Prising av opsjoner ved lineær programmering

Trond Arne Halvorsen

Masteroppgave i samfunnsøkonomi
Institutt for økonomi, Universitetet i Bergen
Desember 2007

Prising av opsjoner ved lineær programmering

Trond Arne Halvorsen

Sammendrag: En *opsjon* er en rettighet til å kjøpe eller å selge et underliggende verdipapir til en avtalt pris, på et bestemt tidspunkt i fremtiden. Å investere i opsjoner er et relativt nytt fenomen i Norge, og interessen for hvordan opsjoner verdsettes øker stadig. Det finnes etablerte modeller for *prising av opsjoner*, men disse modellene kan kritiseres på grunn av at de har store begrensninger og er lite anvendelige, eller at de beror på strenge antakelser som gjør verdsettingen tvilsom. Det viser seg imidlertid at *lineær programmering* (matematisk programmering) kan begrense opsjonspriser til å befinne seg innenfor bestemte intervaller, og kan på denne måten være en metode for prising av opsjoner som er både enkel å bruke, og som heller ikke er avhengig av så strenge antakelser som er tilfellet for andre modeller.

Idéen for prising av opsjoner ved lineær programmering kan i korte trekk beskrives på følgende måte: Ved eksistens av *fullstendige markeder* (complete markets) eksisterer det, under visse krav, ett entydig sannsynlighetsmål som tilfredstiller *martingale-vilkårene*. Ved lineær programmering kan man, ved bruk av *dualitetsprinsippet,* løse ut for en entydig opsjonspris. Denne metoden viser seg å være en meget fleksibel metode for prising av *amerikanske opsjoner*. Dette illustreres ved forkjellige eksempler, både ved regning og ved hjelp av dataprogram. Ved ufullstendige markeder eksisterer det ikke-lineære sidevilkår, noe som kompliserer verdsettingsproblemet.

Stikkord: Opsjon - prising av opsjoner - lineær programmering - fullstendige markeder - martingale - dualitet - amerikanske opsjoner

Masteroppgave i samfunnsøkonomi
Institutt for økonomi, Universitetet i Bergen
Desember 2007

Innhold

Forord

Denne masteroppgaven ble gjennomført som den avsluttende delen av masterprogrammet i samfunnsøkonomi ved institutt for økonomi, Universitet i Bergen. Oppgaven er et resultat av to semesters arbeid (ett år), og tilsvarer 60 studiepoeng.

At jeg nå fullfører en mastergrad i økonomi er en blanding av bevisste valg og tilfeldigheter. Med bachelorgraden innen informatikk, matematikk og økonomi hadde jeg flere muligheter for valg av masterretning. Jeg landet til slutt på samfunnsøkonomi, som jeg syntes virket både spennende og utfordrende. Det har senere vist seg å være et fornuftig valg, da jeg har stortrivdes gjennom denne studieperioden, og fått god anledning til å anvende mine bakgrunnskunnskaper fra bachelorgraden.

Da jeg høsten 2006 tok kurset *Numeriske metoder i samfunnsøkonomi*, ble jeg presentert for et tema som virket skreddersydd for mine kvalifikasjoner. Prising av opsjoner kan gjøres ved antakelsen om fravær av arbitrasje, og løses ved hjelp av lineær programmering (matematisk programmering). For dette temaet krevdes forkunnskaper i både informatikk, matematikk og økonomi, og jeg kunne virkelig få sjansen til å benytte min tverrfaglige bakgrunn.

Jeg vil først og fremst takke professor Sjur Didrik Flåm, som presenterte meg for dette temaet, og som også har vært min veileder gjennom hele arbeidet. Jeg vil takke deg for inspirasjon for oppgaven, solid veiledning, og for stor fleksibilitet og tilgjengelighet i denne perioden.

Jeg vil også takke professor Bjørn Sandvik som presenterte meg for det matematiske tekstbehandlingsprogrammet Scientific Workplace, og som har vært min tekniske støttespiller for dette verktøyet.

Til slutt vil jeg takke min mor og far, for moralsk støtte, samt øvrig familie og venner som hele tiden har oppmuntret meg til å stå på, og som har akseptert at store deler av min tid i året 2007 har vært viet til denne oppgaven. En spesiell takk til min morfar, Rolf Næsheim, som har vist formidabel interesse for mine studier i lang tid, og som artig nok fyller året samme dagen som jeg fullfører min 5-årige universitetsutdannelse. Du har vært en god motivator, gratulerer med dagen!

Bergen 3/12/2007

Trond Arne Halvorsen

Kapittel 1

Innledning

Finansverdenen er i stadig endring. Grundige analyser ligger bak enhver investering, og nye teoretiske metoder for verdsetting av økonomisk virksomhet påvirker hele tiden aktørenes valg. Derivathandelen på Oslo Børs har økt kraftig de siste årene, og i følge Oslo Børs pressemelding 29.12.06 skjedde det i 2006 en fordobling av derivatkontraktene i forhold til året før [19]. Derivathandelen som foregår i Norge er hovedsakelig handel med opsjoner eller terminkontrakter. Interessen omkring opsjonshandel er stor i finansmiljøene, og hvordan opsjonene verdsettes er dermed vesentlige.

Flere verdsettingsmodeller for opsjoner har etterhvert blitt utviklet, men felles for dem alle er at de beror på strenge forutsetninger. Prisutviklingen til en opsjons underliggende aktiva representeres vanligvis ved en stokastisk prosess, som modellerer variasjonen i pris over tid. De amerikanske matematikerne Black, Scholes og Merton utledet i 1973 [7] en metode for verdsetting av opsjoner av europeisk type som var avhengig av at:

(1) Markedet er fritt for arbitrasje

(2) Prisene til opsjonens underliggende aksjer følger en geometrisk-Brownsk bevegelse.

Å anta et arbitrasjefritt marked er akseptabelt, men det er kjent at prisutviklingen i markedet ikke alltid følger forutsetning (2), noe som kan føre til signifikant feilprising dersom prisutviklingen ikke følger en geometrisk-Brownsk bevegelse. Alternative prisingsmetoder har blitt utviklet uten denne forutsetningen, men da må i stedet prisutviklingen bli representert på en annen måte. Modellen som Cox, Ross og Rubinstein utledet i 1979 [1], er en metode som representerer prisutviklingen ved et binært tre. Det er en snillere forutsetning, men metoden er mindre fleksibel og lite anvendelig i praksis.

1.1 Motivasjon

Opsjonspriser kan bli begrenset av lett håndterlig optimering, og verdsettingsproblemet kan i flere tilfeller kan modelleres ved enkel *lineær programmering* (matematisk programmering). Modellen er avhengig av er arbitrasjefritt marked (1), men antas *ikke* å følge en geometrisk-Brownsk bevegelse (2). For at verdsettingsproblemet skal fungere trengs et sannsynlighetsmål som må tilfredstille visse krav. Dette er langt svakere forutsetninger enn hva andre modeller krever, som betyr at opsjonsprising ved lineær programmering har potensial til å være et godt alternativ til etablerte prisingsmodeller.

1.2 Problemstilling

Oppgaven går hovedsakelig ut på å illustrere ulike opsjonsprisingsmodeller, med deres ulike forutsetninger og begrensninger. Det fokuseres på prising av opsjoner ved lineær programmering, som er en mindre kjent prisingsmodell enn Black-Scholes-modellen eller prising av opsjoner ved binære trær.

Den *primære* problemstillingen går i den sammenheng ut på å undersøke om prising av opsjoner ved lineær programmering er et godt alternativ til de etablerte modellene, samt å sammenlikne forutsetninger og begrensninger som ligger til grunn for de ulike modellene.

I den forbindelse dukker det også opp andre, *sekundære* problemstillinger. Det er kjent at Black-Scholes-modellen er en anvendelig modell som fungerer i praksis, men den har sine svakheter i spesielle tilfeller, og den beror på strenge forutsetninger. Noe som imidlertid er mindre kjent, er hvorvidt metoden for prising av opsjoner ved lineær programmering fungerer i praksis. Med numeriske eksempler kan dette undersøkes. Hvilke begrensninger kan prising av opsjoner ved lineær programmering eventuelt ha, sammenliknet med begrensninger for de andre modellene? Hvor anvendelig er modellen, og hvilket potensial har prising av opsjoner ved lineær programmering?

1.3 Struktur

Oppgaven er delt i inn i fem kapitler, og har følgende struktur:

- *Kapittel 1: Innledning.* Kapitlet presenterer oppgavens motivasjon, problemstilling, struktur og begrensninger.

- *Kapittel 2: Bakgrunn.* Kapitlet introduserer verdipapirmarkedet og grunnleggende begreper. Videre blir det gjennomgått nødvendig historie og teori omkring opsjoner, før de mest kjente opsjonsprisingsmodellene blir presentert. Det diskuteres hvorvidt de etablerte metodene for opsjonsprising er troverdige, som er bakgrunnen for presentasjonen av en alternativ metode, prising av opsjoner ved lineær programmering.

- *Kapittel 3: Metode.* Kapitlet forklarer prinsippet for lineær programmering, oppsettet for et lineært program, og teknikken for å løse et lineært program. Dette er nødvendig for å vise hvordan lineær programmering kan anvendes i opsjonsprising. Videre utarbeides en verdsettingsformel for opsjoner. Til slutt diskuteres metoden.

- *Kapittel 4: Eksperimenter.* Kapitlet inneholder fabrikkerte eksempler for hvordan man i praksis kan verdsette opsjoner ved lineær programmering. Dette vises først med tradisjonall regning, før det så vises at beregningene enklere kan gjøres av et dataprogram. Det modelleres for flere scenarier, noe som beviser at metoden er svært fleksibel.

- *Kapittel 5: Avslutning.* Kapitlet oppsummerer oppgaven, konkluderer, og foreslår videre arbeid.

1.4 Begrensninger

Da deler av teorien som er blitt brukt i kapittel 2 og 3 befinner seg på et høyt matematisk nivå, blir det enkelte steder referert til bevis, og heller fokusert på resultatet og anvendelsen av resultatet. Det har blitt prioritert å fokusere på forståelse og intuisjon, fremfor den tekniske utarbeidelsen.

Når det gjelder kapittel 4, er de fabrikkerte eksemplene svært begrensede, og kan også enkelt utvides. Dataprogram har bli brukt til dette, men for større og mer kompliserte modeller enn det som blir vist, kreves det bedre data- og programmeringskunnskaper enn hva undertegnede besitter.

Oppgaven er skrevet i det matematiske tekstbehandlingssystemet Scientif-ic Worklplace. Siden Universitetet i Bergen har den engelske studentversjonen av programmet, har det vært problemer med konvertering av norsk orddeling. Dette har resultert i at det foreligger noen snodige orddelinger mellom enkelte linjeskift. Det bes om at leseren ignorerer disse feilene, da undertegnede ikke har hatt noen mulighet til å påvirke dette.

Kapittel 2

Bakgrunn

Dette kapitlet er en innføring i grunnleggende teori og begreper som det er nødvendig å ha kjennskap til for å kunne sette seg inn prising av opsjoner. Kapitlet presenterer etablerte metoder for opsjonsprising, og fokuserer på disse metodenes forutsetninger og begrensninger. Dette genererer hensikten for presentere en annen metode, prising av opsjoner ved lineær programmering.[1] Kapitlet er delt inn i følgende, tre avsnitt:

- *Avsnitt 2.1* introduserer verdipapirmarkedet, og markedsplassen for omsetning av norske verdipapir, Oslo Børs. Her defineres de ulike verdipapirene som omsettes på børsen, og begrepene *lang* og *kort posisjon*.
- *Avsnitt 2.2* inneholder grunnleggende opsjonsteori. Avsnittet innledes med litt historie om opsjonenes innmarsj på verdipapirmarkedet, hvor det videre introduseres teori om kjøpopsjoner og salgopsjoner, som det er nødvendig å kjennskap til for å senere kunne verdsette dem. Så presenteres forskjellige egenskaper ved en opsjonskontrakt, og de ulike tilstandene en opsjon kan befinne seg i.
- *Avsnitt 2.3* er en gjennomgang av de mest kjente, og etablerte opsjonsprisingsmodellene. Hensikten med dette avsnittet, er å vise disse modellenes forutsetninger og begrensninger, som senere sammenliknes med metoden for lineær programmering..

2.1 Introduksjon av markedet

I 1818 fremmet den norske kjøpmannen Nicolay Andersen forslaget om å opprette en norsk børs. Norge var da en fiskeri- og landbruksnasjon, og det var vanskelige tider for økonomien. For å øke aktiviteten i næringslivet, ble det på Stortinget besluttet at man trengte en norsk børs, og opprettelsen ble etterhvert et faktum. Den norske børsen skulle være i landets daværende administrative sentrum, Christiania, og det var dette som gav grunnlaget for det som i dag heter *Oslo Børs* [18].

Oslo Børs er et ledd i det norske verdipapirmarkedet. Verdipapirmarkedet består av mange ulike aktører, blant annet investorer, børsnoterte selskaper,

[1] Kapittel 3, Metode.

meglere og lovgivende myndigheter. Man skiller mellom det *primære* og det *sekundære* verdipapirmarkedet. Utstedelse av nye verdipapir skjer i det primære markedet. Da blir foretaket tilført penger som typisk blir brukt til å foreta nye investeringer. Gjennom utstedelse av aksjer og obligasjoner i verdipapirmarkedet, kan prosjekter lettere finansieres fordi at risikoen spres på flere investorer, og aktørene har muligheten til å fordele inntekt og formue over tid. Omsetning av eksisterende verdipapir skjer i det sekundære markedet. Børsen har som oppgave å effektivt organisere handel av verdipapir mellom de ulike aktørene. Verdipapirmarkedet har flere gunstige samfunnsøkonomiske gevinster [3]:

- Effektiv formidling fordi at investor låner direkte til låntaker uten å gå via andre finansielle institusjoner.
- Konkurranse fører til at bare de beste prosjektene blir finansiert.
- Risikoreduksjon og sikrere sparing for dem som har overskudd på midler. Ansvarsfordeling mellom investorer.

En annen viktig funksjon med verdipapirmarkedet, er at den økonomiske virksomheten til et børsnotert foretak kan verdsettes ved å se på børsverdien til foretaket [11].

2.1.1 Ulike verdipapir

På børsen tilbys det aksjer og grunnfondsbevis, obligasjoner, derivater, og warrants. De er alle verdipapir med forskjellige rettigheter. Det finnes hovedsakelig tre typiske årsaker til å investere i verdipapir [11]:

(1) Risikostyring.

(2) Spekulasjon.

(3) Utnyttelse av arbitrasjemuligheter.

For det første, kan investeringen gjøres for å øke eller redusere risikoen i en portefølje. Dette gjøres ved å analysere korrelasjoner mellom porteføljen man holder og verdipapiret. Dersom en investering i verdipapiret reduserer risikoen til porteføljen, kan investeringen bli sett på som en forsikring. Tilsvarende kan risikoen økes. *For det andre,* kan investeringen gjøres på grunnlag av spekulative årsaker. Dersom investoren har en annen formening om verdipapirets utvikling enn markedet, kan han tjene penger om det viser seg at hadde har rett. *For det tredje*, kan investoren være på jakt etter arbitrasjemuligheter. Arbitrasjehandlere vil raskt utnytte feilprising i markedet, og kan tjene mye penger på en slik mulighet. Markedet kommer snart i likevekt etter en arbitrasjemulighet, på grunn av kort reaksjonstid hos arbitrasjehandlere.[2]

En *aksje* er en fast eierandel i et selskap. Eierne av aksjer i et selskap, *aksjonærene*, har visse eierrettigheter. De kan ha rett til å tegne nye aksjer ved *emisjon,* det vil når selskapet utvider sin aksjekapital, og de kan ha forkjøpsrett når en allerede eksisterende aksje skifter eier. Alle aksjene i et selskap skal ha samme verdi. Siden selskapets verdi vil endre seg over tid, avhengig om det tjener eller taper penger, varierer også verdien av aksjen. Dersom selskapet går

[2] Antakelser omkring arbitrasje vil bli grundigere gjennomgått i kapittel 2.3.

med overskudd, har aksjonærene rett på *utbytte* (dividend). Hver aksje gir da rett til samme andel av det utbetalte overskuddet. Unntaket er i selskap hvor aksjene er delt inn i forskjellige klasser. Innehaverne av aksjer av høyere klasse har større rettigheter enn innehaverne av aksjer av lavere klasse, og de kan for eksempel bestemme at kun innehaverne av høyere klasse har rett til utbetaling av utbytte.

Et *grunnfondsbevis* kan sammenlignes med en aksje. Forskjellen er at et grunnfondsbevis har begrensede eierrettigheter og innflytelse i bankens organer, og har restriksjoner med hensyn til utbyttet. Kun sparebanker kan utstede grunnfondsbevis.

En *obligasjon* (bond) er et rentebærende gjeldsbrev som sier at utsteder skylder innehaveren penger. Kontrakten går ut på at utstederen av obligasjonen skal betale bestemte summer til innehaveren, fram til et bestemt forfallstidspunkt. Utstedere av obligasjoner er som regel banker, kommuner, og store aksjeselskap. Obligasjoner kan i det sekundære markedet fritt kjøpes og selges til en gitt pris. For store selskap som skal ta opp et stort lån, kan det være lettere å dele opp lånet hos ulike kilder enn å ta opp ett banklån med fast rente.

Et *derivat* kan defineres som en kontrakt på et underliggende aktiva. Det underliggende aktivaet kan være et annet verdipapir, typisk en aksje eller en obligasjon, men det kan også være en råvare, valuta, eller et annet derivat. Verdien på derivatet er dermed avhengig av verdien på det underliggende aktivaet. Innehaveren av et derivat vil ikke motta utbytte, som ved en aksje. Et derivat kan konstrueres på flere ulike måter, og dermed utlede forskjellige kontantstrømmer. To av de vanligste kontraktene er terminkontrakter og opsjoner.

En *terminkontrakt* er en avtale om kjøp eller salg på et aktiva til et bestemt tidspunkt i fremtiden, til en forhåndsdefinert pris. Det finnes hovedsakelig to typer terminkontrakter, *forward*- og *futureskontrakter*. For en forwardkontrakt faller oppgjøret på samme dagen som forfallsdagen på kontrakten. Den forhåndsdefinerte prisen kalles for *forwardprisen*, og tidsperioden fra kontrakten inngås til forfall utgjør kontraktens løpetid. Verdien av en forwardkontrakt er da avhengig av prisendringene i kontraktens underliggende aktiva. Ved prisendring av det underliggende aktivaet vil det oppstå en gevinst- og tapsposisjon mellom de to partene i kontrakten. For en futureskontrakt vil det være daglige oppgjør. Det vil si at verdien av kontrakten fastsettes til dagens markedsverdi, og gjøres opp ved at det daglig foretas betalinger mellom partene.

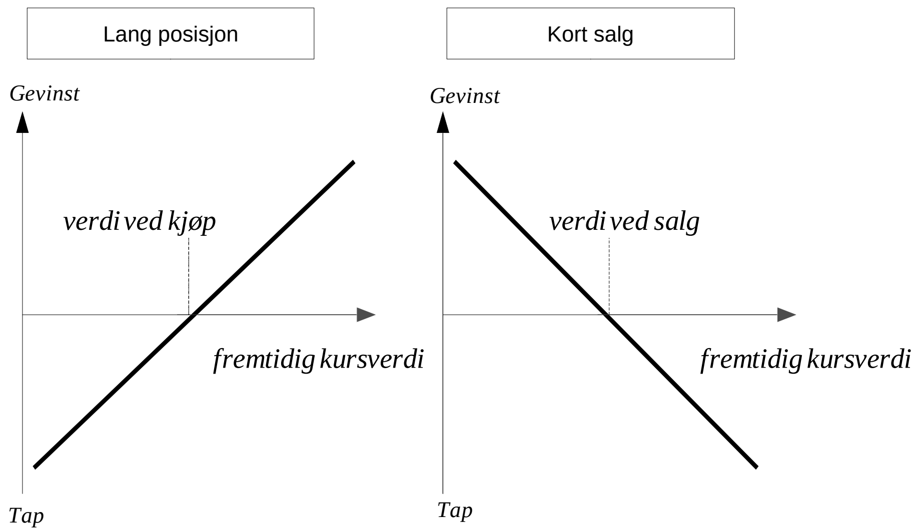
En *opsjon* kan defineres som en rett til å handle et underliggende aktiva til en fastsatt pris, innløsningsprisen, innen et bestemt tidspunkt i fremtiden. Dette tidspunktet kalles for *bortfall*. En opsjon skiller seg fra terminkontrakten ved at det ikke er noen bindende avtale for innehaveren. Kapittel 2.2 vil handle spesifikt om opsjonsteori, da oppgaven ellers hovedsakelig dreier seg om prising av slike opsjoner.

En *warrant* kan sammenlignes med en opsjon, men kan noteres som et verdipapir på børs. Warranter har typisk lenger levetid enn opsjoner, og de kan utstedes av foretak eller finansinstitusjoner. Innehaveren av en warrant vil, som ved derivater generelt, ikke motta utbytte, og verdien av warranten vil dermed falle hver gang utbytte utbetales til aksjonærene.

2.1.2 Lang og kort posisjon

Kjøperen av et verdipapir forventer gjerne at verdipapiret skal stige i verdi. Det vil si at gevinstpotensialet i prinsippet er uendelig, avhengig av hvor mye kursen stiger. Tilsvarende er muligheten for tap begrenset, da man kun kan tape det man faktisk har betalt for verdipapiret. Et kjøpt verdipapir kalles for en *lang posisjon*.

Dersom man derimot mistenker at verdipapiret skal synke i verdi, er det mulig å «shorte». *Kort salg,* som det heter på norsk, er å selge et verdipapir som man ikke eier. Dette kan gjennomføres ved at man låner et verdipapir, og selger det videre til dagens kurs. Dersom kursen på verdipapiret synker i verdi, er det mulig å kjøpe det tilbake igjen til en lavere pris. Her er altså gevinstpotensialet begrenset, da et verdipapir ikke kan få en negativ verdi, mens det kan føre til et stort tap om kursen stiger.



Figur 2.1: Lang posisjon og kort salg.

2.2 Opsjoner

En *kjøpsopsjon* (call option) gir eieren rett til å kjøpe et underliggende aktiva, til et bestemt tidspunkt i fremtiden for en bestemt pris. Tilsvarende gir en *salgsopsjon* (put option) eieren rett til å selge det. Det finnes to parter i en opsjonsavtale, den som *kjøper* rettigheten, og den som *selger* rettigheten. Kjøperen av opsjonsavtalen kaller man for *innehaveren* av opsjonen. Med en opsjon er det mulig å sikre seg mot uønsket prisutvikling, samtidig som det er mulig å være med på en eventuell gunstig utvikling. Dette gjøres ved at risikoen gis til dem som er villige til å påta seg risikoen.

2.2.1 Historie

Kontrakter som ligner på derivater har foregått i verden i lang tid. Både i Bibelen og i verkene til Aristoteles nevnes det avtaler som går ut på å fastsette en pris på forhånd, til et bestemt tidspunkt i fremtiden. Slike kontrakter har gjennom historien vært brukt i handel i Asia og Europa, men det var i USA at opsjonshandel fikk sitt største gjennombrudd. *The Chicago Board of Trade* (1848) ble etablert for at bønder og handelsmenn kunne finne sammen, slik at landbruksnæringen skulle ha større fleksibilitet og bedre risikohåndtering. Videre ble *Chicago Produce Exchange* startet opp i 1874, og det ble mulig å handle med en rekke landbruksprodukter, og tidlig på 1900-tallet gikk bedrifter sammen for å etablere *The Put and Call Brokers Association* som formidlet kontakten mellom kjøper og selger. Senere ble aksjeopsjoner populært på Wall Street, og i 1973 ble *Chicago Board Options Exchange* opprettet som egen markedsplass for å håndtere opsjoner [8].

I Europa var børsene i Amsterdam og London først ute, og utover på 70- og 80-tallet utviklet det seg en omfattende handel med opsjoner og terminer. I 1985 introduserte svenskene derivathandel på børsen i Stockholm, og var med dette de første i Skandinavia. Det ble en stor suksess, og derivathandel på Stockholmbørsen er i dag blant de mest likvide i Europa [19].

Oslo Børs startet handel med opsjoner på aksjer i 1990. I 1997 gjennomførte børsene i Oslo, Stockholm og London verdens første sammenkobling av uavhengige børser, og for det norske derivatmarkedet innebar dette en omlegging fra manuell til elektronisk handel. Det åpnet seg også muligheten til å utvide antall underliggende produkter, og i 2004 ble handel av derivater på tvers av landegrensene ytterligere forenklet. Som fortalt innledningsvis, skjedde det fra 2005 til 2006 en fordobling av derivatkontraktene på det norske markedet [19].

2.2.2 Kjøpsopsjoner

For rettigheten på en kjøpsopsjon (lang posisjon) betaler eieren en premie. Motivasjonen for å kjøpe en kjøpsopsjon er som ved verdipapir generelt; man gjør det for å styre risiko, eller for å tjene penger. Dersom man forventer at kursen på det underliggende aktivaet skal stige i verdi, er en kjøpsopsjon en mulighet til å tjene penger. Innehaver kan altså velge å benytte seg av rettigheten til å kjøpe det underliggende aktivaet, dersom kursen har steget høyere enn innløsningskursen. Tilsvarende kan han velge å ikke benytte seg av rettigheten dersom kursen synker. Ved å kjøpe en kjøpsopsjon har man altså mulighet for å tjene mye penger, avhengig av kursstigningen, mens man ikke kan tape mer enn det man betalte for kjøpsopsjonen, det vil si premien dersom man ikke velger å benytte seg av rettigheten. Dette er et eksempel på risikostyring, å forsikre seg mot eventuelle tap.

