Dualgraden til noen determinentelle varieteter

Masteroppgave i matematikk-algebraisk geometri

Sturla Bingen

Matematisk Institutt
Universitetet i Bergen

20. november 2008

Innhold

Kapittel 1

Duale Varieteter

1.1 Duale Varieteter

I denne oppgaven er vi interessert i å studere duale varieteter, med spesielt hensyn på graden. Vi skal studere en bestemt type av varieteter, determinentelle varieteter, men først vil vi se mer generelt på duale varieteter.

For å definere dualen til en varietet vil vi først definere det duale projektive rommet. En standardkonstruksjon av projektive rom er som *projektivisering* av vektorrom, der projektiviseringen av et vektorrom, V, $\mathbb{P}(V)$, er mengden av 1-dimensjonale underrom. Vi restrikserer oss til vektorrom over en algebraisk lukket kropp. Det projektive rommet av dimensjon N, $\mathbb{P}^N$ defineres som, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$, der V har dimensjon $n = N + 1$. Derfor skal vi bruke vektorrom til å definere det duale projektive rommet også.

For vektorrom har man en naturlig dualitetskonstruksjon som vi tar utgangspunkt i. Gitt et vektorrom, V, vil mengden av lineære former på V også danne et vektorrom. Dette kalles for det duale vektorromet til V, og betegnes med V*. Punktene til V blir da lineære former på V*. Hvis V er et endelig vektorrom av dimensjon n med basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$, vil en basis for V* være $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ der

$$b'_i(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{når } i = j \\ 0 & \text{når } i \neq j \end{cases}$$

For endelige vektorrom gjelder isomorfien $V^{**} \cong V$. Duale vektorrom gir nå en naturlig definisjon på duale projektive rom.

Definisjon 1. La V være et vektorrom med dual V*. Det duale projektive rommet til $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ betegnes $(\mathbb{P}^N)^*$, og er definert ved

$$(\mathbb{P}^N)^* = \mathbb{P}(V^*)$$

Et hyperplan i $\mathbb{P}^N$ gir ligningen

$$a_0x_0 + \cdots + a_Nx_N = 0$$

Som på vektorform kan skrives

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$$

der $\mathbf{a}$ representerer hyperplanet og $\mathbf{x}$ et punkt. Men dette kommuterer så samlet får vi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0 \tag{1.1}$$

I $(\mathbb{P}^N)^*$ representerer $\mathbf{a}$ et punkt mens $\mathbf{x}$ representerer da et hyperplan. Om vi snur om får vi den omvendte sammenhengen, tilsammen får vi at

$$(\mathbb{P}^N)^{**} = \mathbb{P}^N$$

Vi ønsker nå å utvide denne dualiteten til vilkårlige undervarieteter i $\mathbb{P}^N$ Vi har at $(\mathbb{P}^N)^*$ er en parameterisering av hyperplanenene i $(\mathbb{P}^N)^*$, så hvilke hyperplan kan vi bruke til å identifisere en varietet?

La oss tenke oss en enkel varietet, for eksempel en (glatt) kurve i planet . Om vi konstruerer alle tangentene til denne kurven og så visker ut kurven, kan vi lett tegne inn kurven igjen ved hjelp av tangentene. Sa tangentene bestemmes av og bestemmer kurven. Denne ideen ligger bak definisjonene for de mer generelle tilfellene.

Definisjon 2. La H være et hyperplan og X en varietet i $\mathbb{P}^N$. H er et tangenthyperplan til X om det inneholder tangentrommet $T_x(X)$ for et eller annet glatt punkt $x \in X$. Dualvarieteten $X^* \subset (\mathbb{P}^N)^*$ er da gitt som (zariski-)tillukningen av mengden av tangenthyperplan.

$$X^* = \overline{\{H|\text{H er tangenthyperplan til X}\}}$$

Her tar man tillukningen får å kunne dualisere ikke-glatte varieteter. Igjen har vi følgende sammenheng som viser at ordet dualitet er passende

