi bytter ut T med  = $|\vee|$, og deretter ser vi på hva som skjer når vi bytter ut T' med  = $|\vee|$.

Venstreprodukt av AB

$$T * T' = T_1 \vee (T_2 * T') + (T * T'_1) \vee T'_2$$

$$\text{tree diagram} * T' = |\vee(| * T') + (\text{tree diagram} * T'_1) \vee T'_2$$

$$\text{tree diagram} * T' = |\vee T' + (\text{tree diagram} * T'_1) \vee T'_2$$

Fra her kan man se at det første leddet $|\vee T'$ kun blir til ett ledd. Det andre leddet $(\text{tree diagram} * T'_1) \vee T'_2$ derimot har et nytt produkt i seg, og man vil her da måtte fortsette å bruke produktsetningen for trær (6.2.1), men nå med $T = \text{tree diagram}$ og $T' = T'_1$. Man kan se at dette produktet vil fortsette slik som dette helt til $T'_1 = |$, det vil si helt til venstre blad fra roten på treet kun er $|$. Man kan si med sikkerhet at $T'_1 = |$ vil oppstå en gang fordi alle binære trær har både et venstre blad og et høyre blad fra roten av treet, bortsett fra treet $|$.

Om man ser nære på det, kan man skrive produktet mer generelt, som følger:

Proposisjon 8.3.1. For et tre T' , vil venstreproduktet av AB med T' være

$$AB * T' = \sum_{i=0}^n (iA)AB(R)$$

der n er antall A-er i AB-strengen for T' før første B opptrer og R er resten av AB-strengen til T' når disse A-ene er tatt bort.

Eksempel 8.3.2.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} * \text{Diagram} &= | \vee \text{Diagram} + (\text{Diagram} * \text{Diagram}) \vee | \\
 &= \text{Diagram} + (\text{Diagram} + \text{Diagram}) \vee | \\
 &= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram}
 \end{aligned}$$

$$AB * AABABB = \sum_{i=0}^2 (iA)AB(R) = ABAABABB + AABABABB + AAABBABB$$

Her har produktet blitt regnet ut for treet først, og deretter er summen over brukt. Man kan se at AB-strengene tilsvarer trærne som er regnet ut.

Dette vil stemme overens med hva som ble nevnt her om å fortsette produktet helt til $T'_1 = |$, da vil også produktet gi tre ledd. Dette vil også stemme overens med tanken om å alltid fortsette produktet videre med venstre blad fra roten på treet.

Bevis for Proposisjon 8.3.1. For å forklare hvorfor det blir slik, der det viktig å se på hva som skjer med AB-strenger når man podet trær. Som nevnt i 8.2.7, for to vilkårlige trær T_i og T_j med AB-strenger S_i og S_j , vil podingen $T_i \vee T_j$ tilsvare AB-strengen AS_iBS_j . Videre når man ser på det

generelle produktet $\text{Diagram} * T'$ vil det bli

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} * T' &= | \vee T' + (\text{Diagram} * T'_1) \vee T'_2 \\
 &= | \vee T' + (| \vee T'_1 + (\text{Diagram} * T'_{1_1}) \vee T'_{1_2}) \vee T'_2 \\
 &= | \vee T' + (| \vee T'_1 + (| \vee T'_{1_1} + (\text{Diagram} * T'_{1_{1_1}}) \vee T'_{1_{1_2}}) \vee T'_{1_2}) \vee T'_2
 \end{aligned}$$

Slik vil produktet fortsette helt til $T'_{1_{\dots_1}} = |$. $| \vee T'$ vil skrives som ABS' , $(| \vee T'_1) \vee T'_2$ vil skrives som $AABS'_1BS'_2$ og så videre.

Når $T'_{1_{\dots_1}} = |$ vil $\text{Diagram} * T'_{1_{\dots_1}} = \text{Diagram}$, og dermed vil man kunne utføre den siste podingen

$((\dots (\text{Diagram} \vee T'_{1_{\dots_2}}) \vee \dots) \vee T'_{1_2}) \vee T'_2$ som vil kunne skrives som $AA\dots ABS'_{1_{\dots_1}} \dots BS'_{1_2}BS'_2$.