Definisjon 2.1 (Kjøpsopsjon, lang posisjon) *Når S_τ er verdien av det underliggende ved bortfall τ, mens K_τ er innløsningskursen, kan utbetalingen av en kjøpsopsjon fra en lang posisjon C_t^l ved tid t uttrykkes:*

$$C_t^l := \max_{\tau \in T(t)} \{S_\tau - K_\tau, 0\}$$

når $t \in \{0, ..., T\}$, $T(t) \subseteq \{0, ..., t\}$ og $\tau \in \mathbb{T} \subseteq \{0, ..., T\}$.[3]

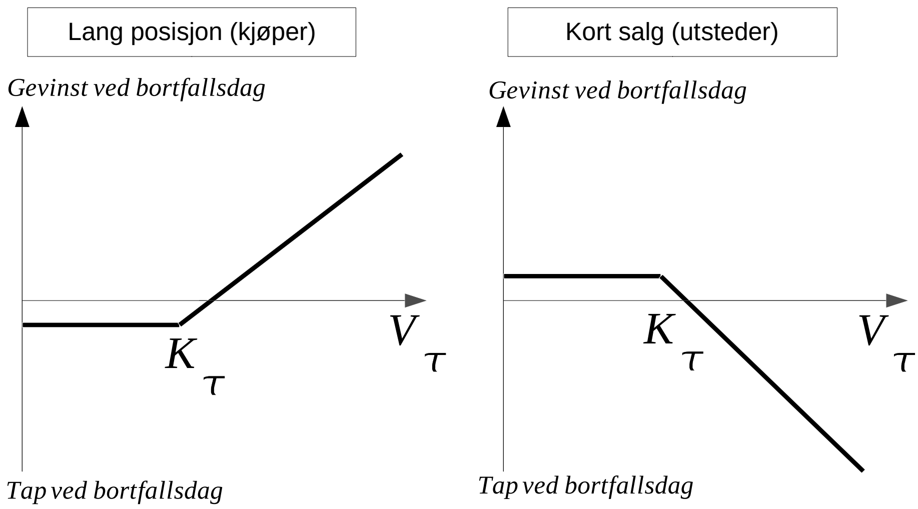
[3] Tidspunktene er avhengige av vilkårene i opsjonskontrakten. Se kapittel 2.2.4.

Selgeren av kjøpsopsjonen (kort salg) kan i prinsippet tape svært mye om kursen stiger, men han har begrensede gevinstmuligheter i form av premien dersom kjøperen ikke velger å innløse opsjonen. Til tross for begrenset gevinstpotensial og uante tapsmuligheter, finnes det imidlertid flere hensikter med å dele ut kjøpsopsjoner. En av hensiktene kan være at utsteder ikke forventer at kursen på det underliggende aktivaet skal stige over opsjonens løpetid. En annen og ganske vanlig hensikt, er bruk av *personalopsjoner som avlønning*. Bedrifter kan tildele kjøpsopsjoner til sine ansatte, særlig ledere, ofte med aksjekursen som innløsningskurs. Det knytter på denne måten avlønningen til de ansattes innsats, ved at opsjonen blir mer verdt om aksjekursen stiger. Dette er i disse dager et omdiskutert tema, på grunn av at aksjekursen også påvirkes av flere andre faktorer, blant annet konjunkturer i markedet. Ledere med personalopsjoner i Statoil/Hydro kunne tidligere i år hente ut store summer fra sine opsjonsavtaler, og det ble hevdet at utbetalingen snarere var knyttet til en konjunkturøkning enn de ledernes innsats.

Definisjon 2.2 (Kjøpsopsjon, kort salg) *Når S_τ er verdien av det underliggende ved bortfall τ, mens K_τ er innløsningskursen, kan utbetalingen av en kjøpsopsjon ved kort salg C_t^s ved tid t uttrykkes:*

$$C_t^s := -\max_{\tau \in T(t)} \{S_\tau - K_\tau, 0\} := \min_{\tau \in T(t)} \{K_\tau - S_\tau, 0\}$$

når $t \in \{0, ..., T\}$, $T(t) \subseteq \{0, ..., t\}$ *og* $\tau \in \mathbb{T} \subseteq \{0, ..., T\}$.



Figur 2.2: Utbetaling ved en kjøpopsjon, for lang posisjon eller kort salg.

2.2.3 Salgsopsjoner

Som ved å kjøpe rettigheten på kjøpsopsjoner, betales også en premie for å kjøpe rettigheten for salgsopsjoner (lang posisjon). Ved en salgsopsjon har innehaveren rett til å selge et underliggende aktiva til en avtalt pris ved bortfall.

Motivasjonen bak å kjøpe rettigheten på salgsopsjoner er at man forventer at aksjekursen på det underliggende aktivaet skal falle. Dersom kursen synker lavere enn innløsningskursen kan innehaveren benytte seg av rettigheten til å selge det underliggende aktivaet til enn høyere pris enn børskursen. Dersom kursen stiger, velger innehaveren å ikke benytte seg av rettigheten, og han har kun tapt premien han har betalt for opsjonsavtalen.

Definisjon 2.3 (Salgsopsjon, lang posisjon) *Når V_τ er verdien av det underliggende ved bortfall τ, mens K_τ er innløsningskursen, kan utbetalingen av en salgsopsjon fra en lang posisjon P_t^l ved tid t uttrykkes:*

$$P_t^l := \max_{\tau \in T(t)} (K_\tau - V_\tau, 0)$$

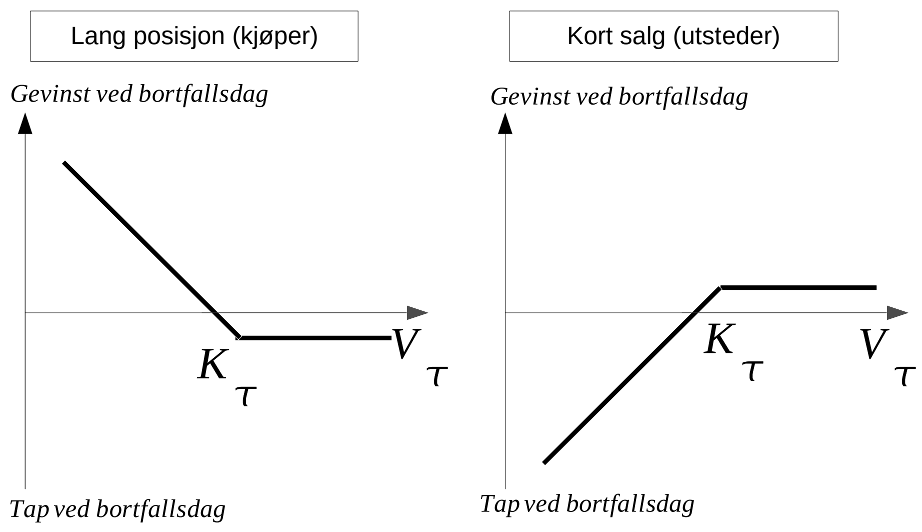
når $t \in \{0, ..., T\}$, $T(t) \subseteq \{0, ..., t\}$ og $\tau \in \mathbb{T} \subseteq \{0, ..., T\}$.

Utsteder av en salgsopsjon (kort salg) forventer gjerne at kursen skal holde seg stabil, eller stige litt. Kjøperen av salgsopsjonen velger da å ikke innløse, og utsteder har da tjent premien som kjøperen betalte for rettigheten. Utsteder har, som ved kort salg generelt, begrenset gevinstpotensial og ubegrensede tapsmuligheter.

Definisjon 2.4 (Salgsopsjon, kort salg) *Når V_τ er verdien av det underliggende ved bortfall τ, mens K_τ er innløsningskursen, kan utbetalingen av en salgsopsjon ved kort salg P_t^l ved tid t uttrykkes:*

$$P_t^l := -\max_{\tau \in T(t)} (K_\tau - V_\tau, 0) := \min_{\tau \in T(t)} (V_\tau - K_\tau, 0)$$

når $t \in \{0, ..., T\}$, $T(t) \subseteq \{0, ..., t\}$ og $\tau \in \mathbb{T} \subseteq \{0, ..., T\}$.



Figur 2.3: Utbetaling ved en salgsopsjon, for lang posisjon eller kort salg.

2.2.4 Egenskaper

Det finnes flere typer opsjoner, for eksempel europeiske opsjoner, amerikanske opsjoner, og bermudaopsjoner. Det finnes forskjellige egenskaper ved disse opsjonstypene. Man kan skrive følgende sammenhenger [2]:

- Opsjonen er *europeisk* dersom $T(t) = \{t\}$ og $\mathbb{T} = \{T\}$.
- Opsjonen er *amerikansk* dersom $T(t) = \{t\}$ og $\mathbb{T} = \{0, ..., T\}$.
- Opsjonen er *bermudansk* dersom $T(t) = \{t\}$ og $\mathbb{T} \subset \{0, ..., T\}$.

Mer intuitivt betyr dette at de europeiske opsjonene bare kan løses inn ved den bestemte bortfallsdatoen. De amerikanske opsjonene har en litt annen egenskap, de kan bli innløst på ethvert tidspunkt til og med bortfallsdagen. Det vil si at det finnes flere valgmuligheter ved de amerikanske opsjonene enn de europeiske opsjonene, noe som følge elementær finansteori skulle tilsi at en amerikansk opsjon er verdt like mye, eller mer enn de europeiske opsjonene. En bermudaopsjon er en amerikansk opsjon med begrensninger. Bermudaopsjonen kan også løses inn før bortfallsdagen, men kun på bestemte tidspunkter. En annen form av bermudaopsjonen er en asiatisk opsjon. Den asiatiske opsjonens utbetaling avhenger av det underliggende aktivaets gjennomsnittlige kursutvikling over en bestemt tidsperiode.

En *compound-opsjon* er en opsjon på en annen opsjon, hvor det dermed er to innløsningskurser, og to bortfallsdatoer. Det finnes såkalte *chooser-opsjoner*, hvor innehaver har muligheten til å velge om opsjonen skal være en kjøps- eller salgsopsjon. Ellers finnes det *barriere-opsjoner*, som avhenger om det underliggende aktivaet oppnår et visst nivå; *knock-in-opsjoner* som trer i kraft etter at det underliggende aktivaet har oppnådd barrieren, og *knock-out-opsjoner* som faller bort ved barrieren. Som nevnt er alle disse ulike opsjonstypene egenskaper ved opsjonavtalen, og det har ingenting å si hvor de geografisk sett blir omsatt.

2.2.5 Posisjoner

Når en opsjon befinner seg i en slik posisjon at den har realverdi, sier vi at den er *in-the-money*. For eksempel: En lang posisjon i en kjøpsopsjon er in-the-money om kursen på det underliggende aktivaet er høyere enn innløsningskursen. Verdien på kjøpsopsjonen er altså positiv for kjøperen. Motsatt er det når opsjonen er uten realverdi. For en lang posisjon i en kjøpsopsjon vil det si når innløsningskursen er høyere enn børskursen. Da sier vi at den er *out-of-the-money*. Når innløsningskursen er tilnærmet lik børskursen, er den *at-the-money*.

2.3 Kjente prisingsmodeller

Et kjøp av en opsjonskontrakt innebærer at man betaler en pris for rettigheten til å kjøpe eller selge et underliggende aktiva, til en forhåndsbestemt pris på et avtalt tidspunkt i fremtiden. Prisen som kjøperen betaler i dag, blir gitt av fremtidsutsiktene til det underliggende aktivaet. Opsjonsprisen er altså avhengig av informasjonen som er tilgjengelig om den fremtidige verdiutviklingen til det underliggende aktivaet, og hvordan man representerer verdiutviklingen.

Jeg vil i dette avsnittet fokusere på to modeller som på hver sin måte kan representere verdiutviklingen til et underliggende aktiva; *den diskrete modellen* og *den kontinuerlige modellen*. Den diskrete modellen representeres ved et scenariotre, som har et begrenset antall tilstander, og hvor det kun er mulig å innløse ved bestemte tidspunkter. Den kontinuerlige modellen har færre begrensninger, men har derimot strengere forutsetninger. Begge modellene avhenger av en spesiell forutsetning, antakelsen om fravær av arbitrasje. En *arbitrasjemulighet* kan defineres som en gevinstmulighet, samtidig som man kan være helt sikker på å ikke tape noe.

Forutsetning 2.1 (Arbitrasjeprising) *Prising av opsjoner gjøres på grunnlag av antakelsen om fravær av arbitrasje.*

Når man har likevekt i verdipapirmarkedet, kan det ikke eksistere arbitrasjemuligheter [11]:

Setning 2.1 *Arbitrasjemuligheter er uforenelig med likevekt i verdipapirmarkedet.*

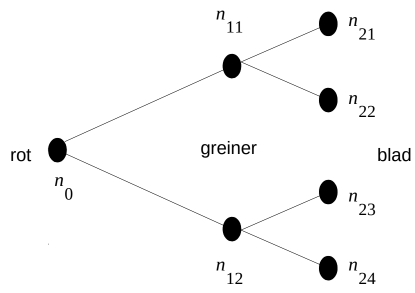
Bevis. En arbitrasjemulighet kan oppstå ved feilprising i markedet, det vil si når markedet ikke er i likevekt. Man sier at verdipapirmarkedet er i likevekt når ingen aktører i dette markedet har incentiv til å endre adferd. Ved arbitrasje i verdipapirmarkedet vil flere aktører benytte seg av muligheten til tjene penger, som betyr at de har incentiv til å endre adferd. Dette er uforenelig med et verdipapirmarked i likevekt. ■

For at verdipapirmarkedet skal være i likevekt, må alle aktørene i dette markedet ha tilgang til samme informasjon om priser. Man antar at dette stort sett er gjeldende, bortsett fra i spesielle tilfeller da enkelte aktører reagerer raskere på ny informasjon enn andre aktører. I slike tilfeller kan det oppstå arbitrasjemuligheter, men mulighetene elimineres raskt etterhvert som informasjonen blir tilgjengelig for alle aktører, og markedet går inn i en ny likevekt. Å anta fravær av arbitrasje på grunnlag av at markedet stort sett er i likevekt er derfor en rimelig forutsetning.

Eksempel 2.1 (Arbitrasjemulighet) *Anta at prisen på et gitt aktiva er lavere på en markedsplass i verden, enn et annet sted. Da vil arbitrasjehandlere raskt utnytte denne muligheten til sin egen fortjeneste. For å profittere på feilprising er det nødvendig å sette inn et stort beløp raskest mulig, fordi at feilprisingen oftest er marginal når transaksjonskostnader er tatt i betraktning, og tidsrommet for feilprisingen er kort.*

2.3.1 Diskret opsjonsprising

Man kan betrakte utviklingen av opsjonens verdi som et binært tre. Teorien som følger er basert på modellen som Cox, Ross, og Rubinstein utledet i 1979 [1], [7]. Tankegangen bak det binære treet for prising av opsjoner, er at kursen på det underliggende aktivaet går enten *opp* eller *ned*. Man konstruerer et binært tre, hvor det for hver tilstand finnes to greiner. De første tilstanden i treet, kaller man treets rot, og de siste er treets blader. Roten, greinene, og bladene utgjør treets *noder,* og det er kun i disse tilstandene man kan verdsette opsjonen (diskret modell). Motivasjonen for den diskrete modellen er å finne ut hvordan verdien



Figur 2.4: Binært tre.

av opsjonen på aktivaet utvikler seg i det samme treet. En underliggende forutsetning for denne modellen, er at verdiutviklingen følger en såkalt *random-walk prosess*. Random-walk-teorien går ut på at fremtidig kursutvikling er uavhengig av tidligere kursutvikling, og det er dermed umulig å beregne priser ut i fra historiske analyser.

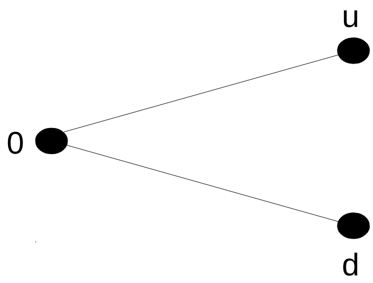
Forutsetning 2.2 (Random-walk) *Fremtidig kursutvikling er uavhengig av historisk kursutvikling.*

Random-walk er konsistent med antakelsen om fravær av arbitrasje: Det ville ha vært mulig å tjene bedre enn markedet ved bruk av historiske data i fremtidig prisspekulasjon. Dermed ville det ha vært en arbitrasjemulighet, hvilket man antar ikke er tilfelle [7].

Prinsippet for prising av opsjoner i den diskrete modellen er ganske enkel: Man konstruerer en risikofri portefølje bestående av opsjonen, og dens underliggende aktiva. Videre vet man, ved antakelsen om fravær av arbitrasje, at avkastningen på denne porteføljen ikke kan være bedre enn den risikofrie renten. Setter man opp en likning for dette, kan man løse ut for opsjonsprisen.

Ett-stegs-modellen

Jeg starter med å presentere *ett-stegs-modellen*, det vil si når man fokuserer på endringer over *en periode*. For enkelthets skyld antar man at det underliggende aktivaet til opsjonen, er en markedsomsatt aksje. Man definerer aksjeprisen i dag som V_0, og at denne aksjeprisen enten kan stige (u) eller synke (d) til neste periode. Hvis kursen stiger vil den nye prisen bli V_0u, hvor $u > 1$ (up). Avkastningen på opsjonen kaller man da for f_u. Tilsvarende vil aksjeprisen bli V_0d, hvor $d < 1$ (down) dersom kursen synker, og avkastningen på opsjonsavtalen blir da f_d. Som nevnt ovenfor, konstruerer man en portefølje av aksjen og opsjonen, for å finne opsjonsprisen. Man forestiller seg en lang posisjon med Δ andeler av aksjen, og en kort posisjon av opsjonen. Andelen Δ må tilpasses slik at porteføljen blir risikofri. Man vet da at dersom kursen på aksjen stiger, vil verdien av porteføljen bli $V_0u\Delta - f_u$, mens dersom kursen på aksjen synker, vil verdien av porteføljen bli $V_0d\Delta - f_d$. Når $V_0u\Delta - f_u = V_0d\Delta - f_d$ er porteføljen risikofri, og avkastningen på porteføljen må være lik den risikofrie renten. For at likningen skal stemme, må andelen Δ av den underliggende aksjen være tilpasset



Figur 2.5: Binært tre, en periode.

slik at:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{V_0 u - V_0 d} \tag{2.1}$$

Man observerer at Δ er forholdet mellom endringen i opsjonsprisen og endringen i aksjeprisen mellom de to mulige utfallene over den ene perioden.

Dersom man definerer den risikofrie renta som r over perioden T, kan vi uttrykke nåverdien av porteføljen som $(V_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$. Kostnaden for å opprette porteføljen er gitt ved $V_0\Delta - f$. Ved antakelsen om fravær av arbitrasje, har man da at $V_0 - f = (V_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$. Løser man for opsjonspremien f, får man $f = V_0\Delta(1 - ue^{-rT})e^{-rT}$. Innsatt for andelen Δ som gir en risikofri portefølje, får man:

$$f = e^{-rT}\left[(\frac{e^{rT} - d}{u - d})f_u + (1 - \frac{e^{rT} - d}{u - d})f_d\right] \tag{2.2}$$

Man har dermed funnet et uttrykk for opsjonsverdien i ett-stegs-modellen. Det er verdt å merke seg at denne opsjonsprisingsformelen ikke inkluderer *sannsynlighetene* for at aksjeprisen skal gå opp eller ned. Dersom sannsynligheten for en prisstigning på aksjen er 0.1 eller 0.9, får vi altså den samme opsjonsprisen. Dette kan virke overaskende, men det har en ganske enkel forklaring: Sannsynlighetene for en fremtidig prisstigning eller prisfall er allerede tatt med i prisen på det underliggende aktivaet. Man trenger ikke å ta de med i beregningene igjen. Det er naturlig å anta dette, fordi at dersom sannsynligheten for en prisstigning på aksjen øker, øker også aksjeprisen.

Man kan imidlertid bruke p som et mål på sannsynligheten for at en prisstigning forekommer. Tilsvarende blir $(1 - p)$ sannsynligheten for et prisfall.

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{2.3}$$

Dette forenkler uttrykket for opsjonsverdien:

$$f = e^{-rT}\left[pf_u + (1 - p)f_d\right] \tag{2.4}$$

Man kan videre utlede forventet avkastning for opsjonen:

$$E(f) = pf_u + (1 - p)f_d \tag{2.5}$$

og på samme måte utlede den forventede avkastningen på aksjen:

$$\begin{aligned} E(V_T) &= pV_0u + (1-p)V_0d \\ &\Updownarrow \\ E(V_T) &= pV_0(u-d) + V_0d \end{aligned} \quad (2.6)$$

Setter man så inn for p igjen, får man at:

$$\begin{aligned} E(V_t) &= (\frac{e^{rT}-d}{u-d})V_0(u-d) + V_0d \\ &\Updownarrow \\ E(V_t) &= (e^{rT}-d)V_0 + V_0 + V_0d \\ &\Updownarrow \\ E(V_t) &= V_0(e^{rT}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Det viser seg altså at aksjeprisen vokser gjennomsnittlig som den risikofrie renta. Å sette sannsynligheten for en prisstigning lik p som i likning 2.3, er dermed ekvivalent med å anta at aksjeprisens avkastningsrate er lik den risikofrie renta. Man vet at alle individ i en risikofri verden er indifferent til risiko, det vil si at investorene ikke krever noen kompensjon for risiko. Den forventede avkastningen for alle prosjekt er dermed lik den risikofrie renta, og setter man sannsynligheten for en prisstigning lik p i den binære modellen, er dette det samme som å anta en risikofri verden.

Resultatet beviser et fundamentalt prinsipp i opsjonsprising, *risikonøytral verdsetting*. Prinsippet går ut på at man kan anta en risikonøytral verden når man priser opsjoner. Prisene man får ved risikonøytral verdsetting stemmer ikke bare i en risikonøytral verden, men også i den virkelige verden uten arbitrasjemuligheter [7]. Prising av opsjoner ved antakelsen om fravær av arbitrasje, og risikonøytral prising gir dermed samme svar.

Teorem 2.1 (Risikonøtral verdsetting) *Eksistens av risikojusterte sannsynligheter, er ekvivalent med fravær av arbitrasje.*

Dette teoremet utdypes nærmere ved lineær programmering i kapittel 3.[4] Man har entydige risikojusterte sannsynligheter dersom man har fullstendige finansmarkeder (complete markets). Ved fullstendighet kan man opprette et elementært verdipapir for alle mulige tilstander i markedet. Et *elementært verdipapir* er et verdipapir e_j som har verdien 1 i tilstand j, og 0 i alle andre tilstander. Ved fullstendige finansmarkeder er finnes det like mange verdipapir i markedet, som antall mulige tilstander [11].

Teorem 2.2 (Entydighet) *Et entydig risikojustert sannsynlighetsmål er avhengig av et fullstendig marked.*

Bevis. Anta at $p = (p_j) \neq (p'_j) = p'$ er risikojusterte sannsynligheter for tilstandene S for verdipapirene I. Det finnes da en tilstand $j \in J$, slik at $p_j \neq p'_j$. Ved fullstendighet finnes det et elementært verdipapir for tilstand j, e_j (med verdi 1 i tilstand j, og 0 ellers). Siden p_j og p'_j er risikojusterte sannsynligheter, får man motsigelsen:

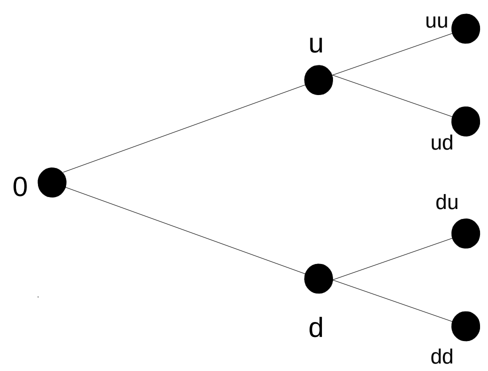
$$\delta p_j = \delta E_p[V_{e_j}] = V_{e_j 0} = \delta E_{p'}[V_{e_j}] = \delta p'_j$$

hvor δ er den sikre diskonteringsraten. Det vil si at $p = p'$. ■

[4] Se Teorem 3.2, Det fundamentale prisingsteoremet.

Modeller med flere steg

Ett-stegs-modellen kan enkelt utvides til flere steg. Først ser man på situasjonen med to steg. Som tidligere er den initielle aksjeprisen V_0. I hver tilstand i modellen, kan aksjeprisen enten gå opp eller ned. Man antar videre at renta r er



Figur 2.6: Binært tre, to perioder.

risikofri, og definerer lengden av perioden som Δt. Med tiden Δt for en periode, kan man skrive om likningene 2.3 og 2.4:

$$p = \left(\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\right) \tag{2.8}$$

$$f = e^{-r\Delta t}\left[pf_u + (1-p)f_d\right] \tag{2.9}$$

Dette er altså utrykket for opsjonsprisen i den første perioden. Tilsvarende kan man finne uttrykkene for opsjonsprisene i de neste periodene, det vil si når prisen i den første perioden enten har gått opp eller ned:

$$f_u = e^{-r\Delta t}\left[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}\right] \tag{2.10}$$

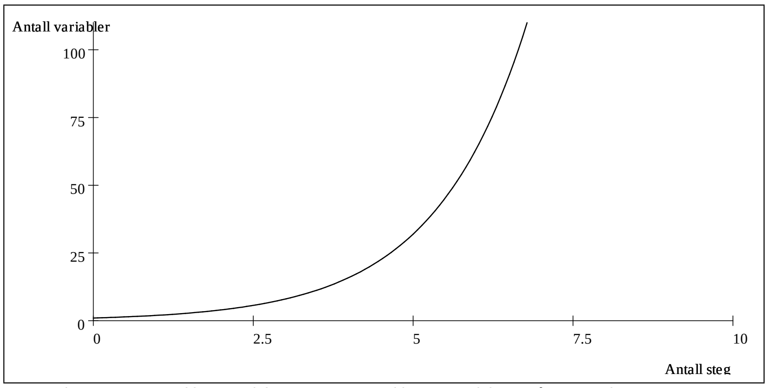
$$f_d = e^{-r\Delta t}\left[pf_{du} + (1-p)f_{dd}\right] \tag{2.11}$$

Setter man likning 2.10 og 2.11 inn i likning 2.9, finner man opsjonsprisingsformelen for situasjonen med to steg.

$$f = e^{-2r\Delta t}\left[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}\right] \tag{2.12}$$

Som i ett-stegs-modellen, er dette konsistent med prinsippet om risikonøytral verdsetting. Tilsvarende kan man utvide til flere steg, og prinsippet vil fortsette å holde. Opsjonsprisen vil alltid bli lik sin forventede avkastning i scenariet med den risikofrie renta i en risikonøytral verden. Ved å utvide på denne måten kan man få så mange tilstander som man vil, og dette er derfor en ganske fleksibel metode for verdsetting av opsjoner. Dersom man utvider til flere steg, vil imidlertid utrykket bli svært komplisert, og inneholde veldig mange variabler. Antall variabler vil ha en eksponentiell utvikling for antall steg i modellen, og vil bli så mange at det kan bli tungvint å løse.