Teorem 1. *Hvis X er en (irredusibel) varietet i $\mathbb{P}^N$, da er X^* en varietet i $(\mathbb{P}^N)^*$ og*

$$X^{**} = X$$

Bevis. Vi viser dette kun for spesialtilfellet der X er en deteremінentell varietet. Se 16.20 i [Har95] eller 1.3.1 i [Tev05] for det generelle tilfellet. □

1.2 Kvadrikker

For å illustrere de fenomenene vi skal arbeide med kan vi se på kvadrikker i $\mathbb{P}^N$. En kvadrikk, Q, i $\mathbb{P}^N$, er en hyperflate gitt av et homogent polynom av grad 2. På matriseform kan man skrive

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$$

der $\mathbf{x}$ gir koordinatene og M er en symmetrisk matrise. For passende valg av basis blir M til og med en diagonalmatrise. Altså kan vi klassifisere kvadrikker ut i fra rangen til M der alle kvadrikker av lik rang er projektivt ekvivalente. På grunn av denne ekvivalens vil eksempler vise den generelle situasjonen.

I det projektive planet, $\mathbb{P}^2$, har vi da 3 typer kvadrikker, svarende til rang 3, 2 og 1. La oss se nærmere på disse og de respektive dualvarietetene.

Rang 3 tilfellet kan for eksempel illustreres med en ellipse, og er glatt av grad 2. Man kan og få graden geometrisk ved å telle antall snittpunkt mellom ellipsen og en generell linje, som og er 2. For å finne graden til dualvarieteten kan vi gå frem på analogt vis, ved å snitte dualvarieteten med en generell linje i $\mathbb{P}^2$*. En generell linje i $(\mathbb{P}^2)^*$ svarer til et punkt i $\mathbb{P}^2$ og punktene til dualvarieteten svarer til tangenthyperflater(tangentlinjer i dette tilfellet) til Q. Graden til dualvarieteten er da gitt av antall tangentlinjer til Q som går igjennom et generelt punkt i $\mathbb{P}^2$. Da får man at graden til Q* oså er 2. I tilegg har vi at ethvert tangenthyperplan tangerer Q i kun et punkt så vi har et 1-1 forhold mellom punktene til Q og punktene til Q*. Vi ser at Q* er en glatt hyperflate av grad 2, det vil si at Q* er igjen en kvadrikk av samme rang som Q.

Rang 2 tilfellet er unionen av 2 linjer. Hver linje vil da svare til et punkt i $(\mathbb{P}^2)^*$, totalt 2 punkt. Merk at Q* ikke er en hyperflate, i slike tilfeller sier vi at Q er defekt.

Rang 1 tilfellet svarer til en dobbellinje. Her har vi per konvensjon ingen glatte punkt så dualvarieteten blir tom.

I det projektive rommet, $\mathbb{P}^3$, har vi 4 typer. Den glatte kvadrikken av rang 4, en kjegle av rang 3, 2 hyperplan av rang 2 og et dobbeltplan av rang 1. Disse tilfellene er analoge til titlfellene i $\mathbb{P}^2$, rang 1 tilfellet er igjen uten glatte punkt og rang 2 tilfellet gir igjen 2 punkter i dualrommet.

Rang 4 tilfellet, den glatte kvadrikken, behandler vi også som over. Tangenthyperplanene tangerer igjen i kun et punkt av Q, sånn at vi har 1-1 forhold mellom punktene på Q og de på Q*. Graden til Q* finner vi ved å telle antall tangenthyperplan som møtes i en generell linje. Igjen får vi at Q* blir en glatt, kvadratisk hyperflate av samme rang som Q.

Det gjenstående tilfellet er når Q er kjeglen av rang 3. Slike Q kan konstrueres ved å ta kjeglen over rang 3 kvadrikker, Q', i $\mathbb{P}^2$ og et generelt punkt $p \in \mathbb{P}^3$. Et tangenthyperplan til Q i et punkt x tangererer ikke bare i x men langs hele linjen bestemt av x og q. Vi ser at $Q^* = Q^{'*}$.