Denne AB-strengen er AB-strengen til treet T med et ekstra blad på venstre rotblad, noe man får om man skriver alle A-ene i S før første B opptrer, etterfulger av AB og så resten av S , altså $(nA)AB(R)$. □

Høyreprodukt av AB

$$T * T' = T_1 \vee (T_2 * T') + (T * T'_1) \vee T'_2$$

$$T * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = T_1 \vee (T_2 * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) + (T * \begin{array}{c} | \\ | \end{array}) \vee \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

$$T * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = T_1 \vee (T_2 * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) + T \vee \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

I likhet med forrige scenario, vil man også her ha ett ledd $T \vee |$ som kun er ett ledd, mens det andre leddet i produktet $T_1 \vee (T_2 * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array})$ har et nytt produkt i seg, slik at man her også må fortsette å bruke produktsetningen for trær (6.2.1), men nå med $T = T_2$ og $T' = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$. Man kan se at dette produktet vil fortsette slik som dette helt til $T_2 = |$, det vil si helt til høyre blad fra roten på treet kun er $|$.

Proposisjon 8.3.3. Det generelle produktet $T * AB$ kan skrives som en sum av andre AB-strenger på følgende vis: del opp AB-strengen til treet T inn i gyldige AB-strenger L_i om man leser T fra venstre til høyre, inkludert den tomme AB-strengen. La R_i være resten av AB-strengen til T om man tar bort L_i , og tillater at R_i kan være den tomme AB-strengen. Produktet $T * AB$ vil være summen av alle AB-strenger av formen $(L_i)A(R_i)B$;

$$T * AB = \sum_L (L_i)A(R_i)B$$

Eksempel 8.3.4. Hvis man bruker AABABB som eksempel, kan man se at det kun finnes to gyldige AB-strenger om man leser fra venstre til høyre; den tomme AB-strengen (L_0) og strengen AABABB (L_1). Produktet $T * AB$ vil da være summen av to ledd, nemlig summen AABABBAB + AAABABBB. Dette vil stemme overens med hvordan man vil regne ut produktet for dette treet med Proposisjon 6.2.1, men også med tanken om å fortsette med høyre blad fra roten på treet til det er $|$.

Bevis for Proposisjon 8.3.3. Hvis man ser på produktet $T * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$, vil det bestå av to ledd. Det andre leddet ($T \vee |$) vil alltid tilsvare AB-strengen man får om man skriver AB-strengen til T med en ekstra A i starten og en ekstra B i slutten (ASB). Det første leddet ($T_1 \vee (T_2 * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array})$) vil ha et tre ($T_1 \vee (T_2 \vee |)$) og ett nytt produkt ($T_1 \vee (T_2 \vee (T_2 * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}))$). Treet $T_1 \vee (T_2 \vee |)$ vil ligne på treet T , der likheten er at venstre blad fortsatt er T_1 , men høyre blad er $T_2 \vee |$. Dette vil si at man fortsatt skriver første gyldige AB-streng (altså AB-strengen for T_1), deretter skriver man det resterende av T (altså AB-strengen for T_2) med en ekstra A i starten og en ekstra B i slutten. Hele AB-strengen for treet $T_1 \vee (T_2 \vee |)$ vil da være AS_1BAS_2B . Slik vil det fortsette, helt til $T_{2_2 \dots 2} = |$, slik at $T_{2_2 \dots 2} * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$ og podingen kan gjennomføres og summen avsluttes med hele strengen S etterfulgt av AB, altså SAB . □

8.4 Regler for koprodukt

Reglene for koprodukt vil bruke tallsekvenser, men som forklart tidligere kunne man også brukt AB-strenger eller trær.

8.4.1 Koprodukt for tallsekvenser av formen 1111...1

Eksempel 8.4.1 (Tallsekvenser av formen 11...1).

$$\Delta(1) = \emptyset \otimes 1 + 1 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(11) = \emptyset \otimes 11 + 1 \otimes 1 + 11 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(111) = \emptyset \otimes 111 + 1 \otimes 11 + 11 \otimes 1 + 111 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(1111) = \emptyset \otimes 1111 + 1 \otimes 111 + 11 \otimes 11 + 111 \otimes 1 + 1111 \otimes \emptyset$$

Det ser ut som koproduktet av tallsekvenser av formen 11...1 følger summen nedenfor.