Eksempel 2.2 (Flere steg i et binært tre) *Med 5 steg i den binære modellen må vi ta hensyn til 32 aksjepriser,* $2^5 = 32$*. Med 10 steg må vi ta hensyn over 1000 aksjepriser,* $2^{10} = 1024$*.*



Eksponentiell utviklinig i antall variabler, for et binært tre.

I ett-stegs-modellen hadde man at delta Δ, er andelen man skal holde i aksjen for at porteføljen av opsjonen og aksjen skal være risikofri. Dette er også gjeldende i modeller ved flere steg, men denne vil endre seg fra tilstand til tilstand. Fra likning 2.1 observerer man at den er avhengig av den informasjonen som er tilgjengelig om opsjonsprisen og aksjeprisen i den tilstanden man befinner i, og må dermed tilpasses etter dette. For å holde en risikofri portefølje av opsjonen og dens underliggende aksje, må man altså justere andeler i aksjen for hver periode, når ny informasjon avsløres. Dette kalles for *delta-hedging*.

Flere tilstander

Som konsekvens av antakelsen om fravær av arbitrasje, risikonøytral verdsetting fra teorem 2.1, og entydighetsprinsippet ved teorem 2.2, har man at opsjonprisen skal bli entydig bestemt fra verdiene til det underliggende verdipapiret og den sikre renten. Uavhengig av preferanser, risikoholdninger, sannsynligheter, og så videre, er alle enige om verdsetting av slike opsjoner, og man har en entydig opsjonspris. Dette er utledet for det *binære* tilfellet.

Når man står ovenfor en modell av samme type, men med flere tilstander, viser det seg imidlertid at en entydig opsjonspris ikke nødvendigvis lenger er tilfelle. Modellen er riktignok ikke lenger binær, men har alle de andre nødvendige forutsetningene fra tidligere. For å kunne verdsette opsjoner for modellen med flere enn to tilstander må man ha mer informasjon for å kunne bestemme de risikojusterte sannsynlighetene som gir oss opsjonsprisen. Det finnes hovedsakelig to måter å finne opsjonsprisen på, dersom det er flere tilstander:

(1) For å finne de risikojusterte sannsynlighetene må det være like mange verdipapir i markedet som antall tilstander. Med et underliggende verdipapir og et sikkert verdipapir i marked, er det totalt to verdipapir. For den binære modellen var det to tilstander. Dette tilfredstiller kravet om et fullstendig marked, hvor antall verdipapir i markedet skal være lik antallet tilstander. Med flere tilstander i markedet, trengs også flere underliggende verdipapir, slik at markedet opprettholdes fullstendig. Med flere tilstander enn antall verdipapir, får man et verdsettingsproblem med flere mulige løsninger, fordi at man får flere sannsynlighetsmål. Man har da ikke lenger noen entydig opsjonspris.

(2) En annen måte å finne de risikojusterte sannsynlighetene på, er å implementere investorenes nyttefunksjoner [11]. Å modellere investorers nytte-

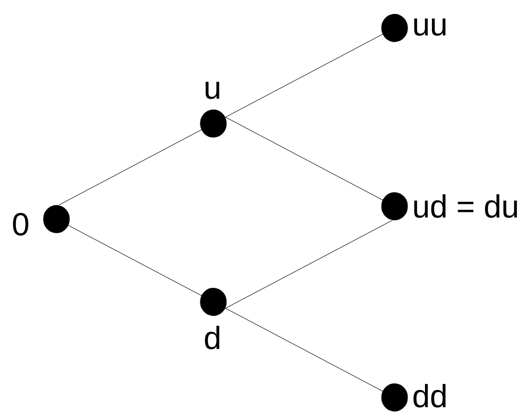
funksjoner er en mer usikker metode som det ikke kommer gås nærmere inn på i denne oppgaven.

Binomialprisingsmodellen

Implementeres *binomialfordelingen* i prising av opsjoner på binære trær, kan man utlede en verdsettingsformel som gjelder for et vilkårlig antall perioder. Man antar først at den sikre diskonteringsfaktoren over hver periode, $\delta_s = \delta$, er konstant over tilstandene s. Man antar som før at det underliggende aktivaet i tilstand 0, enten kan stige med en faktor u, eller synke med en faktor d, slik at verdien i neste periode kan skrives $V_0 u$ eller $V_0 d$. Verdien for ytterligere en periode, kan skrives $V_0 uu = V_0 u^2, V_0 ud, V_0 du$, og $V_0 dd = V_0 d^2$. Disse antakelsene gir oss et binomisk tre, som bare øker med en grein for hver periode, siden resultatet av en prisstigning etterfulgt av en prisreduksjon, er det samme som en prisreduksjon etterfulgt av en prisstigning:

$$V_{ud} = V_0 ud = V_0 du = V_{du} \tag{2.13}$$

Antakelsene ovenfor gjør at de risikojusterte sannsynlighetene blir tilstand-



Figur 2.7: Det binomiale treet, for to perioder.

suavhengige, og den risikojusterte sannsynligheten for en prisstigning, er som tidligere gitt av p fra likning 2.3. Verdien av det underliggende aktiva ved bortfall T, ved n antall prisstigninger og $(T-n)$ antall prisreduksjoner i løpet av perioden, er dermed gitt av:

$$V_T = V_0 u^n d^{(T-n)} \tag{2.14}$$

Man antar videre at innløsningsprisen for opsjonsavtalen $I_s = I$ er konstant over tilstandene s. Det minste antallet prisstigninger n som gjør at verdien av det underliggende aktiva ved borfall T er større enn innløsningsprisen, kaller man $\bar{n}$:

$$V_0 u^{\bar{n}} d^{(T-\bar{n})} \geq I \tag{2.15}$$

Verdien av en kjøpopsjon ved bortfall T, for gitt antall n er dermed gitt av:

$$C_T(n) = \max(V_0 u^n d^{(T-n)} - I, 0) \tag{2.16}$$

For å finne verdien av en kjøpopsjon ved bortfall T, når antall prisstigninger n er ukjent, innfører man *binomialfordelingen*[5]:

Definisjon 2.5 (Binomialfordelingen) $B(n|p,T)$ *er sannsynligheten for at en hendelse skal inntreffe totalt n ganger i T uavhengige forsøk, når sannsynligheten for at hendelsen skal inntreffe er p i hvert forsøk:*

$$B(n|p,T) := \binom{T}{n} p^n (1-p)^{(T-n)} \quad \textit{for} \quad n = 0, 1, ..., T; T = 1, 2, ...; p \in (0,1)$$

Når $B(n|p,T)$ er sannsynligheten for antall n opp og antall $(T-n)$ ned, gitt sannsynligheten for en prisstigning p, kan man skrive den komplementære kumulative sannsynligheten for alle $n \geq \bar{n}$ som:

$$B(n \geq \bar{n}|p,T) = \sum_{n=\bar{n}}^{T} B(n|p,T)$$

Med risikonøytral verdsetting over flere perioder, kan man anta at prisen på opsjonen i dag er lik sin forventede verdi ved bortfall, gitt de risikojusterte sannsynlighetene $p = (p)$ for tilstandene ved bortfall, diskontert med den sikre diskonteringsraten. Man har dermed at:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \delta^T E_p[C_T(n)] = \delta^T E_p[V_0 u^n d^{(T-n)} - I] \\
&= \delta^T \sum_{n=\bar{n}}^{T} B(n|p,T)[V_0 u^n d^{(T-n)} - I] \\
&= \delta^T \left(V_0 \sum_{n=\bar{n}}^{T} B(n|p,T) u^n d^{(T-n)} - I \sum_{n=\bar{n}}^{T} B(n|p,T) \right) \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Uttrykket ovenfor er en verdsettingsformel for prising av opsjoner for et vilkårlig antall steg, gitt binomialfordelingen. Antakelsen bak den binomiske fordelingen er at det underliggende aktivaet som opsjonen baseres på, følger en såkalt *geometrisk-Brownsk* bevegelse. Dette viser seg å være en streng antakelse, den samme antakelsen som ligger til grunn for *den kontinuerlige modellen.*

2.3.2 Kontinuerlig opsjonsprising

I den diskrete modellen hadde man det kun var mulig å evaluere på bestemte tidspunkter, og at det underliggende aktivaet bare kunne ta et endelig antall verdier. Man antar nå at det underliggende aktivaet kan ta alle verdier, og at det er mulig å evaluere på ethvert tidspunkt. Verdien er altså kontinuerlig i både størrelse og tid. Den kontinuerlige modellen er altså svært fleksibel, men for å utlede en slik modell kreves det mange, strenge forutsetninger. Det kan diskuteres hvorvidt disse forutsetningene er troverdige i forhold til virkeligheten.

[5] Binomialkoeffsientene $\binom{T}{n} := \frac{T!}{(T-n)!n!}$ hvor $n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.

Prising av kontinuerlige opsjoner gjøres ved at verdien av det underliggende aktivaet over tid antas å følge en spesifikk stokastisk prosess. En slik kontinuerlig fordeling, er grunnlaget for den kjente opsjonsprisingsmodellen som Fischer Black, Myron Scholes og Robert Merton opprettet tidlig på 70-tallet. Den er mer kjent som *Black-Scholes-modellen.* Jeg vil nå gi en kort presentasjon på stokastiske prosesser som kan representere verdiutviklingen til opsjoner, før jeg går videre inn på arbeidet til Black, Scholes og Merton. Da utledningen av Black-Scholes-modellen er svært omfattende, vil jeg kun presentere en forenklet versjon av den [7], [9], [10].

Stokastiske prosesser

En stokastisk prosess er en prosess som representerer en variabels utvikling over tid. De fleste stokastiske prosesser er basert på den grunnleggende og kanskje viktigste kontinuerlige fordelingen, *normalfordelingen* [14].

Definisjon 2.6 (Normalfordelingen) *En variabel z som følger normalfordelingen, kan uttrykkes på følgende måte:*

$$f(z) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}^{\frac{e^{-(z-\mu)}}{2\sigma^2}}, z \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

hvor forventningen $E(z) := \mu$, og standardavviket $\sigma := \sqrt{var(z)}$.

Mange andre fordelinger kan under visse betingelser tilnærmes normalfordelingen. Dersom forventningsverdien er 0 og standardavviket er 1, er dette en *standardisert normalfordeling.*

Aksjepriser blir ofte antatt å følge en *Markovprosess,* en prosess som antar at fremtidig prisutvikling bare er betinget av den aktuelle tilstanden. Det vil si at kun nåverdien av variabelen er relevant for fremtidens priser, og at all historisk informasjon er irrelevant. Markovprosessen er altså forenelig med random-walk-forutsetningene.[6] Dersom Markovprosessen er standard normalfordelt med forventningen 0 og standardavviket 1 for hver tidsenhet, kalles det en *Wienerprosess.* Det betyr at en variabel med initialverdi z_0 , vil være normalfordelt med forventning z_0 og standardavvik $\sqrt{T}$ ved tid T. Variabler som følger Wienerprosessen sier man at følger en *geometrisk-Brownsk bevegelse* [7]. Dette kan uttrykkes mer formelt:

Definisjon 2.7 (Wienerprosessen) *Dersom en variabel z følger en Wienerprosess, har den følgende to egenskaper:*
1) Endringen i variabelen dz over tidsperioden dt er gitt ved

$$dz = \epsilon\sqrt{dt}$$

hvor ϵ standardnormalfordelingen $\phi(0, 1)$
2) Verdiene for Δz for hvert tidsintervall er uavhengige.

En spesiell type av Wiener-prosessen er *den generaliserte Wiener-prosessen.* Endringer i variabelen x som følger en generalisert Wiener-prosess, er definert av variabelen dz fra den opprinnelige Wienerprosessen:

$$dx = a\,dt + b\,dz \tag{2.18}$$

[6] Se Forutsetning 2.2, Random-walk.

hvor a og b er konstanter. For å forklare betydningen av den generaliserte Wiener-prosessen fokuserer man på de to leddene separat. Det første leddet $a\,dt$ indikerer at variabelen x har forventningsverdi a per tidsenhet, mens det andre leddet $b\,dz$ kan bli betraktet som støy, eller variasjon, som er b ganger en Wiener-prosess. Ved en initialverdi x_0, har man for den generaliserte Wiener-prosessen en forventningsverdi $x_0 + aT$ ved tid T, og et standardavvik $b\sqrt{T}$.

En annen versjon av Wiener-prosessen er *Itõ-prosessen*. Itõ-prosessen er en generalisert Wiener-prosess hvor forventningen og variansen av variabelen x kan være en funksjon av både seg selv og tid:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{2.19}$$

For en Itô-prosess er endringen av x i et lite tidsrom dt normalfordelt, men ikke-normalfordelt for et lengre tidsrom. Man kan modellere derivatpriser ved Itô-prosessen. Prisen på et derivat, når det underliggende verdipapiret er en aksje, er en funksjon av aksjens pris og tid. Mer generelt kan man si at prisen på ethvert derivat er en funksjon av den stokastiske variabelens underliggende verdipapir og tid [7]. *Itôs lemma* viser et ytterligere viktig resultat:

Definisjon 2.8 (Itôs lemma) *En variabel x som følger Itô-prosessen:*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

hvor dz er en Wienerprosess, og a og b funksjoner av x og t, har variabelen x forventningsverdien a og variansen b^2. Itôs lemma viser at en funksjon G av x og t følger prosessen

$$dG = (\frac{dG}{dx}a + \frac{dG}{dt} + \frac{1\partial^2 G}{2\partial x^2}b^2)dt + \frac{dG}{dx}bdz$$

Et grunnleggende resultat av Itôs lemma går ut på at både prosessen for det underliggende verdipapiret (aksjen), og prosessen for en funksjon (derivat) av det underliggende verdipapiret, påvirkes av samme kilde til usikkerhet, dz. Dette er et særdeles viktig resultat for utarbeidelse av Black-Scholes-modellen.

Black-Scholes-modellen

Man antar at man har en opsjonsavtale på en underliggende aksje som ikke betaler ut utbytte. Hvis V er aksjeprisen i tilstand t, har man forventningsverdien μS for den konstante parameteren μ. I en kort tidsperiode Δt, har man at den forventede økningen av S er $\mu S \Delta t$. For et kort tidsrom $\Delta t \to 0$ har man dermed at:

$$dS = \mu S\,dt \tag{2.20}$$

Så langt har man ikke tatt hensyn til usikkerhet i kursen til aksjen, *volatiliteten*. En rimelig antakelse er at variasjonen til den prosentvise avkastningen for en kort tidsperiode, er den samme uavhengig av aksjeprisen. Investoren er med andre ord like usikker på avkastning om aksjeprisen er høy eller lav. Standardavviket for en kort periode foreslås altså å være proporsjonal med aksjeprisen, og man får følgende modell:

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz \tag{2.21}$$

eller:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dz \tag{2.22}$$

hvor dz er Wiener-prosessen. Denne modellen er en Itô-prosess, og er en vanlig måte å representere aksjekursutvikling på. Man har her at standardavviket σ er et mål volatiliteten. Ved *Itôs lemma* har man at prisen f, på en opsjon eller et annet derivat på aksjen S, må tilfredstille følgende stokastiske differensiallikning:

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1 \partial^2 f}{2 \partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{2.23}$$

Den diskrete versjonen av likningene 2.21 og 2.23 er tilsvarende:

$$\Delta S = \mu S\, \Delta t + \sigma S\, \Delta z \tag{2.24}$$

og:

$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1 \partial^2 f}{2 \partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{2.25}$$

hvor Δf og ΔS er endringene i prisen f og S over et kort tidsintervall Δt. Investoren velger en portefølje bestående av aksjen og derivatet av aksjen. Han holder en kort posisjon i derivatet, og en lang posisjon i aksjen. Porteføljen er gitt av:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{2.26}$$

Endringer $\Delta\Pi$ i porteføljen for tidsintervallet Δt er gitt av:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{2.27}$$

Setter man likning 2.24 og 2.25 inn i likning 2.27, får man:

$$\Delta\Pi = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1 \partial^2 f}{2 \partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t \tag{2.28}$$

Siden likingen ikke lenger inneholder Δz har man at porteføljen tidsrommet Δt er risikofri. Det vil si at porteføljen må ha samme avkastning som et risikofritt verdipapir. Dersom avkastningen blir større enn det risikofrie verdipapiret, har man en arbitrasjemulighet. Man kan altså skrive:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \tag{2.29}$$

hvor r er den risikofrie renten. Setter man likning 2.26 og 2.28 inn i likning 2.29 har man at:

$$(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1 \partial^2 f}{2 \partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t = r(f - \frac{\partial f}{\partial S}S)\Delta t \tag{2.30}$$

som fører til:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} = rf \tag{2.31}$$

Likning 2.31 kalles for Black-Scholes-Mertons differensial-likning. Siden porteføljen som brukes til å utlede denne likningen kun er risikofri i et lite øyeblikk, må den balanseres kontinuerlig for å holdes risikofri over en lengre periode.

Black-Scholes-Mertons differensial-likning kan brukes til å finne prisen på mange ulike typer derivater basert på en underliggende aksje som ikke betaler ut dividende. En prisingsformel er avhengig av grensebetingelsene til det spesifikke derivatet. Løses for eksempel Black-Scholes-Mertons differensial-likning for betingelsene til en *europeisk* opsjon, har man følgende verdsettingsproblem [7]:

Teorem 2.3 (Black-Scholes prisingsformel for europeiske opsjoner) *Prisen c for en europeisk kjøpopsjon, og prisen p for en europeisk salgsopsjon er gitt ved:*

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

og:

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

når:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (\frac{r+\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (\frac{r-\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

når S_0 er prisen på en aksje i dag, K er innløsningsprisen, T er resterende tid til bortfall, $N(x)$ er en kumulativ sannsynlighetsfordeling for en standardisert normalfordeling, og σ er volatiliteten til aksjen i tiden frem til bortfall.

Alle parametrene i Black-Scholes-modellen er observerbare, unntatt volatilitetsparameteren som er den eneste ukjente. Dette er nok en av hovedgrunnene til Black-Scholes-modellen er en svært mye brukt opsjonsprisingsmodell i dag. Det er altså bare variasjonen til aksjen som må estimeres. Volatilitet kan estimeres på to måter; *historisk* eller *implisitt*. Historisk volatilitet måler aksjen prisbevegelser basert på historiske kursbevegelser. Ved å ta daglige prosentvise endringer i aksjen kalkuleres standardavviket til logaritmeendringen, og aktivitetsnivået over en gitt periode. Implisitt volatilitet er prognose for volatiliteten basert på markedets forventning til aksjens fremtidige kurs. Det viser seg at prediksjoner på volatiliteten ofte er et bedre mål enn volatiliteten basert på de historiske data. En grunn til dette kan være at markedsaktørene ofte er fremadskuende, mens historiske data ikke er det [11]. Black-Scholes-modellen kan utledes på flere måter, men resultatet er det samme, og det stilles de samme kravene til forutsetninger:

- Markedet antas å være arbitrasjefritt.
- Verdien av den underliggende aksjen følger en geometrisk-Brownsk bevegelse.
- Det antas konstant rente.

- Det antas ingen restriksjoner for kort salg.
- Det tas ikke hensyn til transaksjonskostnader eller skatter.
- Det antas at den underliggende aksjen betaler ikke ut utbytte (ingen eierfordeler).

Som diskutert tidligere, kan markedet som regel antas å være fritt for arbitrasjemuligheter. Det som er spesielt usikkert hvor godt en geometrisk-Brownsk bevegelse vil representere det underliggende verdipapirets faktiske utvikling. Ved en geometrisk-Brownsk bevegelse, vil prisutviklingen være fordelt med konstant varians (volatilitet). Dette er ikke konsistent når prisen blir utsatt for sjokk (hopp) [13]. Empiriske undersøkelser har vist at prisutviklingen til verdipapir kan ha en tendens til å ha tyngre haler og en tyngre sentral del enn tilnærmingen til normalfordelingen [11]. I den virkelige verden kan det være restriksjoner for kort salg, og skatter eller transaksjonskostnader kan overgå gevinsten av en opsjonsavtale. Det er usikkert i hvilken grad opsjonsverdien blir påvirket av utbetaling av utbytte, og at renten holdes konstant er en tvilsom antakelse. Renteendringer vil imidlertid i mindre grad påvirke opsjonsverdien, men renten kan i sammenheng med volatiliteten få større betydning for beregning av opsjonsverdien.

2.3.3 Diskusjon

Den binære modellen kritiseres ved første øyekast for at den er lite fleksibel, fordi at den kun kan ta hensyn til to tilstander. Den kan imidlertid utvides til å ta hensyn til flere tilstander, men da må den også ta hensyn til flere verdipapir for å opprettholde kravet om et fullstendig marked. Med flere tilstander og verdipapir blir det flere usikre variabler å ta hensyn til, og utregningen vil bli mer komplisert. Idéen om diskrete handlingstidspunkter og risikonøytrale sannsynligheter blir brakt videre i neste kapittel, hvor det viser seg at prising av opsjoner i den binære modellen har mye til felles med prising av opsjoner ved lineær programmering. Modellene beror på mange av de samme forutsetningene, som er langt lettere enn forutsetningene for Black-Scholes-modellen. Ved lineær programmering utvikles den diskrete modellen, slik at verdsettingsproblemet for opsjoner blir enklere, langt mer fleksibelt og anvendelig.

Binomialprisingsmodellen er en modell som i utgangspunktet er en enklere og mer anvendelig modell en den binære modellen, men den beror på forutsetningen om en geometrisk-Brownsk bevegelse, som kan kritiseres på samme måte som Black-Scholes-modellen.

Black-Scholes-modellen kritiseres først og fremst for tilnærmingen til en geometrisk-Brownsk bevegelse. Denne antakelsen gjør modellen dårlig egnet dersom prisutviklingen skulle bli påvirket av andre, uforutsette faktorer. Black-Scholes-modellen er imidlertid en svært anvendelig modell, da eneste ukjente parameter er volatilitetsparameteren. For at modellen skal fungere godt i praksis, må opsjonshandlerne ha god kjennskap til hvordan modellen fungerer, samt å kunne analysere hva resultatene faktisk betyr. Black-Scholes-modellen brukes i utstrakt grad i finansverdenen, noe som tyder på at aktørene i finansmarkedet ser fordeler med modellen.

Kapittel 3

Metode

Å finne en metode for verdsetting av opsjoner som både er enkel å bruke, samt troverdig med hensyn til antakelser som ligger bak, viser seg å være vanskelig. Black-Scholes-modellen, som er den mest brukte modellen i dag, fungerer bra til en viss grad, men den har fått en del kritikk for sine strenge antakelser. Den binære modellen fungerer bra til et visst antall steg, men blir lite anvendelig med svært kompliserte likninger for mange steg, og mange variabler. Tanken bak den binære modellen er imidlertid god, da antakelsene er lette, og prisutviklingen ofte kan representeres ved diskrete tidspunkter.

Det viser seg at *lineær programmering (LP)* kan brukes i enkelte finansielle modeller, og kan være en aktuell metode for prising av opsjoner. Dette kapitlet inneholder følgende, to avsnitt:

- *Avsnitt 3.1* illustrerer prinsippet for lineær programmering og introduserer nødvendig teori som brukes i verdsetting av verdipapir ved LP. Her defineres linearitet, egenskaper for lineære funksjoner, typiske eksempler på linære program, og hvordan slike program kan løses ved Lagranges metode. Så forklares Lagranges dualitet, som er et særdeles viktig resultat for anvendelse av lineær programmering i praksis.

- *Avsnitt 3.2* utarbeider seg, steg for steg, frem til et verdsettingsproblem som kan brukes til prising av opsjoner. Kapitlet innleder med å spesifisere modellen og antakelser omkring modellen. Deretter bevises det fundamentrale prisingsteoremet ved arbitrasjeproblemet, og hvordan man kan anvende dette til prising av opsjoner. Til slutt diskuteres metoden.

3.1 Lineær programmering (LP)

Lineær Programmering (LP) kan forklares som optimering av lineære kriterier under lineære sidevilkår. Optimering innebærer å finne minimal eller maksimal løsning på funksjonen man står ovenfor, gitt at enkelte begrensninger tilfredstilles. Hensikten er å forhindre sløsing og ineffektivitet. Mange scenarier i virkeligheten kan modelleres som en lineær funksjon, og kan enkelt løses ved lineær programmering. Matematisk finans er i dag dominert av modeller som baseser seg på kjente, stokastiske prosesser [2].[1] Dette er noe overaskende, siden mange

[1] Et eksempel på dette er Black-Scholes-modellen, som ble presentert i forrige kapittel.

finansielle scenarier kan modelleres som lineære funksjoner, og løses ved enkel optimering. Denne metoden har både lettere forutsetninger, og kan i enkelte sammenhenger være svært anvendelig. Dette avsnittet er en enkel innføring i lineær programmering, en metode som dagens økonomer absolutt har noe å hente av. Teorien som blir gjennomgått, vil bli flittig brukt i neste avsnitt om prising av opsjoner.

3.1.1 Linearitet

Den aktuelle funksjonen må oppfylle enkelte krav for at den skal kunne betraktes som lineær. Man ser tilbake på vektorer og vektorrom for å definere linearitet, som er en forutsetning for å kunne anvende lineær programmering.

Reelle tall $\mathbb{R}$ defineres som alle tallene som befinner seg på tallinjen, det vil si alle tall som kan uttrykkes med desimaltall. *En vektor* $x = (x_j)$ er et ordnet sett av tall, hvor x_j er komponent j i rekken av koordinater. *Et standard vektorrom* inneholder alle vektorer $x = (x_j)$ som befinner seg i den endelige mengden J. Dersom mengden J er $\{1, ..., n\}$, består vektorrommet $\mathbb{R}^J = \mathbb{R}^n$ av alle vektorene $x_j = (x_1, x_2, ..., x_n)$. I et vektorrom er det definert to operasjoner, *addisjon* og *skalarmultiplikasjon* [6], [9], [12]:

Definisjon 3.1 (To operasjoner på vektorer) *Hvis vektorene x og y befinner seg i vektorrommet $J \to \mathbb{R}$, og r er en skalar $r \in \mathbb{R}$, gjelder følgende operasjoner:*
(1) Koordinative addisjonsregel: $x + y = (x_j) + (y_j) = (x_j + y_j)$
(2) Koordinative multiplikasjonsregel: $rx = r(x_{j)} = (rx_j)$

Man sier at en funksjon L er lineær dersom den bevarer *lineærkombinasjonen*. Det vil si når den er *additiv* og *homogen av grad 1*, altså når addisjonsregelen og multiplikasjonsregelen holder. Funksjonen bevarer da sin rette linje.