Proposisjon 8.4.2. For en tallsekvens 11...1 (med n siffer), vil koproduktet $\Delta(11...1)$ være

$$\Delta(11...1) = \sum_{i=0}^n (1)^i \otimes (1)^{n-i}$$

Bevis. Som eksemplene viser, fungerer dette for tallsekvensen med 1 og 2 siffer. La oss anta at det fungerer for $n = k$ antall siffer, og deretter se om det fungerer for $n = k + 1$ antall siffer.

$$\begin{aligned} \Delta(11...1) &= \sum_{i=0}^k (1)^i \otimes (1)^{k-i} \\ &= \emptyset \otimes (1)^k + 1 \otimes (1)^{k-1} + 11 \otimes (1)^{k-2} + \dots + (1)^{k-2} \otimes 11 + (1)^{k-1} \otimes 1 + (1)^k \otimes \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(11...1) &= \sum_{i=0}^{k+1} (1)^i \otimes (1)^{k+1-i} \\ &= \emptyset \otimes (1)^{k+1} + 1 \otimes (1)^k + 11 \otimes (1)^{k-1} + \dots + (1)^{k-1} \otimes 11 + (1)^k \otimes 1 + (1)^{k+1} \otimes \emptyset \\ &= (\emptyset \otimes (1)^k + 1 \otimes (1)^{k-1} + 11 \otimes (1)^{k-2} + \dots + (1)^{k-1} \otimes 1 + (1)^k \otimes \emptyset) * (\emptyset \otimes 1) + (1)^{k+1} \otimes \emptyset \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (1)^i \otimes (1)^{k-i} \right) * (\emptyset \otimes 1) + (1)^{k+1} \otimes \emptyset \\ &= \sum_{i=0}^k (1)^i \otimes (1)^{k+1-i} + (1)^{k+1} \otimes \emptyset \end{aligned}$$

som tilsvareer regelen for koprodukt av trær gitt ved 6.2.3, fordi alle trær og deltrær gitt av tallsekvensene i denne regelen vil være trær kun med forgreininger på venstre blad fra roten. Disse vil skrives som 111...1 med n siffer og dermed $n - 1$ forgreininger på venstre blad fra roten.

Regelen fungerer for $n = 1$. Antagelsen om at det fungerte for $n = k$ førte til at det fungerte for $n = k + 1$, dermed vil det fungere for alle tallsekvenser med n siffer. \square

8.4.2 Koprodukt for tallsekvenser av formen 1234...n

Eksempel 8.4.3 (Tallsekvenser av formen 12...n).

$$\Delta(1) = \emptyset \otimes 1 + 1 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(12) = \emptyset \otimes 12 + 1 \otimes 1 + 12 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(123) = \emptyset \otimes 123 + 1 \otimes 12 + 12 \otimes 1 + 123 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(1234) = \emptyset \otimes 1234 + 1 \otimes 123 + 12 \otimes 12 + 123 \otimes 1 + 1234 \otimes \emptyset$$

Det ser ut som koproduktet av tallsekvenser av formen 12...n følger summen nedenfor.

Proposisjon 8.4.4. For en tallsekvens 12...n (med n siffer), vil koproduktet $\Delta(12...n)$ være

$$\begin{aligned} \Delta(12...n) &= \sum_{i=0}^n (12...i) \otimes (12...(n-i)) \\ &= \emptyset \otimes 123...n + 1 \otimes 123...(n-1) + 12 \otimes 123...(n-2) + \dots + 123...(n-1) \otimes 1 + 123...n \otimes \emptyset \end{aligned}$$

Bevis. Man kan se at trær fra tallsekvenser av formen 12...n vil være det speilvendte trær fra tallsekvenser av formen 11...1 (med n siffer). Dermed vil et lignende bevis være for tallsekvenser av formen 12...n. \square

8.4.3 Koprodukt for tallsekvenser av formen 1111...n

Eksempel 8.4.5 (Tallsekvenser av formen 11...n).

$$\Delta(1) = \emptyset \otimes 1 + 1 \otimes \emptyset$$

$$\Delta(12) = \emptyset \otimes 12 + 12 \otimes \emptyset + 1 \otimes 1$$

$$\Delta(113) = \emptyset \otimes 113 + 113 \otimes \emptyset + 1 \otimes 11 + 1 \otimes 12 + 12 \otimes 1 + 11 \otimes 1$$

$$\Delta(1114) = \emptyset \otimes 1114 + 1114 \otimes \emptyset + 1 \otimes 111 + 1 \otimes 113 + 113 \otimes 1 + 11 \otimes 11 + 11 \otimes 12 + 12 \otimes 11 + 111 \otimes 1$$

$$\Delta(11115) = \emptyset \otimes 11115 + 11115 \otimes \emptyset + 1 \otimes 1111 + 1 \otimes 1114 + 1114 \otimes 1 + 11 \otimes 111 + 11 \otimes 113$$

$$+ 113 \otimes 11 + 111 \otimes 11 + 111 \otimes 12 + 12 \otimes 111 + 1111 \otimes 1$$

Etter å ha sett på eksemplene over, ser det ut som det kan være en generell regel for å finne koproduktete av en tallsekvens 11...n (med n siffer), gitt ved følgende formel.

Proposisjon 8.4.6. For en tallsekvens 11...n med n siffer og der $n \geq 2$, vil koproduktet $\Delta(11...n)$ være gitt ved summen

$$\Delta(11...n) = \sum_{i=0}^{n-2} 1^i \otimes 1^{(n-i-1)}(n-i) + 1^{(n-i-1)}(n-i) \otimes 1^i + 1^{(i+1)} \otimes 1^{(n-i-1)}$$

Bevis. For å bekrefte summen, har jeg gått tilbake til den opprinnelige regelen for koprodukt (6.2.3):

$$\Delta(T) = \sum_{j,k} (T_{1(j)} * T_{2(k)}) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee T'_{2(m-k)}) + T \otimes |$$

Trær av formen til tallsekvenser som $11 \dots n$ vil være lignende trær av formen $11 \dots 1$, men der høyre blad fra roten er \vee istedet for $|$. Dette vil gi utslag i koproduktregelen;

$$\Delta(T) = \sum_{j,k} (T_{1(j)} * T_{2(k)}) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee T'_{2(m-k)}) + T \otimes |$$

$$\Delta(T) = \sum_j (T_{1(j)} * |) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee \vee) + \sum_j (T_{1(j)} * \vee) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |) + T \otimes |$$

$$= \sum_j T_{1(j)} \otimes (T'_{1(n-j)} \vee \vee) + \sum_j (T_{1(j)} * \vee) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |) + T \otimes |$$

Vi ser på en sum om gangen. $T \otimes |$ blir inkludert i den andre delsummen. La oss først se på den første summen:

$$\sum_j T_{1(j)} \otimes (T'_{1(n-j)} \vee \vee)$$

Man kan se at de gjenstående trærne ($T_{1(j)}$ og $T'_{1(n-j)}$) kan skrives som tallsekvenser $11 \dots 1$, og dermed vil koproduktene deres bli funnet som vist tidligere. Podingen med treet \vee vil føre til tallsekvensen med $(n-j-1)$ antall 1-ere og $(n-j)$ i slutten av tallsekvensen. Dermed vil den første summen kunne skrives om til tallsekvens på denne måten:

$$\sum_{j=0}^{n-2} (1)^j \otimes ((1)^{n-j-1} (n-j))$$

Den andre summen vil være

$$\sum_j (T_{1(j)} * \vee) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |)$$

Ved 6.2.1,

$$\begin{aligned} T_{1(j)} * \vee &= T_{1(j)_1} \vee (T_{1(j)_2} * \vee) + T_{1(j)} \vee | \\ &= T_{1(j)_1} \vee (| * \vee) + T_{1(j)} \vee | \\ &= T_{1(j)_1} \vee \vee + T_{1(j)} \vee | \end{aligned}$$

Her vil man se at den opprinnelige summen kan da skrives som

$$\begin{aligned} & \sum_j (T_{1(j)1} \vee \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + T_{1(j)} \vee |) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |) \\ &= \sum_j (T_{1(j)1} \vee \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |) + \sum_j (T_{1(j)} \vee |) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |), \end{aligned}$$

som da kan deles inn i to delsummer. $T_{1(j)1} \vee \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$ vil være en gyldig poding i ett mindre tilfelle enn $T_{1(j)}$, dermed må vi nå starte summen på $j = 1$. Ellers vil den første delsummen være

$$\sum_{j=1}^{n-2} ((1)^{n-j-1} (n-j)) \otimes (1)^j$$

Om man inkluderer leddet $T \otimes |$ inn i denne summen, får man

$$\sum_{j=0}^{n-2} ((1)^{n-j-1} (n-j)) \otimes (1)^j$$

Fordi $T_{1(j)}$ og $T'_{1(n-j)}$ er av formen $11 \dots 1$, vil man kunne skrive den andre delsummen om til

$$\sum_{j=0}^{n-2} (1)^{j+1} \otimes (1)^{n-j-1}$$

Dermed, om vi bytter ut j -er med i -er, har vi at

$$\sum_j T_{1(j)} \otimes (T'_{1(n-j)} \vee \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) + \sum_j (T_{1(j)} * \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) \otimes (T'_{1(n-j)} \vee |) + T \otimes |$$

vil tilsvare summen

$$\sum_{i=0}^{n-2} 1^i \otimes 1^{(n-i-1)} (n-i) + 1^{(n-i-1)} (n-i) \otimes 1^i + 1^{(i+1)} \otimes 1^{(n-i-1)}$$

og regelen for koprodukt av trær med tallsekvens $11 \dots n$ vil stemme. \square

8.5 Ordning av trær

[8, Chapter 2] forteller at det går an å ordne plane binære trær med en svak ordning basert på noen regler.