Definisjon 3.2 (Lineær funksjon) *En funksjon L i fra vektorrommet $\mathbb{R}^J$ er lineær dersom den er:*
(1) Additiv: $L(x + y) = L(x) + L(y)$
(2) Homogen av grad 1: $L(rx) = rL(x)$

Ved å slå disse to utrykkene sammen kan man finne et utrykk for lineærkombinasjonen. For vektorene x_j i den endelige mengden J , med skalarene $r_j \in \mathbb{R}$, kan man uttrykke lineærkombinasjonen slik:

$$L(r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_nx_n) = L(\sum_{j \in J} r_jx_j) := \sum_{j \in J} r_jL(x_j) \tag{3.1}$$

Definisjon 3.3 (Lineærkombinasjon) *At funksjonen er lineær, er ekvivalent med at funksjonen L bevarer lineærkombinasjonen.*

I forrige kapittel hadde man at et elementært verdipapir var et verdipapir som hadde verdien 1 for tilstand j, og 0 ellers.[2] Mer generelt kan man si at en *enhetsvektor* er en vektor som har verdien 1 for komponent j, og 0 ellers. Den kan representeres slik:

$$e_j = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 0)$$

[2] Se side 16.

Det vil si at for hver koordinat j, finnes det en egen enhetsvektor:

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 1)$$

Enhetsvektorene danner en *basis* for vektorrommet $\mathbb{R}^J$ fordi at enhver vektor $x \in \mathbb{R}^J$ kan fremstilles entydig som en lineærkombinasjon av enhetsvektorene:

$$x = \sum_{j \in J} x_j e_j \tag{3.2}$$

Ved å sammenligne resultatene fra likning 3.1 og 3.2 finner man hvordan et typisk uttrykk for en lineær funksjon ser ut. Man kaller verdien av funksjonen L ved enhetsvektoren e_j for l_j:

$$\begin{aligned} l_j &= L(e_j) \\ &\Rightarrow L(x) = L(\sum_{j \in J} x_j e_j) = \sum_{j \in J} x_j L(e_j) = \sum_{j \in J} x_j l_j \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dette kan man forenkle ytterligere ved bruk av definisjonen av *standard indreproduktet*[3]:

Definisjon 3.4 (Standard indreprodukt) *Indreproduktet av n-vektorene* $x = (x_1, ..., x_n)$ *og* $y = (y_1, ..., y_n)$ *er definert som:*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Ved indreproduktet, kan uttrykket for en lineær funksjon spesifisert som en basis, uttrykkes:

$$\sum_{j \in J} x_j l_j = x \cdot l \tag{3.4}$$

En lineær funksjon er lett gjenkjennelig. Det som kjennetegner en lineær funksjon i en grafisk setting, er at:

(1) Den er *flat*, det vil si at den er rettlinjet uten krumning.

(2) $L(0) = 0$.

Med disse egenskapene betyr dette at den deriverte av en lineær funksjon alltid er konstant, og at den dobbelderiverte alltid er lik null:

$$\begin{aligned} L' &= \text{konstant} \\ L'' &= 0 \end{aligned}$$

3.1.2 Lineære program

Lineære program er optimeringsproblem hvor det er en lineær objektfunksjon med en eller flere variabler, med et endelig antall lineære sidevilkår.

[3] Standard indreprodukt kalles også for *prikkproduktet*.

Definisjon 3.5 (Lineært program) *Når $f(x)$ er en lineær funksjon, og $g_i(x) = b_i$ er lineære sidevilkår, kan det lineære programmet formelt uttrykkes slik:*

$$\textit{optimer } f(x) \textit{ slik at } g_i(x) = b_i, \textit{ for } i = (1, ..., n), \textit{ og } x \geq 0$$

For maksimeringsproblem er det vanlig å ha begrensede ressurser, slik at sidevilkåret ikke kan overstige et gitt nivå. For minimeringsproblem er det derimot vanlig at et gitt behov skal tilfredstilles, slik at sidevilkåret må overstige et gitt nivå. Typiske eksempler på lineære program er diettproblemet, transportproblemet, kostnadsminimering, profittmaksimering og arbitrasjeproblemet [6], [16].

Diettproblemet

Diettproblemet går ut på å finne billigste sammensetning av varer, gitt at enkelte ressursbehov tilfredstilles. Anta at det finnes en liste I av næringsmidler, hvor det som kreves av næringsmiddel $i \in I$ er gitt av b_i. Det finnes også en liste J av matvarer, hvor mengden a_{ji} angir hvor mye matvare $j \in J$ inneholder av næringsmiddelet $i \in I$. Matvarene har kostnadene c_j. Problemet går ut på å finne mengden av $x_j \geq 0$ slik at:

Totalkostnadene	$\sum_{j \in J} c_j x_j$	er minimale
slik at næringskravet	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$	tilfredstilles for alle $i \in I$
og alle	$x \geq 0$	

Transportproblemet

Transportproblemet handler om å transportere varer fra ulike produsenter til ulike konsumenter på billigst mulig måte, slik at både tilbudet til produsentene og etterspørselen til konsumentene blir respektert. Man har at S_o blir tilbudt i kilden $o \in O$ (origin), og D_m er etterspurt av marked $m \in M$ (market). Transportkostnadene mellom o og m er gitt av c_{om}. Problemet går ut på å finne mengden $x_{om} \geq 0$ slik at:

Totalkostnadene	$\sum_{o \in O, m \in M} c_{om} x_{om}$	er minimale
når etterspørselen	$\sum_{o \in O} x_{om} \geq D_m$	tilfredstilles for alle $m \in M$
og tilbudet	$\sum_{m \in M} x_{om} \leq S_o$	tilfredstilles for alle $o \in O$
og alle	$x \geq 0$	

Kostnadsminimering

Kostnadsminimering går ut på å innfri visse produksjonskrav på billigst mulige måte. Man har en liste av arbeidsoppgaver $j \in J$, som koster c_j å utføre, og produserer mengden a_{ij} av varen $i \in I$. Markedsetterspørselen er b_i. Problemet går ut på å finne mengden $x_j \geq 0$ slik at:

Totalkostnadene	$\sum_{j \in J} c_j x_j$	er minimale
når etterspørselen	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$	tilfredstilles for alle $i \in I$
og alle	$x \geq 0$	

Det er verdt å merke seg at oppsettet for kostadsminimering er helt tilsvarende som oppsettet for diettproblemet. Dette kommer av at man skal minimere kostnader samtidig som visse krav skal tilfredstilles i begge scenarier.

Profittmaksimering

Profittmaksimering går ut på å få mest mulig ut av begrensede ressurser ved ulike aktiviteter. Man har aktivitetene $j \in J$ som bidrar med c_j til et økonomisk overskudd. Aktiviteten bruker mengden a_{ij} av ressursen $i \in I$. Begrensningen av ressursene er gitt ved b_i. Problemet går ut på å finne mengden x_j slik at:

Overskuddet	$\sum_{j\in J} c_j x_j$	maksimeres
når ressursene	$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \leq b_i$	ikke overstiges for alle $i \in I$
og alle	$x \geq 0$	

Getting Rich?

Anta en investeringmulighet $j \in J$ som gir avkastningen r_{sj} for de mulige tilstandene (scenariene) $s \in S$. En investor med porteføljen $\theta = (\theta_j)$ kan uttrykke sin totale avkastning ved det linære programmet:

$$\sum_{j\in J} r_{sj}\theta_j \quad \text{for alle } s \in S$$

Dersom det finnes en portefølje θ_j som gir positiv løsning på dette programmet, kan investoren enkelt skalere opp, og fortjenesten kan i prinsippet bli uendelig. Dette er imidlertid ikke forenelig med fravær av arbitrasje. Sammenhengen kan brukes til å utvikle interessante resultater for finansteori ved lineær programmering, noe som fører til det fundamentale prisingsteoremet for verdipapir. Dette blir forklart nærmere under arbitrasjeproblemet[4], og fungerer som en *trigger* for verdsettingsproblemet for opsjoner.

3.1.3 Lagranges metode

Løsningen på lineære program finner man ved å bruke *Lagranges metode*. Lagranges metode stammer fra en av 1700-tallets mest kjente matematikere, franskmannen Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813). Allerede som 19-åring utformet Lagrange denne banebrytenede metoden for optimering.

Lagranges metode går ut på å finne kombinasjonen av $x = (x_1, ..., x_m)$ som gjør at funksjonen $f(x)$ oppnår sitt optimum, samtidig som sidekravene $g_i(x) = b_i$ holder for $j = (1, ..., n)$. Dette gjøres ved å danne en ny funksjon, Lagrangefunksjonen $\mathcal{L}(x, \lambda)$, der λ kalles *Lagranges multiplikatorer*. Lagrangemultiplikatorene er konstanter, og angir prisen på å slakke begrensningen b_j med *en* enhet (skyggeprisen). For å finne løsningen på det *generelle Lagrangeproblemet*:

$$\textit{Optimer } f(x_1, ..., x_{m)} \textit{ slik at} \left\{ \begin{array}{c} g_1(x_1, ..., x_m) = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, ..., x_m) = b_n \end{array} \right\} \textit{når } n < m$$

utføres følgende tre operasjoner [12], [14]:

(1) Innfør Lagrange-funksjonen:

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_m, \lambda_1, ..., \lambda_n) =$$

[4] Kapittel 3.2.2, Arbitrasjeproblemet.

$$f(x_1, ..., x_m, \lambda_1, ..., \lambda_n) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i(x_1, ..., x_m) - b_i) \forall i = (1, ..., n)$$

hvor $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ er konstanter.

(2) Partiellderiver $\mathcal{L}$ med hensyn på x_j hvor $x_j = (1, ..., m)$, og sett de partiell deriverte lik 0:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}$$

(3) Sett opp ligningsettet av de m partiell deriverte og de n sidevilkårene. Dette ligningsettet av $n + m$ ligninger løses med hensyn på de ukjente $(x_1, ..., x_m)$ og Lagrange-multiplikatorene $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Som vist ved de ulike programmene i kapittel 3.1.1, er det vanligere å ha ulikheter i sidekravene. Felles for dem alle er at de maksimerer eller minimerer en funksjon, slik at visse sidekrav tilfredstilles. Formelt kan man uttrykke det slik:

$$\max f(x) \ \textit{slik at} \ g_i(x) \leq b_i \tag{3.5}$$

$$\min f(x) \ \textit{slik at} \ g_i(x) \geq b_i \tag{3.6}$$

Man kan enkelt modifisere optimeringsproblemene fra likning 3.5 og 3.6 slik at man bruke oppskriften for det generelle Lagrangeproblemet [16]. Man vet at b_i er begrensningen for sidevilkår j. Dersom man slakker dette sidevilkåret med Δb_i, kan man skrive sidevilkåret for maksimeringsproblemet slik:

$$g_i(x) \leq b_i + \Delta b_i \tag{3.7}$$

Tilsvarende for minimeringsproblemet:

$$g_i(x) \geq b_i - \Delta b_i \tag{3.8}$$

Skriver man om ulikhetene fra likning 3.7 og 3.8 finner man vilkåret for slakkhetsgraden Δb_i for henholdsvis maksimerings- og minimeringsproblemet:

$$\Delta b_i \geq g_i(x) - b_i \tag{3.9}$$

$$\Delta b_i \geq b_i - g_i(x) \tag{3.10}$$

Å slakke på begrensningene i sidevilkåret har naturligvis en pris. Man antar at prisen for å slakke på begrensningen b_i med *en* enhet, er gitt ved λ_i. Det er denne prisen som danner Lagrange-multiplikatorene. Disse er konstante, og man antar at prisen aldri er negativ $\lambda_i \geq 0$. Den totale slakkprisen blir da:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \Delta b_i \tag{3.11}$$

I ethvert optimeringsproblem ønsker man at denne prisen skal bli minst mulig. Fra likning 3.11 observerer man at denne prisen blir minst mulig når Δb_i er minst mulig. Fra likning 3.9 og 3.10 ser vi at Δb_i er minimal når man erstatter ulikhetene med likhetstegn. Da får man følgende sidevilkår, for henholdsvis maksimerings og minimeringsproblemet:

$$\Delta b_i = g_i(x) - b_i \tag{3.12}$$

$$\Delta b_i = b_i - g_i(x) \tag{3.13}$$

Det er kun en unik verdi av Δb_i, som gjør at man kan erstatte ulikhetene med likhetstegn. Det er denne verdien som optimerer problemene. For maksimeringsproblemet skriver man da følgende:

$$\max f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta b_i \text{ } når \text{ } \Delta b_i = g_i(x) - b_i \tag{3.14}$$

Tilsvarende skriver man for minimeringsproblemet:

$$\min f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta b_i \text{ } når \text{ } \Delta b_i = b_i - g_i(x) \tag{3.15}$$

Optimeringsproblemene i likning 3.14 og 3.15 kan videre forenkles til:

$$\max f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i (g_i(x) - b_i) \tag{3.16}$$

og:

$$\min f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i (b_i - g_i(x)) = \min f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i (g_i(x) - b_i) \tag{3.17}$$

Da kan man skrive Lagrange-uttrykket:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j \in J} \lambda_j (g_j(x) - b_j) \tag{3.18}$$

Forenklet med standard indreproduktet, er dette:

$$\max f(x) - \lambda \cdot (g(x) - b) \tag{3.19}$$

og:

$$\min f(x) - \lambda \cdot (g(x) - b) \tag{3.20}$$

som gir:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot (g(x) - b) \tag{3.21}$$

Dette er oppsett som stemmer med det generelle Lagrange-problemet, hvor man hadde likheter i sidevilkårene. Man har dermed vist at tilsvarende problem med ulikheter i sidevilkårene kan løses på samme måte.

3.1.4 Lagranges dualitet

Ved bruk av Lagranges metode, angir $\mathcal{L}(x, \lambda)$ den optimale løsningen på problemet. For minimeringsproblemet kan dette være de minimale kostnadene, og for maksimeringsproblemet kan det være maksimal profitt. Dersom man har muligheten til å *kjøpe slakk*, har man at λ er prisen på å slakke på begrensningen b. Å ha muligheten til å kjøpe slakk vil føre til at den optimale løsningen blir enten lik, eller bedre enn den optimale løsningen uten den samme muligheten. Man betrakter minimeringsproblemet:

$$\min f(x) \text{ } slik \text{ } at \text{ } g(x) \geq b \tag{3.22}$$

Følgende ekvivalens gjelder:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,\lambda) &= f(x) - \lambda \cdot (g(x) - b) \\ &= f(x) + \lambda \cdot (b - g(x))\end{aligned} \tag{3.23}$$

Definerer man den optimale løsningen i et marked uten muligheten til å kjøpe slakk som $v(b)$, kan man skrive følgende for minimeringsproblemet:

$$\min_x \mathcal{L}(x,\lambda) \leq v(b) \ \textit{for alle}\ \lambda > 0 \tag{3.24}$$

Sett at det er en eksogen agent som først setter prisen $\lambda > 0$. Etter dette kommer beste respons x. Foregår handlingene i denne rekkefølgen, kan man uttrykke følgende resultat:

$$\max_{\lambda>0} \min_x \mathcal{L}(x,\lambda) \leq v(b) \tag{3.25}$$

For motsatt rekkefølge, det vil si når agenten må sette prisen $\lambda > 0$ etter optimal løsning x er satt, møter han følgende problem:

$$\begin{aligned}\max_{\lambda>0} \mathcal{L}(x,\lambda) &= \max_{\lambda>0} \{f(x) + \lambda \cdot (b - g(x))\} \\ &= f(x) + \max_{\lambda>0} \lambda \cdot (b - (g(x)) \\ &= f(x) + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{hvis}\ g(x) \geq b \\ \infty & \textit{hvis}\ g(x) < b \end{array} \right\}\end{aligned} \tag{3.26}$$

Fra det opprinnelige problemet hadde man sidevilkåret $g(x) \geq b$. Når optimal løsning x på problemet blir satt før prisen $\lambda > 0$ er bestemt, vil aktøren som minimerer velge løsningen $v(b)$. Man har da følgende resultat:

$$\begin{aligned}\min_x \max_{\lambda>0} \mathcal{L}(x,\lambda) &= f(x) \\ &= v(b)\end{aligned} \tag{3.27}$$

Fra likning 3.25 og 3.27 kan dermed man utlede følgende sammenheng:

$$\max_\lambda \min_x \mathcal{L}(x,\lambda) \leq \min_x \max_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) \tag{3.28}$$

Det viser seg altså at rekkefølgen har betydning [16]. For den som minimerer er det best at han setter optimal løsning x etter at prisen $\lambda > 0$ er satt. Man ønsker å finne en optimal løsning $(\hat{x}, \hat{\lambda}) \in (X, \Lambda)$ som er uavhengig rekkefølgen. En optimal løsning $(\hat{x}, \hat{\lambda}) \in (X, \Lambda)$ eksisterer dersom følgende likning holder:

$$\sup_\lambda \inf_x \mathcal{L}(x,\lambda) = \inf_x \sup_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) \tag{3.29}$$

Den optimale løsningen $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ er slik at:

$$\mathcal{L}(\hat{x},\lambda) \leq \mathcal{L}(\hat{x},\hat{\lambda}) \leq \mathcal{L}(x,\hat{\lambda}) \text{ for alle } x \in X,\ \lambda \in \Lambda \tag{3.30}$$

En optimalverdi $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ er tilgjengelig dersom:

$$\min_x \max_\lambda \mathcal{L}(\hat{x},\lambda) \leq \mathcal{L}(\hat{x},\hat{\lambda}) \leq \max_\lambda \min_x \mathcal{L}(x,\hat{\lambda}) \tag{3.31}$$

Som er ekvivalent med:

$$\min_x \max_\lambda \mathcal{L}(\hat{x},\lambda) = \mathcal{L}(\hat{x},\hat{\lambda}) = \max_\lambda \min_x \mathcal{L}(x,\hat{\lambda}) \tag{3.32}$$

For å finne ut når det eksisterer en slik løsning, kan man ta i bruk følgende, kjente teorem:

Teorem 3.1 (von Neumanns min-max-teorem) *Dersom en funksjon $\mathcal{L}(x,\lambda)$ er konveks for x og konkav for λ, samt kontinuerlige i intervallet $(x,\lambda) \in (X,\Lambda)$, gjelder følgende sammenheng:*

$$\min_x \max_\lambda \mathcal{L}(\hat{x},\lambda) = \mathcal{L}(\hat{x},\hat{\lambda}) = \max_\lambda \min_x \mathcal{L}(x,\hat{\lambda})$$

I lineær programmering er alltid x og λ lineære. En lineær funksjon er både konveks og konkav på samme tid, det vil si at von Neumanns teorem holder. Man har dermed at begge aktører vil velge optimal løsning $(\hat{x},\hat{\lambda})$, uavhengig av hvilken rekkefølge variablene x og λ blir satt i, og optimalverdien er felles dersom primalproblemet har en optimal løsning når dualproblemet har en optimal løsning, og optimalverdiene er like. Dette resultatet er en av de viktigste sammenhengene innen lineær programmering:

Definisjon 3.6 (Dualitetsprinsippet) *Primalproblemet har en optimal løsning dersom dualproblemet har en optimal løsning, og begge optimalverdiene er like.*

Eksisterer det en slik felles, optimal løsning, har man en *Nash-likevekt* [16].

Definisjon 3.7 (Nash-likevekt) *Betrakt et spill med to spillere, som har hver sin strategi $x \in X$ og $\lambda \in \Lambda$. Med en Nash-likevekt menes en løsning $(\hat{x},\hat{\lambda})$ som er optimal for begge spillerne, hvor ingen av dem har incentiv til å endre sin egen tilpasning i ettertid, om de fikk muligheten til det. I en Nash-likevekt er tilpasningen uavhengig av rekkefølgen.*

3.2 Prising av opsjoner ved LP

Prising av opsjoner ved Lineær Programmering (LP) gjøres ved antakelsen om fravær av arbitrasje i markedet. Verdsettingsproblemet blir modellert som et lineært program, og analyseres matematisk ved bruk av dualitetsprinsippet.[5] Dualproblemet behøver eksistens av en verdsettingsoperator som integrerer fremtidige kontantstrømmer mot et *martingalt* sannsynlighetsmål. I *fullstendige* markeder dette danner det fundamentale prisingsteoremet. I *ufullstendige* markeder får man ikke-linære sidevilkår, og det kan eksistere flere verdsettingsoperatorer. Forskjellige aktører kan også ha forskjellige verdsettingsoperatorer [2], [4].

Tanken og teorien bak dette avsnittet er hentet fra Sjur Didrik Flåms artikkel *Option Pricing by Mathematical Programming* (2007) [2]. Innholdet som følger er i større eller mindre grad en gjennomgang av denne artikkelen, da det følger tilsvarende struktur og metoder. I enkelte tilfeller hvor det forekommer avanserte matematiske utledninger, har jeg valgt å referere til bevis i Flåms artikkel fremfor å gjengi beviset selv. I andre deler av avsnittet har jeg også hentet tanker fra Alan Kings artikkel *Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims* (2001) [4], samt egne forelesningsnotater [16], til å forklare teorien med.

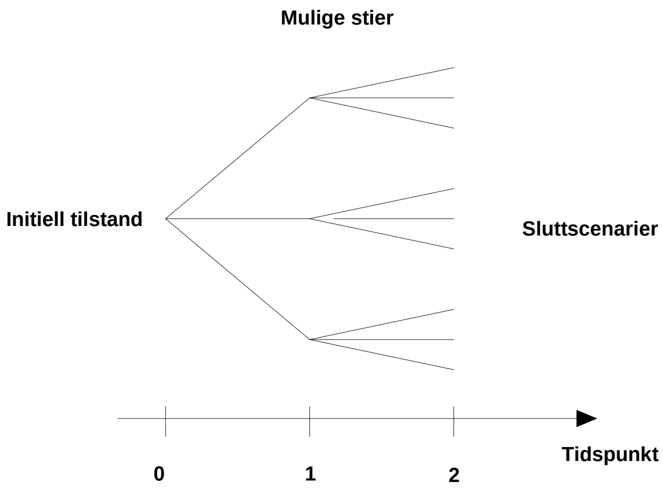
[5] Se Definisjon 3.6.

3.2.1 Modellspesifikasjon

Før verdsettingsproblemet utarbeides, må modellen spesifiseres nærmere. Videre presenteres nødvendige begrep og forutsetninger som ligger til grunn for at modellen skal forklares.

Informasjonsstruktur

Prisutviklingen til opsjonens underliggende verdipapir kan representeres ved et scenariotre. Informasjon om fremtidige priser avsløres gravis i dette treet, og man sier at prisene følger en såkalt *informasjonsflyt*. Dette kan forklares nærmere: Man antar at markedet er diskret i tid, det vil si at modellen har begrensede handlingstidspunkter (perioder) $t \in \{0, ..., T\}$. Markedet har også et endelig antall tilstander (scenarier) $s \in \mathbb{S}$. For hvert tidspunkt $t < T$ i modellen, finnes det et bestemt sett $\mathbb{P}_{t+1}$ av $\mathbb{S}$ av mulige tilstander som kan forekomme for neste periode $t + 1$. Det finnes altså flere mulige stier (veier) som prisen kan følge, fra den initielle tilstanden $\mathbb{P}_0 := \mathbb{S}$ til enn et sluttscenario $P_T \in \mathbb{P}_T$. Dette oppsettet danner automatisk et scenariotre. Se Figur 3.1. For hver enkelt periode $t < T$ avsløres også informasjon for tilstandene som er mulige for neste periode $t + 1$. Mer formelt kan man si at ny informasjon i settet $\mathbb{P}_{t+1}$, $t < T$ avsløres av en unik forelder$\mathcal{A}(P_{t+1}) = P_t \in \mathbb{P}_{t+1}$.



Figur 3.1: Eksempel på et scenariotre over to perioder.

Noderepresentrasjon

Som tidligere definerer man hver tilstand i treet for *noder*. Man har et endelig sett av noder $\mathcal{N}_t$, hvor $t \in \{0, ..., T\}$. Alle nodene $n_t \in \mathcal{N}_t$ har en unik forelder $\mathcal{A}(n_t) \in \mathcal{N}_{t-1}$, unntatt den initielle noden n_0 hvor $t = 0$. Alle noder $n_t \in \mathcal{N}_t$ har også et sett av barn $\mathcal{C}(n)$, unntatt sluttnodene n_T hvor $t = T$. Den initielle noden er treets *rot*, sluttnodene er treets *blader*, mens nodene mellom roten og bladene er treets *greiner*. Informasjonsnivået som er tilgjengelig ved nodene $n_t \in \mathcal{N}_t$ defineres som $\mathcal{F}_n = (\mathcal{F}_{n_t})$.

Underliggende verdipapir

Det eksisterer et endelig sett av omsettelige verdipapir $j \in \mathbb{J}$, hvor investoren selv ikke har noen påvirkning på verdipapirenes priser og utbytte. Prisen på verdipapirene j ved node n skrives ved vektoren $p_n := (p_{jn})$. Dersom verdipapiret utbetaler utbytte, antar man at dette inkluderes i prisen på verdipapiret, noe som enkelt kan rettferdiggjøres: Hvis man har en aksje i et selskap som utbetaler utbytte, skjer dette normalt sett like etter et handlingstidspunkt (oppgjør). Da synker verdien av selskapet, og dermed synker også selve prisen på aksjen. Med andre ord kan utbyttet representeres i aksjens pris. Man sier at prisen p_n er *adoptert* av informasjonsflyten $\mathcal{F}_{n_0} \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_{n_T}$, som betyr at prisene ikke kan være avhengig av andre faktorer enn det som er avslørt av informasjonsnivået i forrige periode. Alle faktorer som kan påvirke de underliggende verdipapirenes verdi for neste periode, er altså inneholdt i informasjonsnivået fra aktuell periode. Det vil si at faktorer som sannsynligheter, rente, og så videre, er allerede reflektert i prisene, og spiller fra her av ikke noen spesielt stor rolle.