Definisjon 8.5.1.

\leq er den svake ordningen på trær i Y_n som følger følgende regler:

1. Hvis $u \leq u' \in Y_p$ og $v \leq v' \in Y_q$, så vil $u \vee v \leq u' \vee v' \in Y_{p+q+1}$.
2. Hvis $u \in Y_p$, $v \in Y_q$ og $w \in Y_r$, så vil $(u \vee v) \vee w \leq u \vee (v \vee w)$.

Eksempel 8.5.2.

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array} \vee | = (| \vee |) \vee |, \quad \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array} = | \vee \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array} = | \vee (| \vee |),$$

som betyr at $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array}$.

Videre kan man definere to nye operasjoner kalt *over*, / og *under*, \ som følger:

Definisjon 8.5.3. For to trær $u \in Y_p$ og $v \in Y_q$, kan man finne trær u/v og $u \setminus v \in Y_{p+q}$ slik at:

- Om roten til u er plassert som bladet mest til venstre i v , har vi treet u/v .
- Om roten til v er plassert som bladet mest til høyre i u , har vi treet $u \setminus v$.

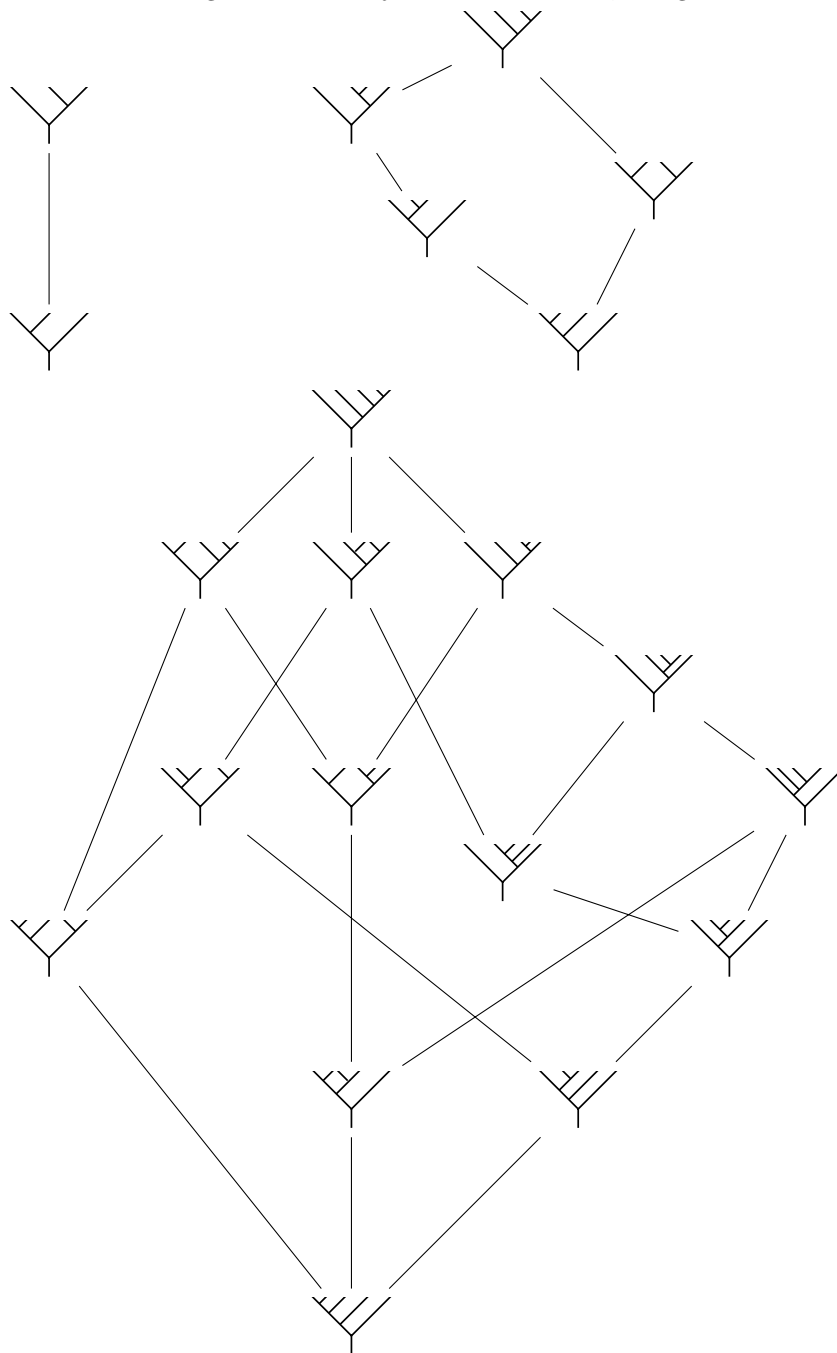
Lemma 8.5.4. For to trær $u \in Y_p$ og $v \in Y_q$ har vi at