Martingale-sannsynligheter

Dersom det eksisterer et sannsynlighetsmål μ over det endelige settet av tilstander $\mathbb{S}$, eksisterer også sannsynlighetsmålet for sluttnodene $\mathcal{N}_T$. Da kan man, ved baklengs induksjon, videre finne et uttrykk for sannsynlighetene for nodene som ikke er sluttnoder $n \notin \mathcal{N}_T$. Baklengs induksjon vil si at man steg for steg jobber seg bakover i et systemet. Den induserte sannsynligheten $\mu(n)$ for noden $n \notin \mathcal{N}_T$ må må være lik summen av sannsynlighetene for nodens barn $\mathcal{C}(n)$:

$$\mu(n) := \mu(\mathcal{C}(n)) := \sum\nolimits_{c \in \mathcal{C}(n)} \mu(c)$$

Dersom sannsynligheten $\mu(n)$ for $n \notin \mathcal{N}_T$ er positiv, eksisterer det også en positiv *overgangssannsynlighet* mellom noden n og barnet $c \in \mathcal{C}(n)$ som er slik at:

$$\mu(c|n) = \frac{\mu_{(c)}}{\mu_{(n)}} \tag{3.33}$$

Et slikt sannsynlighetsmål kjennetegner det man kaller et martingale-sannsynlighetsmål. Mer intuitivt er martingale-sannsynligheter risikojusterte sannsynligheter som holder den diskonterte prisvektoren for neste periode lik prisvektoren fra forrige periode:

Definisjon 3.8 (Martingale) *Hvis det eksisterer et sannsynlighetsmål μ slik at*

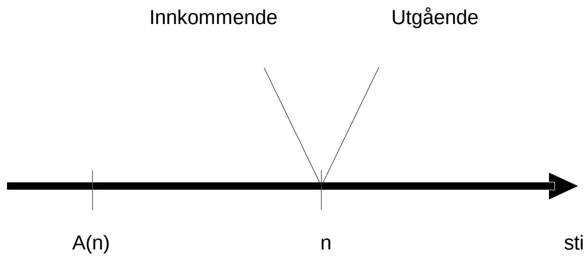
$$p_n = \partial_{(n)} E_\mu \left[p_c | \; n \right]$$

kaller man p_n for en martingale-prosess under sannsynlighetsmålet μ, mens μ kalles for et martingale-sannsynlighetsmål for prosessen p_n.

Dette er en nyttig egenskap som man får bruk for senere i verdsettingsproblemet.

3.2.2 Arbitrasjeproblemet

Fra tidligere vet man at arbitrasje er en mulighet til gevinst, samtidig som man er sikker på å ikke tape noe. En portefølje av forskjellige verdipapir uten initiell verdi, hvor det ikke eksisterer noen tilstander der porteføljen kan gå med tap, samtidig som at porteføljen i en framtidig kan bringe fram en positiv gevinst, kan altså karakteriseres som en arbitrasjemulighet. Teorien kan enkelt utvides.



Figur 3.2: Sti.

Posisjonen en investor holder i papir j ved *utgang* av node n er gitt ved porteføljen $\theta_n := (\theta_n^j) \in \mathbb{R}^J$. Tilsvarende er investorens posisjon i papir j ved *inngang* av node n gitt ved porteføljen $\theta_{\mathcal{A}(n)} := (\theta^j_{\mathcal{A}(n)}) \in \mathbb{R}^J$, hvor $\mathcal{A}(n)$ er foreldrenoden til node n. Man skiller altså mellom den innkommende porteføljen og den utgående porteføljen. Som diskutert tidligere, dersom det utbetales utbytte av noen verdipapir, skjer ofte utbetalingen like etter et oppgjør (her: node), noe som er med på å redusere prisen på verdipapiret for neste oppgjør. En investors nominelle fortjeneste er gitt ved verdien av den innkommende porteføljen minus verdien av den utgående porteføljen:

$$\sum_{j\in J} p^j_{\mathcal{A}(n)}\theta^j_n - \sum_{j\in J} p^j_n\theta^j_n = p_n \cdot \theta_{A(n)} - p_n \cdot \theta_n =: G_n(\theta) \tag{3.34}$$

I den initielle noden er $G_0(\theta) := -p_0 \cdot \theta_0$. Dersom det finnes en portefølje som kan gi mulighet for gevinst, samtidig som man er sikker på å unngå tap, har man arbitrasje i markedet.

Definisjon 3.9 (Arbitrasje) *Det er arbitrasje i markedet dersom systemet:*

$$G_n(\theta) \geq 0 \textit{ for alle } n \textit{ , og } p_n \cdot \theta_n \geq 0 \textit{ for hvert blad}$$

tillater løsningen $\theta = (\theta_n)$ *med minst en ulikhet for* $G_n(\theta) > 0$ *eller* $p_n \cdot \theta_n \geq 0$.

Prising av opsjoner forutsetter at arbitrasje i markedet ikke kan forekomme. I den diskrete opsjonsprisingsmodellen fra kapittel 2.3.1, ble det påvist at fravær av arbitrasje er ekvivalent med risikojusterete sannsynligheter.[6] Teoremet kan formuleres mer formelt ved *det fundamentale teoremet for prising av verdipapir*:

[6] Se Teorem 2.1, Risikonøytral verdsetting.

Teorem 3.2 (Det fundamentale prisingsteoremet) *Markedet er arbitrasjefritt dersom det eksisterer et sannsynlighetsmål μ over N_T slik at overgangsannsynlighetene tilfredstiller martingale-betingelsene:*

$$\delta_n p_n = E_\mu[\delta_c p_c|n] = \sum_{c \in \mathcal{C}(n)} \delta_c p_c \mu(c|n) \text{ for alle } n \notin \mathcal{N}_T$$

hvor δ er diskonteringsfaktorer.

Bevis. La være $\pi_n > 0$ sannsynlighetene for slutt-tilstandene $n \in \mathcal{N}_T$, og π_n sannsynlighetene for nodene $n \notin \mathcal{N}_T$.[7] Betrakt maksimeringsproblemet:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\limits_{\theta} & \sum\limits_{n} \delta_n \pi_n G_n(\theta) + \sum\limits_{n \in \mathcal{N}_T} \delta_n \pi_n p_n \cdot \theta_n \\ \text{slik at} & G_n(\theta) \geq 0 \text{ for alle } n \\ \text{og} & p_n \cdot \theta_n \geq 0 \text{ for hvert blad } n \in \mathcal{N}_T \end{array}}$$

Det lineære programmet ovenfor er kjent som *arbitrasjeproblemet.* Markedet er arbitrasjefritt dersom optimalverdien av det lineære programmet er null. Tilsvarende, er det arbitrasjemuligheter om problemet kan løses med portefølјevalg θ som gir en positiv optimalverdi. Programmet løses ved Lagranges metode. Man innfører multiplikatorene $\delta_n y_n \geq 0$ for sidevilkåret $G_n(\theta) \geq 0$, og $\delta_n \bar{y}_n \geq 0$ for $p_n \cdot \theta_n \geq 0$. Her er δ_n diskonteringsfaktoren som bestemmes av den sikre renten. Man får følgende Lagrange-uttrykk:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, y_n, \bar{y}_n) &= \begin{array}{l} \sum_n \delta_n \pi_n G_n(\theta) + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \delta_n \pi_n p_n \cdot \theta_n + \\ + \sum_n \delta_n y_n G_n(\theta) + \\ + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \delta_n \bar{y}_n p_n \cdot \theta_n \end{array} \\ &= \begin{array}{l} \sum_n \delta_n (\pi_n + y_n) G_n(\theta) \\ + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \delta_n (\pi_n + \bar{y}_n) p_n \cdot \theta_n \end{array} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Innsatt for $G_n(\theta)$ fra likning 3.34 har man:

$$\mathcal{L}(\theta, y_n, \bar{y}_n) = \begin{array}{l} \sum_{n \notin \mathcal{N}_T} \left[\sum_{c \in \mathcal{C}(n)} \delta_c (\pi_c + y_c) p_c - \delta_n (\pi_n + y_n) p_n \right] \cdot \theta_n \\ + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \delta_n (\bar{y}_n - y_n) p_n \cdot \theta_n \end{array} \tag{3.36}$$

Dualproblemet løses ved å minimere den optimale løsningen på maksimeringsproblemet. Den optimale løsningen for maksimeringsproblemet er satt av portefølјevalget θ. Dualproblemet løses med hensyn på sannsynlighetene π :

$$\min_{\pi} \left(\max_{\theta} \mathcal{L}(\theta, y_n, \bar{y}_n) \right) \tag{3.37}$$

Fra Lagrange-utrykket 3.36 observerer man at den minste oppnåelige løsningen er når:

$$\sum\nolimits_{c \in \mathcal{C}(n)} \delta_c (\pi_c + y_c) p_c = \delta_n (\pi_n + y_n) p_n \tag{3.38}$$

[7] Informasjon om sannsynlighetene π_n er reflektert i prisene p_n og kan bestemmes ved baklengs induksjon eller ved å løse det lineære programmets dualproblem (risikonøytrale sannsynligheter).

Likning 3.38 holder dersom likningen:

$$\pi_n + y_n = \sum\nolimits_{c\in\mathcal{C}(n)} (\pi_c + y_c) \tag{3.39}$$

holder. Man kan definere:

$$\mu(c|n) = \frac{\pi_c + y_c}{\pi_n + y_n} \tag{3.40}$$

som et sannsynlighetsmål over tilstandene som gjør at dualproblemet har optimal løsning. Dette tilfredstiller definisjonen av martingale-sannsynlighetene.[8] Dersom man videre setter $\pi = \mu$ og hver $y_n, \bar{y}_n = 0$, har man fra fra likning 3.35 og 3.36:

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_n \delta_n \mu_n G_n(\theta) + \sum\nolimits_{n\in\mathcal{N}_T} \delta_n \mu_n p_n \cdot \theta_n \\ = \; & \sum\nolimits_{n\notin\mathcal{N}_T} \left[\sum\nolimits_{c\in\mathcal{C}(n)} \delta_c \mu_c p_c - \delta_n \mu_n p_n \right] \cdot \theta_n = 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Da er den optimale løsningen er lik null for alle mulige porteføljevalg θ. Man har dermed bevist at eksistens av et sannsynlighetsmål som tilfredstiller martingalevilkårene er ekvivalent med fravær av arbitrasje [2]. ■

3.2.3 Verdsetting

Så langt har man sett på verdipapirene $j \in J$, og porteføljen $\theta = (\theta_n^j)$. Anta så at det finnes et annet investeringsobjekt, med dividendeprosessen:

$$D = (D_n)_{n\neq 0} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \setminus 0} \tag{3.42}$$

Man ser på dette som et alternativt prosjekt til porteføljen θ, og sammenlikner den initielle verdien av dette prosjektet, med den forventningsverdien til porteføljen. Dette kan betraktes fra to synsvinkler:

(1) Investorer av porteføljen θ finner den minste initielle prisvektoren p_0 for porteføljen θ_0 som gjør det mulig at fortjenesten i enhver tilstand er større eller lik fortjenesten den alternative investeringen D. For investorer med en lang posisjon i prosjektet D, kan ikke prisen på dette prosjektet være høyere enn den minste, løsbare p_0 (øvre grense). Man kaller dette å *evaluere fra oversiden.*

(2) Investorer av prosjektet D optimerer ved å finne den høyeste prisen p_0 for porteføljen θ_0 som gjør det mulig at fortjenesten til prosjektet D i enhver tilstand er bedre eller lik investeringen i porteføljen θ. For investorer med en kort posisjon i prosjektet D kan ikke prisen på dette prosjektet være lavere enn den høyeste, løsbare p_0 (nedre grense). Man kaller dette å *evaluere fra undersiden.*

[8] Se Definisjon 3.8, Martingale.

Verdsetting fra oversiden

Man fokuserer på investoren av porteføljen θ sitt optimeringsproblem. Hans optimalverdi er den minste initielle prisvektoren som kan bli satt, samtidig som at verdien av det sikre prosjektet ikke overstiger verdien av porteføljen i alle mulige greiner, og at det ikke kan være gjeld for alle mulige blader (slutt-tilstander). Han står ovenfor følgende optimeringsproblem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{min} & p_0 \cdot \theta_0 \\ \text{slik at} & p_n \cdot \theta_{\mathcal{A}(n)} - p_n \cdot \theta_n \geq D_n \text{ for } n \neq 0 \\ \text{og} & p_n \cdot \theta_n \geq 0 \text{ for hver } \textit{blad } n \in \mathcal{N}_T \end{array}} \qquad (\bar{\mathbb{P}}[D])$$

Dette kaller man for *primalproblemet*, $\bar{\mathbb{P}}[D]$. Investorens optimalverdi er den minste initielle prisvektoren som gjør investeringen aktuell. Ved å holde fortjenesten bedre eller lik fortjenesten til det alternative prosjektet D, og forsikre seg om at enhver slutt-tilstand ikke blir negativ, unngår han tap av alternativ fortjeneste, og eliminerer all risiko. Praktisk gjøres dette ved å endre posisjonen i porteføljen θ i hver tilstand (dynamisk porteføljevalg). Å kontinuerlig endre beholdningen for en portefølje, er det samme argumentet Black & Scholes brukte i sin modell for å holde en investering risikofri, og det er det samme som jeg under den binære modellen omtalte som delta-hedging. En stadig justert portefølje θ sier man at representerer en *selvfinansierende investeringsstrategi* for optimeringsproblemet. Den optimale løsningen på primalproblemet $\bar{\mathbb{P}}[D]$ er den høyeste prisen en investorer av prosjektet D kan kreve for D. Dette kalles for *den øvre grensen* $\bar{\mathrm{v}}(D)$:

$$\bar{v}(D) := \inf \bar{\mathbb{P}}[D] \tag{3.43}$$

En lang posisjon i prosjektet D med høyere priser enn den øvre grensen $\bar{\mathrm{v}}(D)$ er overpriset. Det er verdt å merke seg at primalproblemet ikke inneholder noen parametre for nytte eller risikoaversjon. Dette er faktorer som allerede er er tatt hensyn til i informasjonsnivået $\mathcal{F}$, og som er med på å utforme prisene for nye tilstander.

Optimeringsproblemet $\bar{\mathbb{P}}[D]$ løses ved Lagranges metode. Man innfører Lagrange-multiplikatorene $\delta_n \mu_n \geq 0$ til den selvfinansierende beskrankningen. Tilsvarende tildeles Lagrange-multiplikatoren $\delta_n \bar{\mu}_n \geq 0$ til beskrankningen om at sluttnodene ikke kan være negative.[9] Lagrange-multiplikatorene kan forklares som en faktor som kan brukes til å slakke eller stramme på beskrankningene. Dette har naturligvis en pris, *skyggeprisen* μ_n, hvor δ_n er diskonteringsfaktoren. Dersom investoren for eksempel tar ut mengden w_n av fortjenesten ved node n, vil de totale kostnadene stige med $\delta_n \mu_n w_n$.

$$p_n \cdot \theta_{\mathcal{A}(n)} - p_n \cdot \theta_n - w_n \geq D_n \text{ for } n \neq 0 \tag{3.44}$$

[9] For optimal løsning på optimeringsproblemet må multiplikatorene alltid være større enn eller lik null.

Lagrangeuttrykket utformes slik:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta,\mu_n,\bar{\mu}_n) &= \left[\begin{array}{r} p_0\cdot\theta_0 + \sum\limits_{n\neq 0}\delta_n\mu_n\left[D_n + p_n\cdot\theta_n - p_n\cdot\theta_{\mathcal{A}(n)}\right] \\ -\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_T}\delta_n\bar{\mu}_n p_n\cdot\theta_n \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{r} \sum_{n\neq 0}\delta_n\mu_n D_n + \left[p_0 - \sum_{c\in\mathcal{C}(0)}\delta_c\mu_c p_c\right]\cdot\theta_0 \\ +\sum_{n\notin 0\cup\mathcal{N}^T}\left[\delta_n\mu_n p_n - \sum_{c\in\mathcal{C}(n)}\delta_c\mu_c p_c\right]\cdot\theta_n \\ +\sum_{n\in\mathcal{N}_T}\left[(\delta_n\mu_n - \delta_n\bar{\mu}_n)p_n\right]\cdot\theta_n \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Man observerer følgende, forenklede Lagrangeuttrykk:

$$\mathcal{L} = \sum_{n\neq 0}\delta_n\mu_n D_n \tag{3.46}$$

når disse vilkårene er oppfylt:

$$\begin{aligned}
&(1)\ p_0 = \sum_{c\in\mathcal{C}(0)}\delta_c\mu_c p_c \\
&(2)\ \delta_n\mu_n p_n = \sum_{c\in\mathcal{C}(n)}\delta_c\mu_c p_c,\ \forall n\notin 0\cup\mathcal{N}_T \\
&(3)\ \delta_n\mu_n = \delta_n\bar{\mu}_n\ \forall\ n\in\mathcal{N}_T
\end{aligned}$$

Vilkår (1) og (2) kan slås sammen:

$$\delta_n\mu_n p_n = \sum_{c\in\mathcal{C}(n)}\delta_c\mu_c p_c \forall n\notin N_T \text{ når } \mu_0 = 1 \text{ og } \mu_n > 0 \tag{3.47}$$

Intuitivt betyr dette at den aktuelle prisvektoren må være lik summen av prisvektorene for neste periode, for løsbare skyggepriser, diskontert for en periode. Man har at skyggeprisen for hver node som ikke sluttnode, er lik summen av skyggeprisene til nodens barn:

$$\mu_n = \sum_{c\in\mathcal{C}(n)}\mu_c \text{ for } n\notin\mathcal{N}_T \tag{3.48}$$

I den initielle tilstanden er skyggeprisen naturlig nok $\mu_0 = 1$, og for optimal løsning har man at skyggeprisene ikke kan bli negative $\mu_n \geq 0$. Eksisterer det slike skyggepriser, kan μ definere et sannsynlighetsmål over $\mathcal{N}_t \leftrightarrow \mathbb{S}$. Sannsynlighetsmålet oppfyller også martingale-vilkårene[10], og sannsynlighetene blir å betrakte som risikonøyrale. Vilkår (3) forsvinner fordi $\mu_n = \bar{\mu}_n$ for $n\in\mathcal{N}_T$.

Primalproblemet $\mathbb{P}[D]$ har en optimal løsning hvis dualproblemet $\mathbb{D}[D]$ har en optimal løsning, og at optimalverdiene er like.[11] Dualproblemet får man ved å maksimere minimeringsproblemet:

$$\max_{\mu_n\geq 0}\left(\min_{\theta_n}\mathcal{L}\right) \tag{3.49}$$

Beskrankningene i dualproblemet oppstår ved de optimale porteføljevalgene θ_n som blir gjort i primalproblemet. Dualproblemet går dermed ut på å maksimere

[10] Se Definisjon 3.8, Martingale.

[11] Se Definisjon 3.6, Dualitetsprinsippet.

over de risikonøytrale sannsynlighetene $\mu_n \geq 0$. Dualproblemet $\bar{\mathbb{D}}[D]$ kan dermed skrives:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{max} & E_\mu \ \sum_{n \neq 0} \delta_n D_n \\ \text{slik at} & \delta_n \mu_n p_n = \sum_{c \in \mathcal{C}(n)} \delta_c \mu_c p_c, \forall n \notin \mathcal{N}_T \end{array}} \qquad (\bar{\mathbb{D}}[D])$$

Intuitivt forteller dette at den optimale løsningen for dualproblemet finnes ved å maksimere fortjenesten til det alternative prosjektet D over sannsynlighetsmålet E_μ, diskontert for en periode, samtidig som at prisvektoren i enhver node som ikke er sluttnode er lik summen av de forventede prisvektorene for nodens barn, ved de risikonøytrale sannsynlighetene μ, diskontert for en periode.

Superhedging-problemet har altså en optimal løsning dersom dualproblemet $\bar{\mathbb{D}}[D]$ har en optimal løsning. En forutsetning for at dualproblemet skal ha en optimal løsning er at det eksisterer et sannsynlighetsmål som oppfyller martingale-vilkårene. Fra tidligere hadde man at eksistens av et martingale-sannsynlighetsmål var ekvivalent med fravær av arbitrasje. Ved et eksistens av et martingale-sannsynlighetsmål kan man dermed anta at markedet er fritt for arbitrasjemuligheter, men man har foreløpig ikke nok opplysninger til å kunne bestemme når det faktisk eksisterer et entydig martingale-sannsynlighetsmål. Det viser seg at dette har en sammenheng med et fullstendig verdipapirmarked.[12] Den øvre grensen kan man uttrykke ved dualproblemet [2]:

$$\begin{aligned} \bar{v}(D) \quad : &= \sup_{\mu \in M} \bar{\mathbb{D}}[D] \\ : &= \sup_{\mu \in M} E_\mu \sum_{n \neq 0} \delta_n D_n \end{aligned} \tag{3.50}$$

hvor M er et martingale sannsynlighetsmål. Den øvre grensen kan betraktes som et *tak* for den optimale løsningen. Priser over taket vil ikke være optimalt for investorer av porteføljen, og en slik feilprising kan bli betraktet som en arbitrasjemulighet for investorer med en lang posisjon D. Den øvre grensen $\bar{v}(D)$ er den høyeste prisen som kan bli satt i markedet, som at gjør investeringen i porteføljen er minst like gunstig som investeringen i det sikre prosjektet D. For å finne den nedre grensen, evaluerer man fra undersiden.

Verdsetting fra undersiden

Man kan fokusere på investoren av det sikre prosjektet D, som finner den høyeste prisvektoren p_0 for porteføljen θ_0 som kan bli satt slik at fortjenesten til det sikre prosjektet D_n i enhver node blir større eller lik fortjenesten til porteføljen θ. Han møter dermed følgende optimeringsproblem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{max} & p_0 \cdot \theta_0 \\ \text{slik at} & D_n \geq p_n \cdot \theta_{\mathcal{A}(n)} - p_n \cdot \theta_n \text{ for } n \neq 0 \\ \text{og} & p_n \cdot \theta_n \leq 0 \text{ for } n \in \mathcal{N}_T \end{array}} \qquad (\underline{\mathbb{P}}[D])$$

Også her må posisjonen i porteføljen θ endres for hver node, som i superhedging-problemet. Løsningen på primalproblemet, evaluert fra undersiden, er den maksimale prisen en investor i porteføljen θ kan tvinge ut av markedet. Priser lavere

[12] Se Kapittel 3.2.4, Fullstendighet.

enn den maksimale p_0 vil gi arbitrasjemuligheter for investorer med kort posisjon i D. Den optimale løsningen på primalproblemet, evaluert fra undersiden, gir oss dermed den nedre grensen $\underline{\mathrm{v}}(D)$:

$$\underline{\mathrm{v}}(D) := \sup \underline{\mathbb{P}}[D] \tag{3.51}$$

Videre kan dualproblemet utledes på tilsvarende måte som ved superhedgingproblemet:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & E_\mu \sum_{n \neq 0} \delta_n D_n \\ \text{slik at} & \delta_n \mu_n p_n = \sum_{c \in \mathcal{C}(n)} \delta_c \mu_c p_c, \; \forall n \notin \mathcal{N}_T \end{array}} \tag{$\underline{\mathbb{D}}[D]$}$$

Optimal løsning er oppnåelig dersom dualproblemet har en løsning. Da har vi at den nedre grensen $\underline{\mathrm{v}}(D)$ kan skrives ved dualproblemet [2]:

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{v}}(D) \quad &: \; = \inf_{\mu \in M} \quad \underline{\mathbb{D}}[D] \\ &: \; = \inf_{\mu \in M} E_\mu \sum_{n \neq 0} \partial_n D_n \end{aligned} \tag{3.52}$$

hvor M er et martingale-sannsynlighetsmål. Lavere priser enn dette vil gi arbitrasjemuligheter.

3.2.4 Fullstendighet

De to verdsettingsoperatorene $\bar{\mathrm{v}}(D)$ og $\underline{\mathrm{v}}(D)$ opererer i forhold til prosjektet D. Priser utenfor intervallet $[\underline{\mathrm{v}}(D), \bar{\mathrm{v}}(D)]$ er arbitrasjemuligheter; Prosjektet vil være overpriset dersom prisen er høyere enn den øvre grensen $\bar{\mathrm{v}}(D)$, og det vil være underpriset dersom prisen er lavere enn den nedre grensen $\underline{\mathrm{v}}(D)$. Et interessant spørsmål i denne sammenheng er når man har en unik verdsettingsoperator som befinner seg inne i dette intervallet. Man finner svaret ved å se på beskrankningene for optimeringsproblemene. For den øvre grensen hadde man at den potensielle investeringen måtte tilfredstille følgende krav:

$$p_n \cdot \theta_{\mathcal{A}(n)} - p_n \cdot \theta_n \geq D_n \tag{3.53}$$

Motsatt hadde man for den nedre grensen:

$$D_n \geq p_n \cdot \theta_{\mathcal{A}(n)} - p_n \cdot \theta_n \tag{3.54}$$

En felles løsning for begge beskrankningene, finner man i markedsrommet **D**, som består av alle dividendeprosesser $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_n)_{n \neq 0} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \setminus 0}$ som tilfredstiller kravet

$$\mathcal{D}_n = p_n \cdot \theta_{\mathcal{A}(n)} - p_n \cdot \theta_n \tag{3.55}$$

for porteføljeprosessene $\theta = (\theta_n)$ med $\theta_n = 0$ ved hvert blad. Denne løsningen er oppnåelig ved dynamiske porteføljevalg, det vil si å stadig endre beholdningen i porteføljen.

Tidligere er det bevist at fravær av arbitrasje også er ekvivalent med eksistens av martingale-sannsynligheter.[13] Det er nå interessant å se på når det eksisterer

[13] Se Teorem 3.2, Det fundamentale prisingsteoremet.

et unikt, entydig sannsynlighetsmål. Det viser seg at dette har nær sammenheng med fullstendighet i markedet. Når et marked er fullstendig (complete markets) kan det bevises at det eksisterer ett entydig sannsynlighetsmål som tilfredstiller martingale-vilkårene [2]. Mer formelt kan man uttrykke det slik:

Teorem 3.3 (Entydige verdier og fullstendige markeder) *Ved fravær av arbitrasje gjelder følgende sammenhenger:*

(1) *Prosessen* $D \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}\setminus 0}$ *har en unik verdi* $v(D) = \underline{v}(D) = \bar{v}(D)$ *hvis* $D \in \mathbf{D}$

(2) *Eksistens av et entydig martingalt sannsynlighetsmål gjelder dersom markedet er fullstendig.*

Bevises av Flåm [2]. Se også teorem 2.2, om entydighet. Eksistens av et fullstendig marked viser seg altså å ha pene egenskaper for verdsetting av verdipapir, noe som også er gjeldende for flere andre finansielle problem. I denne sammenheng er det interessant å spørre seg om forutsetningen av et fullstendig marked er realistisk? Et finansmarked er fullstendig dersom enhver investor kan kvitte seg med all finansiell risiko gjennom handel i finansmarkedene. Dette er neppe mulig i praksis [11].