$$u/v \leq u \setminus v.$$

Eksempel 8.5.5.

For $u = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array}$ og $v = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array}$, vil man ha $u/v = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array}$ og $u \setminus v = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array}$. Fra lemmaet over har man at $u/v \leq u \setminus v$, og dermed $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ | \quad | \\ \diagup \diagdown \end{array}$.

Basert på definisjonene ovenfor, kan man ordne relasjonene i et *Hassediagram*. I et slikt diagram vil man plassere et element T ovenfor et annet element T' med en linje mellom dem om $T' \leq T$. Nedenfor er Hassediagram over relasjonene for trær i Y_2 , Y_3 og Y_4 .



Fra [8, Theorem 5.1] har man at produktet av to trær $u \in Y_p$ og $v \in Y_q$ vil være

$$u * v = \sum_{u/v \leq w \leq u \setminus v} w \in Y_{p+w}.$$

Dette betyr at trær av formen w vil ha en relasjon til andre trær av samme form i hassediagrammet.

Eksempel 8.5.6 (Eksempel for Y_2).

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} * \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array}, \text{ og i hassediagrammet for } Y_2 \text{ har vi}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array}.$$

Eksempel 8.5.7 (Eksempel for Y_3).

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} * \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array}, \text{ og i hassediagrammet for } Y_3 \text{ har vi}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array}.$$

Eksempel 8.5.8 (Eksempel for Y_4).

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} * \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array}, \text{ og i hassediagrammet for } Y_4 \text{ har vi}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array}.$$

Eksempel 8.5.9 (Eksempel for Y_4).

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} * \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array}, \text{ og i hassediagrammet for } Y_4 \text{ har vi}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \\ \text{Y} \end{array} \leq \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{Y} \end{array}.$$

Bibliografi

- [1] Robert Gardner. *Section III.5. Rings of Polynomials and Formal Power Series*. URL: <http://faculty.etsu.edu/gardnerr/5410/notes/III-5.pdf>. (hentet: 11.06.2020).
- [2] Florent Hivert. *An introduction to Combinatorial Hopf Algebras*. URL: <https://www-igm.univ-mlv.fr/~hivert/PAPER/Cargese.pdf>. (hentet: 03.09.2019).
- [3] Christian Kassel. *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995. ISBN: 0387943706.
- [4] Dajic Grinberg & Victor Reiner. *Hopf Algebra in Combinatorics*. URL: <https://arxiv.org/pdf/1409.8356v4.pdf>. (hentet: 03.09.2019).
- [5] Claudi Malvenuto & Christophe Reutenauer. “Duality between Quasi-Symmetric Functions and the Solomon Descent Algebra”. I: *Journal of Algebra* 177.3 (1995), s. 967–982. DOI: <https://doi.org/10.1006/jabr.1995.1336>.
- [6] Steven Roman. *An Introduction to Catalan Numbers*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser, 2015. ISBN: 9783319221434.
- [7] Jean-Louis Loday & María O. Ronco. “Hopf Algebra of the Planar Binary Trees”. I: *Advances in Mathematics* 139 (1998), s. 293–309. DOI: <https://doi.org/10.1006/aima.1998.1759>.
- [8] Jean-Louis Loday & María O. Ronco. “Order Structure on the Algebra of Permutations and of Planar Binary Trees”. I: *Journal of Algebraic Combinatorics* 15.3 (2002), s. 253–270. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1015064508594>.
- [9] Kurt Luoto & Stefan Mykytiuk & Stephanie van Willigenburg. *An Introduction to Quasisymmetric Schur Functions*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, 2013. ISBN: 9781461472995.