Dersom markedet ikke er fullstendig, får man ikke-lineære sidevilkår i det linære programmet, og dermed flere verdsettingsoperatorer. Forskjellige aktører kan ha forskjellige verdsettingsoperatorer[4]. Med flere løsbare verdsettingsoperatorer, får man ikke lenger noen entydig opsjonspris. Det er imidlertid mulig å ta hensyn til aktørenes nyttefunksjoner i opsjonsberegningen, noe som i dette tilfellet kan bidra til en entydig opsjonspris. Dette er blant andre vist av King [4], men det blir ikke fokusert mer på dette i denne oppgaven.

Ved inkonsistente prismatriser, er det ikke mulig å løse ut for noen verdsettingsoperator. Programmet har da ingen løsning.

3.2.5 Valgmuligheter

Innledningsvis i dette kapitlet, antok man at utbetalingsprosessen D er fullstendig eksogen, det vil si at investoren ikke har noen påvirkning på det som utbetales. I enkelte tilfeller kan investoren imidlertid være med å påvirke denne prosessen ut i fra valgmuligheter som han har. Dersom $x = (x_t)$ er en underliggende prosess som påvirker utbetalingen, men samtidig er fullstendig kontrollert av investoren, kan vi uttrykke utbetalingsprosessen på følgende form:

$$D_t(s) = \mathcal{D}_t(s, x_0(s), ..., x_t(s)) \tag{3.56}$$

Det vil videre bli forklart hvordan valgmulighetene vil påvirke utbetalingen, og hvordan dette kan settes i sammenheng med *prising av opsjoner*. Det presenteres en diskret versjon av en slik valgprosess, da da det viser seg også at opsjonspriser i svært mange sammenhenger har en tendens til å følge en diskret utvikling. Det blir lagt større vekt på resultater, og heller referert til nødvendige bevis.

Man antar nå at den tidsindekserte prosessen $x = (x_t)$ er tilpasset informasjonsnivået $\mathcal{F}_t$ for det *diskrete rommet* $t \in \{0, ..., T\}$. Det vil si at investorens valgmuligheter er begrenset til bestemte handlingstidspunkter. Tilfeller på dette oppsettet er ganske vanlige i finansverdenen. Mange finansielle problem har utbetalingen $D_t = \mathcal{D}_t(S_0, ..., S_t, x_0, ..., x_t)$ ved tid t, hvor (S_t) er det underliggende verdipapiret. Dette er også gjeldende for opsjoner. Utbetalingen av en kjøpsopsjon[14] (lang posisjon) C_t kan skrives:

$$C_t := \max_{\tau \in T(t)} \{S_\tau - K_\tau, 0\} = \max_{\tau \in T(t), x_\tau \in \{0,1\}} \{x_\tau(S_\tau - K_\tau), 0\} \tag{3.57}$$

når S_τ er verdien av det underliggende ved bortfall τ, mens K_τ er innløsningskursen. Tilsvarende har man at utbetalingen av en salgsopsjon[15] (lang posisjon) P_τ kan skrives:

$$P_t := \max_{\tau \in T(t)} \{K_\tau - S_\tau, 0\} = \max_{\tau \in T(t), x_\tau \in \{0,1\}} \{x_\tau(K_\tau - S_\tau), 0\} \tag{3.58}$$

Avhengig av kontrakten, kan opsjonene ha forskjellige innløsningstidspunkter, $\tau \in \mathbb{T} \subseteq (0, ..., T)$. Som nevnt tidligere kan en såkalt europeisk opsjon kun innløses ved bortfallsdagen, $T(t) = \{t\}$ og $\mathbb{T} = (T)$. En opsjon av amerikansk type kan derimot innløses på ethvert tidspunkt før bortfallsdagen, $T(t) = \{t\}$ og $\mathbb{T} = (0, ..., T)$, mens en bermudaopsjon kan innløses på bestemte tidspunkter før bortfallsdagen, $T(t) = \{t\}$ og $\mathbb{T} \subset (0, ..., T)$.[16]

Man innløser opsjonen maksimalt én gang. Fra teorem 3.3 vet man at prosessen $D \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \setminus 0}$ har en unik verdi $v(D) = \underline{v}(D) = \bar{v}(D)$ hvis $D \in \mathbf{D}$, og at det eksisterer et unikt martingalt sannsynlighetsmål m ved et fullstendig marked. Man står dermed ovenfor følgende maksimeringsproblem:

$$\max E_\mu \textstyle\sum_{t \geq 1} \delta_t \mathcal{D}_t x_t \tag{3.59}$$

når:

(1) (x_t) er tilpasset $\mathcal{F}_t$,
(2) alle $x_t \in \{0, 1\}$,
(3) $\sum_{t \notin \mathbb{T}} x_t = 0$,
(4) og $\sum_{t \in \mathbb{T}} x_t \leq 1$

for både en kjøpsopsjon eller salgsopsjon, dersom $C_t = \mathcal{D}_t$ eller $P_t = \mathcal{D}_t$. Det kan videre bevises [2] at den optimale løsningen til superhedging-problemet $\bar{\mathbb{P}}(D)$, er gitt ved:

$$\boxed{\bar{\mathrm{V}}(x) := \sup_{\mu \in M} \left\{ E_\mu \sum_{t \geq 1} \delta_t \mathcal{D}_t(x_0, ..., x_t) \right\}} \tag{$\bar{\mathrm{V}}(x)$}$$

dersom prosessen:

$$x \to \sum_{t \geq 1} \delta_t \mathcal{D}_t(x_0, ..., x_t) \tag{3.60}$$

er konveks. I dette tilfellet finner man optimalverdien i et ekstremalpunkt innenfor intervallet $x \in X$. Dersom man har et fullstendig verdipapirmarked har man altså et unikt martingale-sannsynlighetsmål, og den øvre grensen $\bar{\mathrm{V}}(x)$ er lik den nedre grensen $\underline{\mathrm{V}}(x)$. Man har da en felles løsning (Nash-likevekt), og den nedre grensen trenger ikke å utledes. For gitte forutsetninger, er den optimale

[14] Kapittel 2.2.2, Kjøpsopsjoner.
[15] Kapittel 2.2.3, Salgsopsjoner.
[16] Kapittel 2.2.4, Egenskaper.

løsningen på superhedging-problemet opsjonsverdien evaluert fra den initielle tilstanden.

Dersom verdsettingsproblemet $\bar{\mathrm{V}}(x)$ oppdateres for hver periode, da ny informasjon om neste periode dukker opp, har man en svært effektiv metode for prising av opsjoner av amerikansk type, da amerikanske opsjoner kan utøves for hver periode fram til bortfall. Modellen kan på denne måten hele tiden oppdatere seg for ny informasjon om prisutviklingen, og blir i stand til å ta hensyn til faktorer som ikke var observerbare i den initielle tilstanden.

3.2.6 Diskusjon

Verdsetting av opsjoner ved lineær programmering går ut på å finne et intervall som opsjonsverdien må befinner seg innenfor. Dette gjøres ved bruk av dualitetsprinsippet. Metoden viser seg å ikke kreve så strenge forutsetninger:

- Det trengs sannsynligheter som oppfyller martingale-vilkårene. Dette er ekvivalent med fravær av arbitrasje.
- For en entydig opsjonsverdi, behøves et entydig martingale-sannsynlighetsmål. For dette trengs det et fullstendig marked. I ufullstendige markeder blir sidevilkårene ikke-lineære, noe som gjør beregningene av opsjonsverdien mer komplisert.
- Informasjonflyten $\mathcal{F}_{n_0} \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_{n_T}$ er observerbar for enhver periode, og inneholder alle faktorer som kan påvirke opsjonsprisen.
- Det antas ingen restriksjoner for kort salg.

Et arbitrasjefritt marked, og eksistens av martingale-sannsynligheter er en rimelig antakelse. Antakelsen om et fullstendig finansmarked er kanskje en streng antakelse, men er den eneste antakelsen som er tvilsom i verdsetting av opsjoner ved lineær programmering. Programmet kan imidlertid ta hensyn til ufullstendige markeder, men det fører til mer kompliserte utregninger fordi at andre faktorer, som aktørenes nyttefunksjoner må trekkes inn i beregningene. Den stokastiske prosessen for prisutviklingen er bare avhengig av informasjonsflyten $\mathcal{F}_{n_0} \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_{n_T}$, og det er ikke nødvendig å anta at den følger en geometrisk-Brownsk bevegelse som i Black-Scholes-modellen. Informasjonsnivået $\mathcal{F}$ i den gjeldende periode tar hensyn til alle faktorer som kan påvirke opsjonsprisen for neste periode, det vil si at faktorer som renteendring, transaksjonskostnader, skatter, dividendeutbetaling, volatilitet, og så videre, kan implementeres i informasjonsnivået, og dermed tas med i beregningen av opsjonsverdien. For at metoden skal fungere må optimeringsproblemet oppdateres for hver periode, da ny informasjon for neste periode dukker opp. Dette passer med opsjoner av amerikansk type. Som ved den binære modellen, er det altså ikke bare sluttresultatet (sluttscenariet) som har betydning for opsjonsverdien, men også prosessen fram til sluttresultatet. Metoden blir på denne måten svært robust.

Kapittel 4

Eksperimenter

At man kan bruke lineær programmering til å verdsette opsjoner i reelle situasjoner kan vises med fabrikkerte eksempler. Dataene som tas med må derfor være realistiske og observerbare. Dette kapitlet illustrerer hvordan man kan implementere realistiske og observerbare data i den teoretiske modellen, og beregne et troverdig resultat. Opsjonsprisen kan løses både ved tradisjonell regning, eller ved bruk av dataprogram. Dette kapitlet består av følgende avsnitt:

- *Avsnitt 4.1* spesifiserer modellen nærmere.
- *Avsnitt 4.2* viser eksempler som løses ved tradisjonell regning (Lagranges metode).
- *Avsnitt 4.3* viser eksempler som løses ved hjelp av dataprogram (AMPL).
- *Avsnitt 4.4* diskuterer hvordan modellen kan utvides.

4.1 Modellspesifikasjon

Anta først at man står ovenfor en opsjon av såkalt *amerikansk* type. Det vil si at opsjonen kan innløses på ethvert tidspunkt før bortfall. Man at den amerikanske opsjonen er *diskret i tid*, det vil si at opsjonen kun kan innløses på bestemte tidspunkter før bortfall.

Transportproblem

Man konstruerer et transportproblem, hvor $ex\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N} \setminus 0$ er settet av nodene hvor opsjonen kan bli innløst. Dette vil i praksis si at opsjonen kan bli innløst for enhver node $n \in ex\mathcal{N}$ som ikke er startnode $n \neq 0$. Man antar også at en opsjon kun kan bli innløst en gang. For hver node hvor opsjonen kan innløses $n \in ex\mathcal{N}$, opprettes det en duplikat node n'. Mellom noden n og dens duplikate node n' opprettes det en direkte gren (n, n'). Man oppretter så en gren fra hver duplikate node n', og fra hver sluttnode $n \in \mathcal{N}_T$ i hele nettverket, til en felles hjelpenode s. Hjelpenoden s er en slags sluk som indikerer det som renner ut av nettverket. Oppsettet for dette transportproblemet illustreres senere, i Figur 4.1.

Videre antar man at hver sluttnode eller dupliserte node som leder ned i sluken har et begrenset kapasitetsintervall på $[0, 1]$. Det vil si at det ikke kan flyte noen negativ mengde ned i sluken (kan ikke flyte noe motsatt vei), samt at mengden som flyter igjennom ikke kan være større enn 1. Dette er fordi at en opsjon ikke kan bli innløst mer enn en gang. De andre nodene i nettverket har ubegrenset kapasitet, men kan ikke bli negativ $[0, +\infty)$. Det vil si at disse nodene kun opererer som transportnoder, det som flyter ut av disse nodene er det samme som det som kommer inn.

Den eneste tilførselen til nettverket skjer i roten $n = 0$. Tilførselen (supply) $|\mathbb{S}|$ vil i et lukket nettverk være det samme som absorberes i sluken (demand) $|\mathcal{N}_T|$, altså det som kan tas ut av nettverket.

$$\begin{aligned} Inn &= Ut \\ Supply &= Demand \\ |\mathbb{S}| &= |\mathcal{N}_T| \end{aligned}$$

Merk igjen at kapasiteten er lik 1 fra hver sluttnode eller dupliserte node som fører til sluken. Dette fører til at mengden som tilføres nettverket også må være lik antall sluttnoder eller antall scenarier.

Ved den duplikate noden n' av den originale noden $n \in ex\mathcal{N}$, lar man $D_{n'}$ være lik utbyttet hvis opsjonen er innløst ved node n. Ved hvert blad $n \in \mathcal{N}_T$, lar man D_n være lik verdien av å ikke innløse der. Man har at $y_{(n',sluk)}$ er kvantumet som flyter gjennom den dupliserte noden til sluken, og at $y_{(n,sluk)}$ er kvantumet som flyter fra den originale noden til sluken. Man lar $y = (y_g)$ betegne ethvert rimelig flytmønster langs grenene $g \in G$ i nettverket. Fra kapittel 3 hadde man at opsjonsverdien, evaluert i starttilstanden, kan finnes ved den optimale løsningen $\bar{\mathrm{V}}(x)$ fra superhedging-problemet, for fullstendige markeder. Med y som beslutningsvariabel, kontrollert av investoren, finner man her opsjonsverdien ved å maksimere følgende matematiske uttrykk med hensyn på martingale-sannsynlighetene μ, hvor δ_n er diskonteringsfaktoren over nodene [2]:

$$y \to \sup_{\mu \in M} E_\mu \left\{ \sum_{n \in ex\mathcal{N}} \delta_n D_{n'} y_{(n',sluk)} + \sum_{n \in \mathcal{N}_T} \delta_n D_n y_{(n,sluk)} \right\} \tag{$\bar{\mathrm{V}}(y)$}$$

Maksimeringsproblem

For opsjoner ved den amerikanske typen, hadde man at opsjonen kunne innløses ved alle de bestemte handlingstidspunktene før bortfall. Ved de europeiske opsjonene kan bare opsjonen innløses ved bortfall. Man kan skrive følgende sammenhenger:

$$\begin{aligned} amerikansk &: \; ex\mathcal{N} = \mathcal{N} \\ europeisk &: \; ex\mathcal{N} = sluttnodene \end{aligned}$$

For en *kjøpsopsjon* kan man skrive det generelle resultatet:

$$\begin{aligned} D_{\text{innløs}} &= D_{n'} = C_n = \max(V_n - I, 0), \; n' \in ex\mathcal{N} \\ D_{\text{ikke innløs}} &= D_n = 0, \; n \in ex\mathcal{N} \end{aligned}$$

når I er innløsningsprisen. Tilsvarende kan man skrive for en *salgsopsjon*:

$$\begin{aligned} D_{\text{innløs}} &= D_{n'} = P_n = \max(I - V_n, 0),\ n' \in ex\mathcal{N} \\ D_{\text{ikke innløs}} &= D_n = 0,\ n \in ex\mathcal{N} \end{aligned}$$

Dette gjelder generelt for utbetaling av opsjoner, uavhengig av hvor mange tilstander som skulle eksistere, eller hvilken type opsjon det er. Siden $D_n = 0$ for alle $n \in ex\mathcal{N}$, kan man forenkle maksimeringsproblemet $\bar{V}(y)$:

$$\sup_{\mu \in M} E_\mu \left\{ \sum_{n \in ex\mathcal{N}} \delta_n D_{n'} y_{(n',sluk)} \right\} \tag{4.1}$$

Resultatet ovenfor gjelder for både kjøpsopsjoner og salgsopsjoner, da $C_n = D_n$ og $P_n = D_n$. Som tidligere, skriver man dualproblemet under forutsetingen av at det eksisterer et martingale-sannsynlighetsmål. Prisvektoren for hver tilstand må være lik forveningen til prisvektoren for neste tilstand, diskontert for en periode. Da kan man skrive følgende, generelle maksimeringsproblem for opsjoner:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\limits_{\mu,y} & \left\{ \sum\limits_{n \in ex\mathcal{N}} \mu_n \delta_n D_{n'} y_{(n',sluk)} \right\} \\ \text{når} & \begin{array}{ll} (1) & \delta_n \mu_n V_n = \sum_{c \in \mathcal{C}(n)} \delta_c \mu_c V_c,\ \forall n \notin \mathcal{N}_T \\ (2) & y_{(n',sluk)} = [0,1] \end{array} \end{array}} \tag{4.2}$$

når $V = (V_n)$ er prisvektoren til opsjonens underliggende verdipapir. Maksimeringsproblemet ovenfor skal i prinsippet være gjeldende for alle typer opsjoner, noe som videre skal undersøkes ved eksempler.

4.2 Eksempler ved regning

At metoden fungerer i praksis kan illustreres ved tradisjonell regning. Aller først ser jeg på det enkleste tilfellet hvor det bare eksisterer ett verdipapir, i tillegg til den sikre diskonteringsfaktoren δ. Man evaluerer i første omgang over en periode. Videre viser jeg hvordan metoden kan utvides til å ta hensyn til flere verdipapir og flere tilstander.

4.2.1 Ett underliggende verdipapir

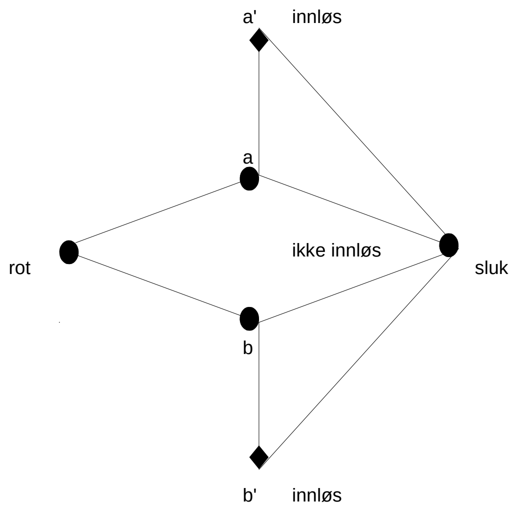
Man antar at det kun eksisterer ett verdipapir i markedet i tillegg til den sikre renten. Verdipapiret kan ta to mulige verdier for neste periode. Sammen med den sikre investeringen, finnes det altså to investeringsmuligheter og to tilstander i markedet. Med like mange investeringsmuligheter som antall tilstander, har man et fullstendig finansmarked. Man antar at man har en kjøpsopsjon på et underliggende papir som kan ta tilstand a eller b for neste periode. Den initielle tilstanden er tilstand 0. Videre antar man at markedsverdien ved tilstandene er gitt ved V_0,V_a, og V_b. Når man står ovenfor en modell med kun én periode, er det mulig å innløse opsjonen ved scenario a eller b, samme om opsjonen er av amerikansk eller europeisk type. Ved en opsjon av amerikansk type, kan modellen repeteres for hver periode, og kan dermed utvides til å være en fleksibel metode for prising av opsjoner over flere perioder. Man konstruerer to dupliserte noder, node a' og b', hvor opsjonen kan bli innløst. Innløsningsprisen er I. Utbetaling av opsjonskontrakten kan dermed skrives:

	Ikke innløs $y_{(n,sluk)} = 1$	Innløs $y_{(n',sluk)} = 1$
$C_a = \max(V_a - I, 0)$	$C_a = D_a = 0$	$C_a = D_{a'} = V_a - I$
$C_b = \max(V_b - I, 0)$	$C_b = D_b = 0$	$C_b = D_{b'} = V_b - I$

hvor:

$$y_{(n,sluk)} + y_{(n',sluk)} = 1 \text{ og } y_{(\cdot\ ,\ sluk)} \in \{0, 1\}$$

Det vil med andre ord si at flyten y gjennom grenene som leder ned i sluken har kapasiteten $y_{(n',sluk)} = [0, 1]$, og investoren kan velge om han enten vil innløse, eller om han vil la være. Alle andre mulige grener har ubegrenset kapasitet $[0 + \infty)$. Man finner et uttrykk for opsjonsprisen, evaluert fra tilstand 0, ved å



Figur 4.1: *Nettverk for en opsjon når det underliggende papiret har to mulige fremtidige tilstander, a og b, over en periode.*

modifisere maksimeringsproblemet fra likning 4.2. Man kan skrive:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\limits_{\mu,y} & \left\{ \begin{array}{l} \mu_a \delta D_{a'} y_{(a',sluk)} + \\ \mu_b \delta D_{b'} y_{(b',sluk)} \end{array} \right\} \\ \text{når} & \left\{ \begin{array}{ll} (1) & V_0 = \partial(\mu_a V_a + \mu_b V_b) \\ (2) & \mu_a + \mu_b = 1 \\ (3) & y_{(n',sluk)} = [0, 1] \end{array} \right\} \end{array}} \tag{4.3}$$

Verdsettingsproblemet maksimeres med hensyn på sannsynlighetene E_μ og investorens optimale valg y. Disse finnes ved bruk av dualitetsprinsippet. Som bevist tidligere, behøver dualproblemet eksistens av en verdettingsoperator som integrerer de fremtidige prisene mot et martingalt sannsynlighetsmål. Dette sannsynlighetsmålet er entydig ved fullstendige markeder. Dette er et optimeringsproblem, som enkelt kan løses ved Lagranges metode. I fullstendige marked har man at optimal løsning $\mathrm{V}(y)$ er unik, det vil si at øvre og nedre grense er lik, $\bar{\mathrm{V}}(y) = \underline{\mathrm{V}}(y)$, hvor y er valgprosessen som investoren selv bestemmer.

Eksempel 1 (ved regning)

Man står i dette eksempelet ovenfor et underliggende verdipapir med initiell verdi $V_0 = 1$. I tilstand a vil det underliggende verdipapiret ta verdien $V_a = 1.5$, mens det vil ta verdien $V_b = 0.5$ i tilstand b. Innløsningsverdien I er i dette eksemplet gitt ved den initielle markedsverdien, det vil si $I = V_0$. Diskonteringsfaktoren er konstant, det vil si at $\delta_n = \delta_0 = \delta_a = \delta_b = 0.8$. De optimale valgene y investoren gjør, er som følger:

Utbetaling hvis tilstand a	Valg y
$D_{a'} = V_a - I = +0.5$	$y_{(a',sluk)} = 1$
$D_a = 0$	$y_{(a,sluk)} = 0$

Utbetaling hvis tilstand b	Valg y
$D_{b'} = V_b - I = -0.5$	$y_{(b',sluk)} = 0$
$D_b = 0$	$y_{(b,sluk)} = 1$

Flere ledd i optimeringsproblemet fra likning 4.3 forsvinner fordi at de blir null. Man kan dermed skrive følgende, forenklede Lagrange-uttrykk:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mu, \alpha) &= \mu_a \delta D_{a'} - \alpha_1(\mu_a \delta V_a + \mu_b \delta V_b - V_0) - \alpha_2(\mu_a + \mu_b - 1) \\ &= 0.4\mu_a - \alpha_1(1.2\mu_a + 0.4\mu_b - 1) - \alpha_2(\mu_a + \mu_b - 1)\end{aligned}$$

hvor α er multiplikatorer. Deriverer så $\mathcal{L}(\mu, \alpha)$ med hensyn på variablene μ_a og μ_b, og multiplikatorene α_1 og α_2:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_a} = 0.4 - 1.2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_b} = -0.4 - \alpha_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} = 1.2\mu_a + 0.4\mu_b - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} = \mu_a + \mu_b - 1 = 0 \quad (4)$$

Løser likningsettet (1) - (4):

$$\left\{ \begin{array}{c} 1.2\alpha_1 + \alpha_2 = 0.4 \\ \alpha_2 = -0,4 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = 0.67, \alpha_2 = -0.4$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1.2\mu_a + 0.4\mu_b = 1 \\ \mu_a + \mu_b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu_a = 0.75, \mu_b = 0.25$$

Man finner herved en entydig løsning, noe som betyr at man står ovenfor et unikt, risikojustert sannsynlighetsmål μ som tilfredstiller martingalevilkårene. Man har entydige martingale-sannsynligheter ved et fullstendig marked, som man antok innledningsvis. Ved fravær av arbitrasje, skal dette gi en unik verdi på optimeringsproblemet:

$$\begin{aligned} & \max_{\mu, y} \left\{ \mu_a \delta D_{a'} y_{(a',sluk)} \right\} \\ = \; & 0.75 \times 0.8 \times 0.5 \times 1 = 0.3 \end{aligned}$$

Verdien av kjøpopsjonen i dette eksemplet er dermed $\bar{\mathrm{V}}(y) = \underline{\mathrm{V}}(y) = \mathrm{V}(y) = 0.3$.

4.2.2 Flere underliggende verdipapir

For at markedet skal være fullstendig, er det tidligere blitt bevist at det må være like mange investeringsmuligheter som antall tilstander. Med flere verdipapir i markedet enn i eksemplet ovenfor, må det også være tilsvarende flere tilstander. Man antar i neste eksempel to underliggende verdipapir i tillegg til det sikre, og tre mulige tilstander. Eksempelet kan videre utvides til flere verdipapir og tilstander, så lenge markedet holdes fullstendig.

Man har de underliggende verdipapirene $p = \{0, 1, 2\}$ hvorav verdipapir $p = 0$ er det sikre med diskonteringsfaktoren δ. Det finnes tre mulige tilstander $n = \{a, b, c\}$. De initielle verdiene er gitt ved I^1 og I^2. Videre har man prisvektoren V_n^p for de ulike verdipapirene p og tilstandene n. Investoren står ovenfor følgende maksimeringsproblem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max\limits_{\mu, y} & \sum\limits_n \mu_n \delta D^p_{n'} y^p_{(n',sluk)} \ \forall\ p \\ \text{når} & \left\{ \begin{array}{ll} (1) & I^1 = \delta(\mu_a V_a^1 + \mu_b V_b^1 + \mu_c V_c^1) \\ (2) & I^2 = \delta(\mu_a V_a^2 + \mu_b V_b^2 + \mu_c V_c^2) \\ (3) & \mu_a + \mu_b + \mu_c = 1 \\ (4) & y^p_{(n',sluk)} = [0, 1] \end{array} \right\} \end{array}} \tag{4.4}$$

Eksempel 2 (ved regning)

For enkelthets skyld antar man at begge de usikre verdipapirene har initialverdi $I^1 = I^2 = 1$. Verdipapirene har følgende prismatrise:

$$V_n^p = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 & 2.1 \\ 0.9 & 1.1 & 0.9 \\ 0.9 & 2.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

som betyr at den sikre papiret har nåverdien $V_n^0 = 0.9$ uavhengig av hvilken tilstand a, b eller c som inntreffer. Verdipapir 1 får verdiene $V_a^1 = 0.7$, $V_b^1 = 1.1$, eller $V_c^1 = 2.2$. Tilsvarende får verdipapir 2 verdiene $V_a^2 = 2.1$, $V_b^2 = 0.9$, eller $V_c^2 = 0.6$.

Kjøpsopsjonen er amerikansk, og har innløsningspriser $K^1 = 1.2$ og $K^2 = 1.1$. Investorens optimale valg y er bestemt av verdien av kjøpsopsjonen $D_n^p = V_n^p - K^p$:

$D^1_{(c')} = V_c^1 - K^1 = 2.2 - 1.2 = 1$	$y^1_{(c',sluk)} = 1$
$D^2_{(a')} = V_a^2 - K^2 = 2.1 - 1.1 = 1$	$y^2_{(a',sluk)} = 1$

Resten av leddene i maksimeringsproblemet fra likning 4.4 forsvinner fordi de blir lik null. Investorens optimeringsproblem kan formuleres som følgende Lagrangeuttrykk:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mu,\alpha) &= \mu_c\delta D^1_{c'} + \mu_a\delta D^2_{a'} \\ &\quad -\alpha_1(\delta\mu_a V^1_a + \delta\mu_b V^1_b + \delta\mu_c V^1_c - I^1) \\ &\quad -\alpha_2(\delta\mu_a V^2_a + \delta\mu_b V^2_b + \delta\mu_c V^2_c - I^2) \\ &\quad -\alpha_3(\mu_a + \mu_b + \mu_c - 1) \\ &= 0.9\mu_c + 0.9\mu_a \\ &\quad -\alpha_1(0.63\mu_a + 0.99\mu_b + 1.98\mu_c - 1) \\ &\quad -\alpha_2(1.89\mu_a + 0.99\mu_b + 0.54\mu_c - 1) \\ &\quad -\alpha_3(\mu_a + \mu_b + \mu_c - 1)\end{aligned}$$

Løser ut for dette Lagrangeutrykket og står igjen med 3 likninger og 3 ukjente[1]:

$$\begin{bmatrix} 0.63 & 0.99 & 1.98 & 1 \\ 1.89 & 0.99 & 0.54 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mu_a, \mu_b, \mu_c] = \begin{bmatrix} 0.1962 \\ 0.7222 \\ 0.0814 \end{bmatrix}$$

Innsatt i maksimeringproblemet, får man følgende opsjonspriser:

$$\begin{aligned}&\max_{\mu,y}\left\{\delta\mu_c D^1_{c'} y^1_{(c',sluk)}\right\} \\ =\ &0.9 \times 0.0814 \times 1 \approx 0.07\end{aligned}$$

og:

$$\begin{aligned}&\max_{\mu,y}\left\{\delta\mu_a D^2_{a'} y^2_{(a',sluk)}\right\} \\ =\ &0.9 \times 0.1962 \times 1 \approx 0.18\end{aligned}$$

Det vil si at verdien av opsjonskontrakten på verdipapir 1 er 0.07, mens verdien av opsjonskontrakten på verdipapir 2 er 0.18.

4.3 Eksempler ved bruk av datahjelpemidler

Eksempel 1 ovenfor var relativt enkelt å regne ut, men blir snart mer komplisert hvis man skal ta hensyn til flere verdipapir i markedet (Eksempel 2), eller flere perioder. Det finnes dataverktøy som kan gjøre disse beregningene for oss, og man trenger kun å plotte inn de ulike variablene man kjenner til for å finne opsjonsprisen. Eksempler på slike program er GAMS (General Algebraic Modeling System) og AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming). Begge er programmer som spesialiserer seg på matematisk programmering og optimering. Det er også mulig å ta i bruk det mer kjente Microsoft Excel til slike beregninger. Jeg vil videre vise hvordan man kan implementere dataene man har fra forrige regneeksempler til å passe i et slikt dataprogram. Jeg har valgt å illustrere eksempelet i AMPL [5], som er et lett forståelig og tilgjengelig program [17].

[1] Man løser kun ut for sannsynlighetene μ, fordi at man vet, ved eksistens av et fullstendig marked, at det eksisterer entydige verdsettingsoperatorer α.

4.3.1 AMPL

AMPL er et modelleringsverktøy for optimeringsproblemer. Ved å programmere de matematiske utrykkene man har til et gjenkjennelig format for programmeringspråket, kan AMPL løse problemene ved bruk av såkalte *solvers* (algoritmer). Et ferdigprogrammert program i AMPL består av to filer:

(1) Modellfilen (*.mod)

(2) Datafilen (*.dat)

Modellfilen inneholder alle nødvendige definisjoner av parametre (konstanter), indekser, variabler, funksjoner eller sidevilkår. Modellfilen er helt fri for verdier (data), da disse inngår i en egen fil, datafilen. På denne måten kan et godt utviklet modell kunne brukes for mange forskjellige eksempler, med forskjellige verdier. Modellfilen kjøres sammen ved valgte datafil, og programmet løses ved bruk av passende algoritmer. Programmet inneholder hovedsakelig følgende kommandoer (i følgende rekkefølge):

- **set:** Med denne kommandoen defineres et sett av for eksempel produkter eller tilstander. Det kan være flere sett i et program.
- **param:** En parameter er en konstant. Det kan være flere konstanter, og konstantene kan indekseres.
- **var:** Dette er for verdiene som er variable. Variablene blir løst av programmet, og er en viktig del av utregningen av objektfunksjonen.
- **maximize** eller **minimize:** Dette er de to vanligste kommandoene for objektfunksjonen, som skal bli løst av programmet.
- **subject to:** Objektfunksjonens sidevilkår.

En kommando avsluttes med semikolon (;). For kommentarer i programmet, markeres firkanttegnet (#) foran kommentaren.

4.3.2 Ett underliggende verdipapir

Som i Eksempel 1 , ser man aller først på tilfellet hvor det kun eksisterer *ett underliggende verdipapir*, hvor verdipapiret kan ta to mulige verdier for neste periode.

Eksempel 1A (AMPL)

Først må modellfilen opprettes. Den kan for eksempel kalles for *opsjon1.mod*. Man starter med å definere settet. Det finnes ett sett av mulige tilstander. For oversiktlig programmering, markerer man settet med store bokstaver.

- **set** TILSTANDER;

Så defineres de ulike parametrene. Parametrene i dette eksemplet er innløsningsprisen, diskonteringsfaktoren, initialverdien, verdien for det underliggende verdipapiret ved de to mulige tilstandene, og verdien av opsjonen ved de to mulige tilstandene:

- **param** innlosning >= 0 ;
- **param** diskontering >= 0 , <= 1 ;
- **param** initial >= 0 ;
- **param** pris {TILSTANDER} >= 0 ;
- **param** utbetaling {n in TILSTANDER}
  = max (pris[n] - innlosning , 0)

Merk at valgprosessen y som er blitt definert tidligere i kapitlet, inngår i siste parameteren. Utbetalingen for tilstand a eller b, er det optimale av å innløse eller å ikke innløse. I Eksempel 2 (AMPL) vil det også vises hvordan denne valgprosessen kan bli implementert som en egen variabel, ved bruk av nettverksprogrammering. Videre må variabelen defineres. I dette tilfellet er det de risikojusterte sannsynlighetene:

- **var** sanns {n in TILSTANDER} >= 0 , <= 1 ;

Nå kan man introdusere objektfunksjonen. Fra optimeringsproblemet fra likning 4.3 skriver man:

- **maximize** opsjonspris:
  sum {n in TILSTANDER diskontering * utbetaling[n] * sanns[n] ;

Så kommer sidevilkårene:

- **subject to** vilkaar1 :
  diskontering['a'] * pris['a'] * sanns['a'] +
  diskontering['b'] * pris['b'] * sanns['b'] = initial ;
- **subject to** vilkaar2 :
  sanns['a'] + sanns['b'] = 1 ;

Modellfilen *opsjon1.mod* ovenfor skal nå være mottakelig for tilgjengelige data for en–periode-modellen, tilsvarende som i Eksempel 1 (ved regning). Videre konstruerer man datafiler, og tester om programmet fungerer. Aller først konstrueres datafilen *opsjon1A.dat,* som har samme verdier som Eksempel 1 (ved regning). Deretter er det mulig å konstruere flere datafiler, for eksempel *opsjon1B.dat*, *opsjon1C.dat,* og så videre, for å teste programmet for andre verdier. Datafilen *opsjon1A.dat* består av følgende kommandoer:

- **set** TILSTANDER := a b ;

Dette er vektoren av mulige utfall det underliggende verdipapiret kan ta. Så må de forskjellige parametrene defineres.

- **param** innlosning := 1 ;
- **param** initial := 1 ;
- param diskontering := 0.8 ;

- **param** pris :=

  a 1.5

  b 0.5 ;

Programmet løses ved å kjøre følgende kommandoer i AMPL sin ledetekst:

- data opsjon1A.dat ;
- model opsjon1.mod ;
- solve;
- display _varname, _var

Programmet regner da ut opsjonsverdien, med hensyn på variablene, som i dette tilfellet er de risikojusterte sannsynlighetene. Følgende resultat skrives ut:

MINOS 5.5 : optimal solution found. 1 iterations , objective **0.3** : _varname_var:= 1 sanns['a']"**0.75** 2 sanns['b']"**0.25** ;

Som i Eksempel 1 (ved regning), får man opsjonspris $V(y) = 0.3$, med sannsynlighetene $\mu_a = 0.75$ og $\mu_b = 0.25$.

Eksempel 1B og 1C (AMPL)

I disse eksemplene konstruer man flere datafiler, for å illustrere modellens anvendelighet. I *opsjon1B.dat* og *opsjon1C.dat* har man følgende verdier:

opsjon1B.dat	*opsjon1C.dat*
Innløsningspris = 1.5	*Innløsningspris = 1.2*
Initialverdi = 1	*Initialverdi = 1*
Diskonteringsrate = 0.9	*Diskonteringsrate = 0.75*
Tilstand a = 0.8	*Tilstand a = 1.8*
Tilstand b = 2.2	*Tilstand b = 1.2*

Datafilene ser dermed slik ut:

opsjon1B.dat	*opsjon1C.dat*
set TILSTANDER := a b ;	**set** TILSTANDER := a b ;
param innlosning := 1.5 ;	**param** innlosning := 1.2 ;
param initial := 1 ;	**param** initial := 1 ;
param diskontering := 0.9 ;	**param** diskontering := 0.75 ;
param pris :=	**param** pris : =
a 0.8	a 1.8
b 2.2 ;	b 1.2 ;

Kjører man kommandoene i AMPL:

data opsjon1B.dat ;	data opsjon1C.dat ;
model opsjon1.mod ;	model opsjon1.mod ;
solve;	solve;
display _varname, _var	display _varname, _var

får man følgende resultater av solveren:

MINOS 5.5 :	MINOS 5.5 :
optimal solution found.	optimal solution found.
1 iterations , objective **0.14**	1 iterations , objective **0.1**
: _varname _var:=	: _varname _var:=
1 sanns['a']"**0.77778**	1 sanns['a']"**0.22222**
2 sanns['b']"**0.22222** ;	2 sanns['b']"**0.77778** ;

For Eksempel 1B blir opsjonsprisen 0.14, med sannsynlighetene $\mu_a = 0.778$ og $\mu_b = 0.222$. For Eksempel 1C blir opsjonsprisen 0.1 med sannsynlighetene $\mu_a = 0.222$ og $\mu_b = 0.778$.Modellfilen *opsjon.mod* kan altså brukes for flere eksempler, og er en svært enkel måte å beregne opsjonspriser for tilsvarende scenarier. Ved mer avansert programmering, kan modellen også utvides for å ta hensyn til scenarier med flere tilstander og verdipapir.

4.3.3 Flere underliggende verdipapir

I Eksempel 2 (ved regning) ble utregningene mer kompliserte på grunn av et større likningsett. Flere underliggende verdipapir og flere tilstander legger til grunn for flere ukjente og flere likninger. Dette kan enkelt beregnes i AMPL.

Eksempel 2 (AMPL)

Modellen over utvides til å ta hensyn til to underliggende verdipapir i tillegg til det sikre, med tre mulige tilstander for hvert verdipapir (fullstendig marked). Ved flere verdipapir og tilstander enn i Eksempel 1, er det bedre å ta i bruk nettverksprogrammering, da denne metoden enklere kan utvides til større modeller. Nettverksprogrammering går i korte trekk ut på å definere et sett av nodene i transportproblemet, som beskrevet innledningsvis, samt å definere grenene mellom dem. Flyten gjennom grenene y kan, som før, beskrives som den påvirkningsmuligheten investoren har på sin egen fortjeneste. Det spesifiserte transportproblemet fra Kapittel 4.1 kommer virkelig til sin rett i nettverksprogrammering: Valgprosessen y blir modellert som en variabel i AMPL, med de begrensningene som forutsettes. Kommandoer som inneholder parametre, objektfunksjon, og sidevilkår må naturligvis også være med, som ved vanlig maksimering. Man konstruerer en ny modellfil *opsjon2.mod*, og en ny datafil *opsjon2.dat*, som kan ta i mot verdiene fra Eksempel 2 (ved regning). Se Appendiks for fullstendig modellfil og datafil, samt konkrete kommentarer og forklaringer til programmeringen. Programmet løses ved å kjøre følgende kommandoer:

```
data opsjon2.dat ;
model opsjon2.mod ;
solve;
display opsjonspris, y, x ;
```

Da løsningen som AMPL skriver ut er svært lang og uoversiktlig, trekkes følgende vesentlige svar ut:

```
opsjonspris [*] :=
p1   0.0733333
p2    0.176667 ;
y  [a , sluk , p1] := 1 ;
y  [b , sluk , p1] := 1 ;
y  [c' , sluk , p1] := 1 ;
y  [a' , sluk , p2] := 1 ;
y  [b , sluk , p2] := 1 ;
y  [c , sluk , p2] := 1 ;
x :=
a' sluk 0.196296 ;
b' sluk 0.722222 ;
c' sluk 0.081481 ;
```
:

Merk at programmet inneholder to variable, y for investorens optimale valg, og x for martingale-sannsynlighetene. Ut i fra de opplysningene som foreligger, er altså programmet i stand til å både foreta investorens optimale valg, samtidig som det beregner sannsynlighetene x og finner opsjonsverdiene basert på begge de underliggende papirene 1 (*p1*) og 2 (*p2*).

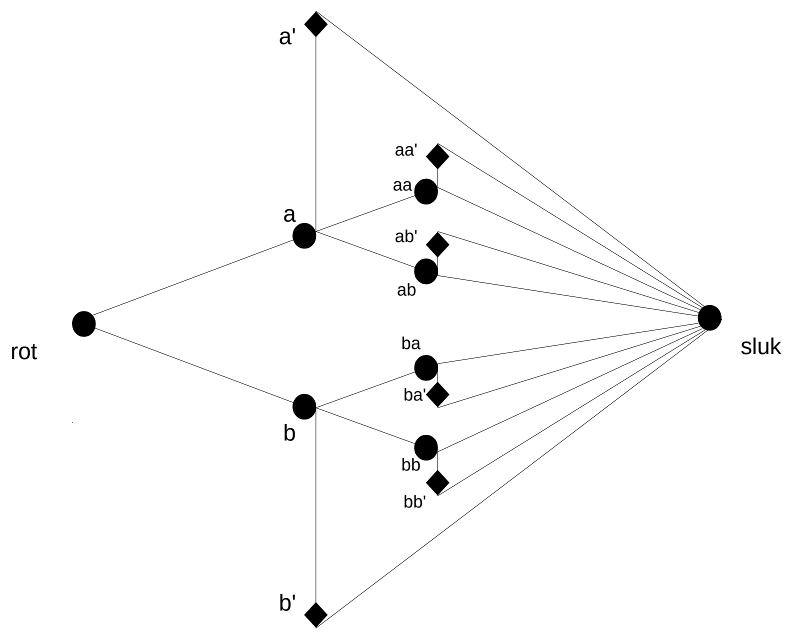
Prisen på opsjonen basert på det underliggende verdipapiret 1 (*p1*) er 0.07, mens prisen på opsjonen basert på verdipapir 1 (*p1*) er 0.18. Investorens optimale valg ved en opsjonskontrakt på verdipapir 1, er å løse inn opsjonen i tilstand c, og å ikke innløse ved tilstand a og b. Med en opsjonskontrakt på verdipapir 2 er det optimalt å løse inn opsjonen i tilstand a, men å ikke løse inn i tilstand b og c. Den risikojusterte sannsynligheten, gitt disse to usikre verdipapirene, er 0.196 for tilstand a, 0.722 for tilstand b, og 0.08 for tilstand c. Det vil si at man får akkurat de samme verdiene som man regnet ut i Eksempel 2 (ved regning).

4.4 Utvidelser

Man har så langt utvidet dataprogrammet til å hensyn til 2 underliggende verdipapir, og 3 mulige tilstander. På samme måte kan også programmet utvides til å ta hensyn til enda flere verdipapir og tilstander, noe som vil gjøre modellen svært anvendelig. Dette forutsetter imidlertid at markedet holdes fullstendig, slik at antall verdipapir er lik antall tilstander. Med et ufullstendig marked får man flere ukjente variable enn antall likninger, det vil si man kan få flere mulige løsninger og ingen entydig opsjonspris. Så langt har man også fokusert på modellen som går over en periode, men den kan også utvides til ta hensyn til flere perioder. Ved flere perioder må man ta hensyn til opsjonens egenskaper, det vil si om den for eksempel er amerikansk eller europeisk. Ved å utvide til flere perioder, er det også mulig å ta hensyn til flere tilstander enn antall verdipapir. Eksemplene ovenfor er for kjøpsopsjoner, men metoden blir akkurat tilsvarende for salgsopsjoner, som diskutert i Kapittel 4.1.

4.4.1 Flere perioder

Det er rimelig å anta at jo flere fremtidige perioder man tar hensyn til i fra den initielle tilstanden, jo mer usikker blir de estimerte prisene. Informasjonsnivået i hver periode inneholder konsistente priser for neste periode, men blir mindre nøyaktig for flere perioder. På lang sikt er det også vanskeligere å ta hensyn til eventuelle sjokk, eller andre faktorer som kan påvirke prisene. I de første eksemplene tok man hensyn til prisene i tilstand a og b. Skulle man laget modellen mer fremadskuende, slik at den for eksempel skulle ta hensyn til to perioder, måtte man også tatt hensyn til prisene i tilstandene aa, ab, ba, og bb. Se Figur 4.2. Dette fører også til flere sidevilkår, og et mer komplisert regnestykke. Modellen blir stadig mer komplisert, og mindre konsistent for enda flere perioder.



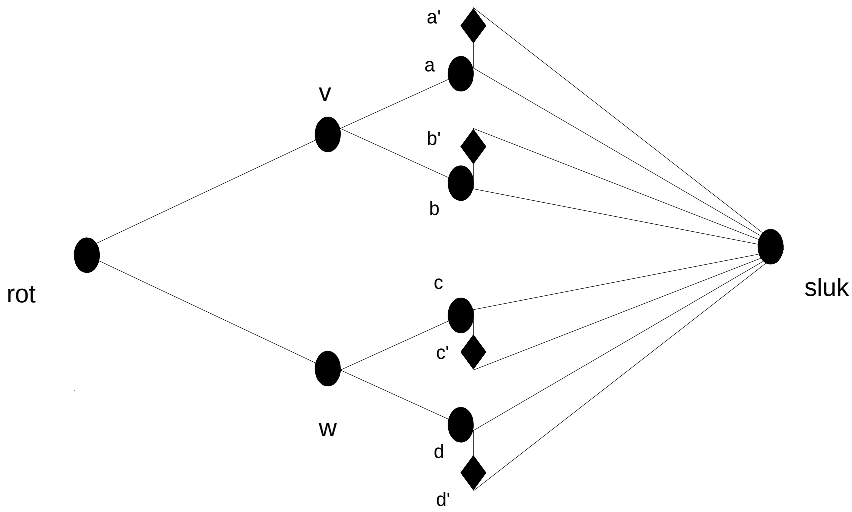
Figur 4.2: Nettverk for en amerikansk opsjon hvor det er to tilstander for hver periode, over to perioder.

En bedre og sikrere måte er å stadig modifisere maksimeringsproblemet for ny informasjon som kommer inn. Ny informasjon om fremtiden dukker opp i hver tilstand, og påvirker fremtidige priser. Denne metoden fungerer bare dersom man kan verdsette i enhver tilstand på stien. En opsjonskontrakt med utøvelsestidspunkter $ex\mathcal{N}$ for enhver tilstand $n \in \mathcal{N}$ kjennetegner de amerikanske opsjonene. Prisene blir hele tiden justert, og kan ta hensyn til alle mulige faktorer som kan påvirke prisen. Dette gjør metoden svært konsistent for amerikanske opsjoner. Tilsvarende kan metoden og brukes for verdsetting av bermudaopsjoner, da disse nesten har de samme egenskapene som amerikanske opsjoner, men kun kan innløses ved noen av handlingspunktene. Verdsetting av bermudaopsjoner ved lineært programmering må derfor modifiseres ut fra skjønn. For europeiske opsjoner trengs det større modifiseringer.

4.4.2 Flere tilstander for hvert verdipapir

I Eksempel 1 hadde man ett underliggende verdipapir og to mulige tilstander. Sammen med det sikre verdipapiret utgjør dette et fullstendig marked. Med to underliggende verdipapir, kan man bare ta hensyn til tre tilstander for at metoden skal fungere. Tilsvarende, dersom man har tre underliggende verdipapir må man ta hensyn til fire mulige tilstander. Modellen er på den måten mindre fleksibel dersom man ønsker å ta hensyn til flere eventualiteter for færre underliggende verdipapir.

Det er imidlertid mulig å utvide modellen til flere tilstander ved å utvide antall perioder. Ved å innføre tilstrekkelig antall perioder, kan man ta hensyn til så mange tilstander som man vil. Dersom man bare har ett underliggende verdipapir, kan man likevel ta hensyn til flere tilstander enn to, ved simpelthen å konstruere en eller flere mellomliggende perioder. Scenariet ved ett verdipapir og to mulige fremtidige tilstander over en periode, kan enkelt utvides til 4 fremtidige tilstander ved å dele perioden i to halve perioder. For en opsjon av amerikansk type, er det mulig å løse inn ved alle handlingstidspunktene før bortfallsdato. Disse handlingstidspunktene er kun ved hver hele periode. Figur 3.3 illustrerer scenariet over én periode, hvor den initielle tilstanden (roten), kan få utfallene a, b, c, og d. Node v og w er i den mellomliggende, halve perioden.



Figur 4.3: Et underliggende verdipapir, 4 mulige tilstander.

Alternativt kan man betrakte modellen i Figur 4.3 som en bermudaopsjon, hvor det ikke går an å utøve i den halve perioden, men kun for den hele.

Eksempel 3

En investor har en amerikansk kjøpsopsjon på en underliggende aksje. Kontrakten går over en periode, og i løpet av perioden kan aksjeprisen gå i 4 ulike retninger, a, b, c, eller d. Man oppretter dermed de dupliserte nodene a', b', c'og

d', hvor investoren kan innløse opsjonen. For å opprettholde kravet om et fullstendig marked, må man innføre en halv periode, slik at man hele tiden har like mange tilstander som verdipapir. Tilstandene i den halve perioden er observerbare, og man kaller dem v og w.[2] Man har da handlingstidspunktene:

$$\begin{aligned} D_{\text{innløs}} &= D_{n'} = \{D_{a'}, D_{b'}, D_{c'}, D_{d'}\} \\ D_{\text{ikke innløs}} &= D_n = \{D_a, D_b, D_c, D_d\} \end{aligned}$$

Opsjonen kan kun innløses en gang, det vil si at flyten fra alle mulige sluttnoder og alle dupliserte noder som leder ned til sluken har begrensningen $[0,1]$.

$$\begin{aligned} y_{(a,sluk)} &= y_{(b,sluk)} = y_{(c,sluk)} = y_{(d,sluk)} = \\ y_{(a',sluk)} &= y_{(b',sluk)} = y_{(c',sluk)} = y_{(d',sluk)} = [0,1] \end{aligned}$$

Aksjen har initialverdien $V_0 = 1$, og følgende prisutvikling:

$$\begin{array}{ll} V_v = 1.50 & V_w = 0.50 \\ V_a = 1.90 & V_c = 1.20 \\ V_b = 0.90 & V_d = 0.20 \end{array}$$

Diskonteringsfaktoren antas å være konstant over hele perioden:

$$\delta = \delta^1 = \delta_a = \delta_b = \delta_c = \delta_d = 0.80$$

Det vil si at diskonteringsfaktoren for halve perioden er:

$$\Rightarrow \delta^{\frac{1}{2}} = \delta_u = \delta_d = \delta_{(a)} = \delta_{(b)} = \delta_{(c)} = \delta_{(d)} = \sqrt{\delta} = \sqrt{0.80}$$

Innløsningsprisen I er lik den initielle markedsverdien, $I = V_0 = 1$. Fra det generelle uttrykket for en kjøpopsjon, kan man dermed skrive dividendeutbetalingene ved utøvelsestidspunktene:

$$\begin{array}{l} D_{(a')} = \max(V_a - I, 0) = \max(1.9 - 1, 0) = 0.90 \\ D_{(b')} = \max(V_b - I, 0) = \max(0.9 - 1, 0) = 0.00 \\ D_{(c')} = \max(V_c - I, 0) = \max(1.2 - 1, 0) = 0.20 \\ D_{(d')} = \max(V_d - I, 0) = \max(0.2 - 1, 0) = 0.00 \\ D_{(a)} = D_{(b)} = D_{(c)} = D_{(d)} = 0.00 \end{array}$$

Man står ovenfor følgende maksimeringsproblem:

$$\max_{\mu} \left\{ \mu_a \delta_a D_{a'} y_{(a',sluk)} + \mu_c \delta_c D_{c'} y_{(c',sluk)} \right\}$$

når:

$$\begin{aligned} V_0 &= \delta^{\frac{1}{2}} (\mu_{(v)} V_v + \mu_{(w)} V_w) \\ V_v &= \delta^{\frac{1}{2}} (\mu_{(a)} V_a + \mu_{(b)} V_b) \\ V_w &= \delta^{\frac{1}{2}} (\mu_{(c)} V_c + \mu_{(d)} V_d) \end{aligned}$$

og:

$$\begin{aligned} \mu_{(v)} + \mu_{(w)} &= 1 \\ \mu_{(a)} + \mu_{(b)} &= 1 \\ \mu_{(c)} + \mu_{(d)} &= 1 \end{aligned}$$

[2] Se Figur 4.3.

Sannsynlighetene for de aktuelle tilstandene kan skrives som:

$$
\begin{aligned}
\mu_a &= \mu_{(v)}\mu_{(a)} \\
\mu_c &= \mu_{(w)}\mu_{(c)}
\end{aligned}
$$

Dette medfører følgende Lagrange-uttrykk:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mu,\alpha) &= \delta(\mu_{(v)}\mu_{(a)}D_{a'} + \mu_{(w)}\mu_{(c)}D_{c'}) \\
&\quad -\alpha_1(\delta^{\frac{1}{2}}(\mu_{(v)}V_v + \mu_{(w)}V_w - V_0)) \\
&\quad -\alpha_2(\delta^{\frac{1}{2}}(\mu_{(a)}V_a + \mu_{(b)}V_b - V_v)) \\
&\quad -\alpha_3(\delta^{\frac{1}{2}}(\mu_{(c)}V_c + \mu_{(d)}V_d - V_w)) \\
&\quad -\alpha_4(\mu_{(v)} + \mu_{(w)} - 1) \\
&\quad -\alpha_5(\mu_{(a)} + \mu_{(b)} - 1) \\
&\quad -\alpha_6(\mu_{(c)} + \mu_{(d)} - 1)
\end{aligned}
$$

Setter inn verdiene for $\delta, V_0, V_v, V_w, V_a, V_b, V_c$, og V_d, som er inneholdt i informasjonsnivået i den initielle perioden. Setter også inn de beregnede verdiene for $D_{a'}$ og $D_{c'}$. Står igjen med følgende Lagrange-problem:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mu,\alpha) &= 0.72\mu_{(v)}\mu_{(a)} + 0.16\mu_{(w)}\mu_{(c)} \\
&\quad -\alpha_1(1.34\mu_{(v)} + 0.45\mu_{(w)} - 1) \\
&\quad -\alpha_2(1.70\mu_{(a)} + 0.80\mu_{(b)} - 1.50) \\
&\quad -\alpha_3(1.07\mu_{(c)} + 0.18\mu_{(d)} - 0.50) \\
&\quad -\alpha_4(\mu_{(v)} + \mu_{(w)} - 1) \\
&\quad -\alpha_5(\mu_{(a)} + \mu_{(b)} - 1) \\
&\quad -\alpha_6(\mu_{(c)} + \mu_{(d)} - 1)
\end{aligned}
$$

Partiellderiverer $\mathcal{L}(\mu,\alpha)$ med hensyn på μ og α :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu_{(v)}} &= 0.72\mu_{(a)} - 1.34\alpha_1 - \alpha_4 = 0 && (1) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu_{(w)}} &= 0.16\mu_{(c)} - 0.45\alpha_1 - \alpha_4 = 0 && (2) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu_{(a)}} &= 0.72\mu_{(v)} - 1.70\alpha_2 - \alpha_5 = 0 && (3) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu_{(b)}} &= -0.80\alpha_2 - \alpha_5 = 0 && (4) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu_{(c)}} &= 0.16\mu_{(b)} - 1.07\alpha_3 - \alpha_6 = 0 && (5) \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mu_{(d)}} &= -0.18\alpha_3 - \alpha_6 = 0 && (6)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} = 1.34\mu_{(v)} + 0.45\mu_{(w)} - 1 = 0 \quad (7)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} = 1.70\mu_{(a)} + 0.80\mu_{(b)} - 1.50 = 0 \quad (8)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_3} = 1.07\mu_{(c)} + 0.18\mu_{(d)} - 0.50 = 0 \quad (9)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_4} = \mu_{(v)} + \mu_{(w)} - 1 = 0 \quad (10)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_5} = \mu_{(a)} + \mu_{(b)} - 1 = 0 \quad (11)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_6} = \mu_{(c)} + \mu_{(d)} - 1 = 0 \quad (12)$$

Dette er et likningsett med 12 likninger og 12 ukjente, og er dermed løsbart. Løser først for multiplikatorene α for likningene $(1) - (6)$:

$$\left\{\begin{array}{r} 0.72\mu_{(a)} - 1.34\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ 0.16\mu_{(c)} - 0.45\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ 0.72\mu_{(v)} - 1.70\alpha_2 - \alpha_5 = 0 \\ -0.80\alpha_2 - \alpha_5 = 0 \\ 0.16\mu_{(w)} - 1.07\alpha_3 - \alpha_6 = 0 \\ -0.18\alpha_3 - \alpha_6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 0.80\mu_{(a)} - 0.18\mu_{(c)} \\ \alpha_2 = 0.80\mu_{(v)} \\ \alpha_3 = -0.18\mu_{(w)} \\ \alpha_4 = 0.23\mu_{(c)} - 0.36\mu_{(a)} \\ \alpha_5 = -0.64\mu_{(v)} \\ \alpha_6 = -0.03\mu_{(w)} \end{array}\right\}$$

Likningsettet har en entydig løsning dersom det finnes et entydig sannsynlighetsmål μ som tilfredstiller martingale-vilkårene. Dette skal finnes når markedet er fullstendig. Løser likningene $(7) - (12)$:

$$\begin{bmatrix} 1.34 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.7 & 0.8 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.07 & 0.18 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\mu_{(v)}, \mu_{(w)}, \mu_{(a)}, \mu_{(b)}, \mu_{(c)}, \mu_{(d)}\right) \approx \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.38 \\ 0.78 \\ 0.22 \\ 0.36 \\ 0.64 \end{bmatrix}$$

Man har at μ er et entydig martingale-sannsynlighetsmål som løser verdsettingsproblemet. Setter inn for sannsynlighetene og finner opsjonsprisen:

$$\begin{aligned} & \max_{\mu,y} \left\{\mu_a \delta_a D_{a'} y_{(a',sluk)} + \mu_c \delta_c D_{c'} y_{(c',sluk)}\right\} \\ = \; & \delta\left(\mu_{(v)}\mu_{(a)} D_{a'} + \mu_{(w)}\mu_{(c)} D_{c'}\right) \\ = \; & 0.8\,(0.62 \times 0.78 \times 0.90 \times 1 + 0.38 \times 0.36 \times 0.20 \times 1) = 0.37 \end{aligned}$$

Opsjonsverdien ved den initielle tilstanden er dermed $\mathrm{V}(y) = \bar{\mathrm{V}}(y) = \underline{\mathrm{V}}(y) = 0.37$ for dette eksempelet.

Som eksempelet viser, kan man kan hensyn til flere tilstander enn antall verdipapir, ved å utvide antall steg i modellen. Man må hele tiden passe på at markedet er fullstendig, slik at man har et entydig sannsynlighetmål. Regnestykket blir imidlertid større og mer komplisert når antall steg og variabler øker, og det blir vanskeligere å løse for hånd. For amerikanske opsjoner, som kan innløses for hver periode, kan denne metoden også brukes for flere perioder. Dette gjøres ved å stadig modifisere modellen for ny informasjon om priser som kommer inn. Siden metoden er universell for flere steg og flere tilstander, kan dataprogram hjelpe oss med disse regnestykkene. Dette innebærer imidlertid avansert programmering, mer avansert enn undertegnede har kapasitet til. Det illustrerer dermed potensialet med et nærmere samarbeid mellom økonomer og dataprogrammerere.

Kapittel 5

Avslutning

Den røde tråden i oppgaven starter med innledningen i kapittel 1, forsetter med å introdusere bakgrunnsmateriale for problemsstilingen i kapittel 2, presenterer metoden som skal undersøkes i kapittel 3, før det eksperimenteres med metoden i kapittel 4. I dette kapitlet, kapittel 5, oppsummeres det som har blitt gjennomført, det blir foretatt konklusjoner, og foreslått videre arbeid.

5.1 Oppsummering

Med tanke på de strenge begrensningene, er det overraskende at Black-Scholes-modellen brukes så aktivt i opsjonsprising i dag. Den første, og mest naturlige forklaringen på dette, er at modellen er svært enkel å bruke, og har volatiliteten som eneste ukjente variabel. En annen rimelig forklaring er at aktørene har god kjennskap til hvordan modellen faktisk fungerer, og er i stand til å vurdere og analysere resultatene som Black-Scholes-modellen utleder. Etter Black, Scholes og Merton utledet denne modellen tidlig på 1970-tallet, har modellen også blitt modifisert til å bli mer representativ for den faktiske prisutviklingen enn hva den geometrisk-Brownske bevegelsen beskriver. Modellen har også blitt modifisert til å ta hensyn til uforutsette faktorer som for eksempel rentehopp, dividendeutbetaling, transaksjonskostnader og skatter, og har med dette blitt mer robust mot kritikk.

Ved fravær av arbitrasje går det an å finne et bånd som opsjonsprisen må befinne seg innenfor. Det er i denne sammenheng at prising av opsjoner ved lineær programmering dukker opp. Ved dualitetsprinsippet er det mulig å finne den høyeste og laveste prisen en opsjon kan ha, og verdsettingsproblemet for opsjoner kan på denne måten forenkles vesentlig. Å modellere verdsettingsproblemet som et lineært program kan gi tre mulige resultater:

(1) Det får en entydig optimalverdi.

(2) Det får mange optimalverdier.

(3) Det finnes ingen løsning.

Man har en entydig opsjonspris ved eksistens av et entydig sannsynlighetsmål som tilfredstiller martingale-vilkårene. Dette er tilfelle i fullstendige finansmarked, og ved lineær programmering kan den unike opsjonsprisen enkelt utledes. Faktorer som rente, dividendeutbetaling, transaksjonskostnader og skatter, kan implementeres i informasjonsnivået som brukes for å utlede opsjonsprisen, noe som fører til at modellen er svært konsistent. Prisutviklingen avhenger ikke av å følge noen spesifikk, forhåndsbestemt prosess, men er kun avhengig av informasjonsnivået som gradvis oppdateres. Ved ufullstendige finansmarkeder har man flere variabler enn antall likninger, og dermed flere mulige løsninger som ikke kan gi en entydig opsjonspris. Opsjonsprisene kan i disse tilfellene finnes ved å implementere aktørenes nyttefunksjoner. Ved inkonsistente prismatriser er det ingen løsning.

Ved eksempler påvises det at metoden for prising av opsjoner ved lineær programmering faktisk fungerer. Dette blir vist i form av tradisjonell regning, ved et eller flere underliggende verdipapir, over en periode. Samme eksempler blir også kjørt gjennom konstruerte dataprogram, som ikke overaskende løses med samme resultater som ved regning, noe som illustrerer dataprogrammenes verdi i bruk av denne metoden. Metoden viser seg å fleksibel for både kjøpsopsjoner eller salgsopsjoner, og blir først og fremst til bevist for å fungere for amerikanske opsjoner med diskrete handlingstidspunkter. Det blir derimot åpnet for at metoden også kan være anvendelig for andre typer opsjoner, noe som har sammenheng med tidsperspektivet i modellen, og verdsettingen må i disse tilfellene modifiseres ut fra skjønn.

5.2 Konklusjon

Prising av opsjoner ved lineær programmering er en metode som forutsetter fravær av arbitrasje, men ikke at det underliggende verdipapiret følger en tilnærmet normalfordeling. Metoden har dermed langt lettere forutsetninger enn mer etablerte modeller, og er mer robust mot faktorer som rentehopp, dividendeutbetaling, transaksjonskostnader, og så videre.

Med fabrikkerte eksempler vises det at prising av opsjoner ved lineær programmering ikke bare er et teoretisk prinsipp, men at det er en anvendelig metode som faktisk kan brukes i praksis. Det konkluderes dermed med at lineær programmering kan være en svært nyttig metode for opsjonsprising, spesielt for amerikanske opsjoner. Det åpnes for at metoden også kan modifiseres til også å gjelde for andre typer opsjoner. For at det skal være mulig å finne en entydig opsjonspris, som er ønskelig, forutsettes det at markedet er fullstendig.

Det viser seg at flere finansielle beregninger har et oppsett som kan modelleres som et lineært program, noe som betyr at lineær programmering kan være et nyttig verktøy for mange beregninger i finansverdenen. Matematisk finans, som i dag er preget av forhåndsbestemte stokastiske prosesser og avanserte differensiallikninger, kan ha mye hente av lineær programmering.

5.3 Videre arbeid

I forhold til det som er gjennomgått i denne oppgaven, kan prising av opsjoner ved lineær programmering utvides i flere retninger:

- En entydig opsjonspris vises å være avhengig av et fullstendig finansmarked. Ved ufullstendige markeder får man ikke-lineære sidevilkår, og man har ikke lenger en unik verdsettingsoperator. Ved å ta hensyn til aktørenes nyttefunksjoner kan opsjonspriser også finnes ved ufullstendige markeder. Dette er arbeid det ikke har blitt fokusert nærmere på i denne oppgaven, men som kan være interessant å gjøre i en annen oppgave.

- Eksperimentene som er blitt utført, involverer bestemte handlingstidspunkter (diskret tidsmodell). Dette er passende med egenskapene for amerikanske opsjoner. Ved enkelte modifiseringer skal det også være mulig å ta hensyn til om opsjonen er av en annen type, for eksempel en europeisk opsjon, eller en bermudaopsjon. Å modifisere til å ta hensyn til flere opsjonstyper enn den amerikanske typen, eller å utvide til en modell som er kontinuerlig i tid, kan også være interessant for videre undersøkelser.

- Modellen kan illustreres tydeligere ved bruk av flere og større eksempler.

- Det viser seg at bruk av datahjelpemidler kan ha store verdi ved enkelte finansielle problemer. Et nærmere samarbeid mellom dataprogrammerere og økonomer kan altså være svært nyttig. Ved å slå sammen økonomers kunnskaper til å utlede økonomiske modeller, og programmerernes kunnskaper til å implementere dem til å passe for ulike typer dataverktøy, kan finansielle beregninger effektiviseres. Prising av opsjoner ved lineær programmering kan ved hjelp av et godt utviklet dataprogram bli svært anvendelig, og kan være et meget godt alternativ til etablerte opsjonsprisingsmodeller.

Tillegg A

Appendiks

Modellfiler

opsjon1.mod		# modellfilens navn
set TILSTANDER ;	;	# settet av mulige tilstander n
param innlosning >= 0	;	# parameter for innløsningspris I
param initial >= 0	;	# parameter for initialverdi V_0
param diskontering >= 0 , <= 1	;	# parameter for diskonteringsfaktor δ
param pris{TILSTANDER} >= 0	;	# parameter for pris V_n
param utbetaling{n in TILSTANDER}	;	# parameter for utbetaling D_n
= max(pris[n]-innlosning,0)	;	# = $\max(V_n - I)$
var sanns{n in TILSTANDER} >=0 , <= 1		# sannsynlighetene for hver tilstand
maximize profitt :		# maksimer
sum{n in TILSTANDER}		# $\sum_n$
diskontering * utbetaling[n] * sanns[n]	;	# $\delta D_n \mu_n$
subject to vilkaar1		# sidevilkår 1
diskontering * pris['a'] * sanns['a'] +		# $\delta V_a \mu_a +$
diskontering * pris['b'] * sanns['b'] =		# $\delta V_b \mu_b =$
initial	;	# V_0
subject to vilkaar2 :		# sidevilkår 2
sanns['a'] + sanns['b'] = 1	;	# $\mu_a + \mu_b = 1$

opsjon2.mod	# modellfilens navn
set NODER; ;	# settet av mulige tilstander
set LINKS within (NODER cross NODER) ;	# settet av grener $n = (i, j)$
set VP ;	# settet av underliggende papir p
param inn {VP} >= 0 ;	# parameter for innløsningspris I^p
param initial {VP} >= 0 ;	# parameter for initialverdi V_0^p
param diskontering >= 0 , <= 1 ;	# parameter for disk.faktor δ
param pris {LINKS , VP} >= 0 ;	# parameter for pris V_n^p
param utbetaling {(i,j) in LINKS , p in VP} ;	parameter for utbetaling D_n^p
= max (pris [i,j,p] - inn[p] , 0) ;	# max $(V_n^p - I^p, 0)$ for hver p
var y{(i,j) in LINKS , p in VP} >=0 , <= 1 ;	# valgprosessen y_n^p
var x {(i,j) in LINKS} >=0 , <=1 ;	# sannsynlighetene μ_n
maximize opsjonspris {p in VP} :	# maksimer opsjonspris for hver p
sum {(i,j) in LINKS}	# $\sum_n$
diskontering * utbetaling[i,j,p] * x[i,j] * y[i,j,p] ;	# $\delta D_n^p \mu_n y_n^p$
subject to vilkaar1 :	# sidevilkår 1
diskontering*x['A','sluk']*pris['A','sluk','p1']+	# $\delta\mu_a V_a^1 +$
diskontering*x['B','sluk']*pris['B','sluk','p1']+	# $\delta\mu_b V_b^1 +$
diskontering*x['C','sluk']*pris['C','sluk','p1']=	# $\delta\mu_c V_c^1 =$
initial ['p1'] ;	# V_0^1
subject to vilkaar2 :	# sidevilkår 2
diskontering*pris['A','sluk','p2']*x['A','sluk']+	# $\delta\mu_a V_a^2 +$
diskontering*pris['B','sluk','p2']*x['B','sluk']+	# $\delta\mu_b V_b^2 +$
diskontering*pris['C','sluk','p2']*x['C','sluk']=	# $\delta\mu_c V_c^2 =$
initial ['p2'] ;	# V_0^2
subject to vilkaar3 :	# sidevilkår 3
x['A','sluk']+x['B','sluk']+x['C','sluk']=1 ;	# $\mu_a + \mu_b + \mu_c = 1$
subject to vilkaar4a :	# sidevilkår 4a
y['a','sluk','p1']+y ['b','sluk','p1']=1 ;	# $y^1_{(a,sluk)} + y^1_{(a',sluk)} = 1$
subject to vilkaar4b :	# sidevilkår 4b
y['b','sluk','p1']+y ['B','sluk','p1']=1 ;	# $y^1_{(b,sluk)} + y^1_{(b',sluk)} = 1$
subject to vilkaar4c :	# sidevilkår 4c
y['c','sluk','p1']+y ['C','sluk','p1']=1 ;	# $y^1_{(c,sluk)} + y^1_{(c',sluk)} = 1$
subject to vilkaar4d :	# sidevilkår 4d
y['a','sluk','p2']+y ['b','sluk','p2']=1 ;	# $y^1_{(a,sluk)} + y^1_{(a',sluk)} = 1$
subject to vilkaar4e :	# sidevilkår 4e
y['b','sluk','p1']+y ['B','sluk','p1']=1 ;	# $y^1_{(b,sluk)} + y^1_{(b',sluk)} = 1$
subject to vilkaar4f :	# sidevilkår 4f
y['c','sluk','p1']+y ['C','sluk','p1']=1 ;	# $y^1_{(c,sluk)} + y^1_{(c',sluk)} = 1$

Datafiler

opsjon1A.dat:

```
set TILSTANDER := a b ;      # Tilstandene
param innlosning := 1 ;      # Innløsningsprisen
param initial := 1 ;         # Initialverdien
param diskontering := 0.8;   # Diskonteringsfaktoren
param pris :=                # Prisen
a      1.5                   # i tilstand a
b      0.5 ;                 # i tilstand b
```

opsjon1B.dat:

```
set TILSTANDER := a b ;      # Tilstandene
param innlosning := 1.5 ;    # Innløsningsprisen
param initial := 1 ;         # Initialverdien
param diskontering := 0.9    # Diskonteringsfaktoren
param pris :=                # Prisen
a     0.8                    # i tilstand a
b     2.2 ;                  # i tilstand b
```

opsjon1C.dat:

```
set TILSTANDER := a b ;      # Tilstandene
param innlosning := 1.2 ;    # Innløsningsprisen
param initial := 1 ;         # Initialverdien
param diskontering := 0.75;  # Diskonteringsfaktoren
param pris :=                # Prisen
a     1.8                    # i tilstand a
b     1.2 ;                  # i tilstand b
```

opsjon2.dat:

```
set NODER := 0 a b c A B C sluk ;             # Nodene i nettverket
                                              # Liten bokstav = opprinnelig node
                                              # Stor bokstav = duplisert node
set LINKS := (0,a) (0,b) (0,c)                # Linker (veier) mellom nodene
(a,A) (a,sluk) (b,B) (b,sluk) (c,C) (c,sluk)
(A,sluk) (B,sluk) (C,sluk) ;
set VP := p1 p2 ;                             # Underliggende papir
param inn := p1 1.2 p2 1.1 ;                  # Innløsningspris for papirene
param ini := 1 ;                              # Initialverdien for alle papir
param diskontering := 0.9 ;                   # Sikker diskonteringsfaktor
param pris :=                                 # Verdien i de ulike tilstandene
[*,*,p1]                                      # for papir 1
 0 a 0
 0 b 0
 0 c 0
 a A 0
 a sluk 0
 A sluk 0.7
 b B 0
 b sluk 0
 B sluk 1.1
 c C 0
 c sluk 0
 C sluk 2.2 ;
[*,*,p2]                                      # for papir 2
 0 a 0
 0 b 0
 0 c 0
 a A 0
 a sluk 0
 A sluk 2.1
 b B 0
 b sluk 0
 B sluk 0.9
 c C 0
 c sluk 0
 C sluk 0.6;
```

Solve-kommandoer

Eksempel 1a:

```
data opsjon1A.dat ;
model opsjon1.mod ;
solve ;
display _varname , _var
```

Eksempel 1b:

```
data opsjon1B.dat;
model opsjon1.mod;
solve ;
display _varname , _var
```

Eksempel 1c:

```
data opsjon1C.dat ;
model opsjon1.mod ;
solve ;
display _varname , _var
```

Eksempel 2:

```
data opsjon2.dat ;
model opsjon2.mod ;
solve ;
display opsjonspris , y , x
```

Løsninger

Eksempel 1a:

```
MINOS 5.5 : optimal solution found.
1 iterations , objective 0.3
: _varname_var:=
1 sanns['a']"0.75
2 sanns['b']"0.25
;
```

Eksempel 1b:

```
MINOS 5.5 : optimal solution found.
1 iterations , objective 0.14
: _varname_var:=
1 sanns['a']"0.77778
2 sanns['b']"0.22222
;
```

Eksempel 1c:

```
MINOS 5.5 : optimal solution found.
1 iterations , objective 0.1
: _varname_var:=
1 sanns['a']"0.22222
2 sanns['b']"0.77778
;
```

Eksempel 2:

```
MINOS 5.5 : optimal solution found.
2 iterations , objective 0.07333333333
Objective = opsjonspris ['p1']
opsjonspris [*] :=
p1 0.0733333                              # Pris på opsjon basert på papir 1
p2 0.176667;                              # Pris på opsjon basert på papir 1
y[*,*,p1]                                 # Optimale valg ved opsjon på p1:
 :   A   B   C   a   b   c   sluk   :=
 0   .   .   .   0   0   0    .
 A   .   .   .   .   .   .    0
 B   .   .   .   .   .   .    0
 C   .   .   .   .   .   .    1            # y[C, sluk, p1] = 1, dvs. innløs ved tilstand c
 a   0   .   .   .   .   .    1            # y[a, sluk, p1] = 1, dvs. ikke innløs ved tilstand a
 b   .   0   .   .   .   .    1            # y[b, sluk, p1] = 1, dvs. ikke innløs ved tilstand b
 c   .   .   0   .   .   .    0     ;
y[*,*,p2]                                 # Optimale valg ved opsjon på p2:
 :   A   B   C   a   b   c   sluk   :=
 0   .   .   .   0   0   0    .
 A   .   .   .   .   .   .    1            # y[A, sluk, p1] = 1, dvs. innløs ved tilstand a
 B   .   .   .   .   .   .    0
 C   .   .   .   .   .   .    0
 a   0   .   .   .   .   .    0
 b   .   0   .   .   .   .    1            # y[b, sluk, p1] = 1, dvs. ikke innløs ved tilstand b
 c   .   .   0   .   .   .    1     ;      # y[C, sluk, p1] = 1, dvs. ikke innløs ved tilstand c
x:=
0 a 0
0 b 0
0 c 0
A sluk 0.196296                           # risikojustert sannsynlighet for tilstand a
B sluk 0.722222                           # risikojustert sannsynlighet for tilstand b
C sluk 0.0814815                          # risikojustert sannsynlighet for tilstand c
a A 0
a sluk 0
b B 0
b sluk 0
c C 0
c sluk 0 ;
```

Litteraturliste

Artikler

[1] J.C. Cox, S.A. Ross & M. Rubinstein: *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics (September 1979).

[2] S.D. Flåm: *Option Pricing by Mathematical Programming*, Economics Department, Bergen University (2007).

[3] G.Grønvik: *Treng vi ein norsk børs?*, Penger og Kreditt 4: 221-228 (2006).

[4] A.J. King: *Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims*, Mathematical Programming Ser. B 91: 543-562 (2002).

Bøker

[5] R.Fourier, D.Gay, B.Kernighan : *AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming* (2.ed.), Duxbury Press (2003).

[6] D.Gale: *Linear Economic Models*, The University of Chicago Press (1960).

[7] J.C. Hull: *Options, Futures and Other Derivates* (6.ed.), Prentice Hall (2005).

[8] D.Kline: *Fundamentals of the Futures Market*, The McGraw-Hill Companies (2000).

[9] S.R. Pliska: *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell, Oxford (1997).

[10] S.M. Ross: *An Elementary Introduction to Mathematical Finance. Options and other topics* (2.ed.), Cambridge University Press (2002).

[11] B.Sandvik: *Innføring i finansteori* (1.utgave), Fagbokforlaget (2003).

[12] K.Sydsæter & P.Hammond: *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall (2002).

Annet

[13] O.Botnen & T.Jansson: *Hva skjer med opsjonsprising der standardmodeller ikke holder?* Siviløkonomoppgave, Høgskolen i Agder (2004).

[14] K.Sydsæter, A.Strøm, P.Berck: *Matematisk formelsamling for økonomer* (3.utgave), Gyldendahl Norsk Forlag (2005).

[15] Ø.Vormestrand: *Opsjonsprising,* Masterutredning, Norges Handelshøgskole (2006)

[16] Forelesningsnotater og handouts fra kurset *ECON345 Numeriske Metoder*, UiB (høsten 2006).

[17] AMPLs nettsider: *www.ampl.com*

[18] Norges Banks nettsider: *www.norgesbank.no*

[19] Oslo Børs nettsider: *www.oslobors.no*