Det er rang 4 tilfellet som betraktes for det 'vanlige' tilfellet mens de andre sies å ha defekt varietet(se under). Men, ved å danne kjeglesnitt, det vil si snitte kvadrikken med generelle hyperplan kan vi også 'fikse' de defekte tilfellene. Ved et hyperplansnitt vil både rang 3 og rang 4 tilfellet i $\mathbb{P}^3$ gi den glatte kvadrikken av rang 3 i $\mathbb{P}^2$. For rang 2 tilfellet kan vi snitte 2 ganger slik at vi år 2 punkter i $\mathbb{P}^1$ der dualvarieteten også er 2 punkter.

Situasjonen blir helt analog for kvadrikker i høyere dimensjon. Men vi skal se at vi kan gå enda lenger og at en tilsvarende sammenheng mellom hyperplansnitt og dualvarieteter også gjelder for generelle varieteter.

1.3 Den Konormale Varieteten

Vi ønsker å studere X* nærmere. Vi er spesielt interessert i å beregne graden til X*, men før vi kommer så langt skal vi se på dimensjonen til X*. For å hjelpe til å beregne denne skal vi se på en den naturlige insidensen i $\mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^*$ som blir mye brukt i studiet av duale varieteter.

Definisjon 3. Gitt varieteten $X \in \mathbb{P}^N$. For alle glatte $x \in X$ og alle tangenthyperplan H som tangerer X i x konstruerer vi insidensrelasjonen

$$I_X^0 = \{(x, H)\}$$

Da er *den konormale varieteten* til X tillukningen i $\mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^*$, $I_X = \overline{I_X^0}$.

Vi har følgende diagram.

$$
\begin{tikzcd}
 & I_X \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N*} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X \subset \mathbb{P}^N & & X^* \subset \mathbb{P}^{N*}
\end{tikzcd}
$$

Av definisjonen ser vi at I_X^0 avbildes på de glatte punktene til X gjennom første projeksjon, og på X* gjennom andre projeksjon. I 'vanlige' tilfeller forventer vi da at $dim(I_X) = dim(X^*)$

1.4 Dimensjonen til I_X

Hva er så dimensjonen til I_X? Av insidensens oppbygning får vi

$$dimI_X = dimX + dim\{\text{hyperplan som tangerer X i et glatt punkt x}\}.$$

Og av definisjonen av tangent hyperplan får vi

$$dimI_X = dimX + dim\{\text{ hyperplan som inneholder tangentrommet } T_{(x,X)}\}.$$

Tangentrommet, $T_{x,X}$, har samme dimensjon som X så vi får

$$dimI_X = dimX + dim\{\text{hyperplan som inneholder et lineært rom av dim X}\}.$$

De projektive rommene er projektivisering av vektorrom, så for å regne videre er det lettest å betrakte dem som vektorrom. Vi har at, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ der V er et vektorrom av dimensjon N+1. For hyperplan i $\mathbb{P}^N$, H, kan vi sette $H = \mathbb{P}(U)$ der U har dimensjon N. Og lineære rom kan vi da sette som $\mathbb{P}(W)$ der $dim(W) = dim(X) + 1$. Dermed er vi interessert i, fra siste del av ligningen over

$$\{U\} \text{ der } W \subset U \subset V$$

Deler vi ut med W får vi

$$\{U/W\} \text{ der } U/W \subset V/W$$

Tilhørende blir dimensjonene

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W) = N + 1 - (dim(X) + 1)$$
$$dim(U/W) = dim(U) - dim(W) = N - (dim(X) + 1)$$

Og projektivt blir dim $(\mathbb{P}(V/W)) = N - dim(X) - 1$. Setter vi nå inn får vi at

$$dim(I_X) = dim(X) + N - dim(X) - 1 = N - 1$$

Så X* kan vi og vanligvis forvente å ha dimensjon N-1, altså være en hyperflate i $\mathbb{P}^{N*}$. Hvis X* ikke er er hyperflate har vi følgende definisjon.

Definisjon 4. La X være en varietet i $\mathbb{P}^N$. Da er (dualitets)defekten til X,

$$def(X) = N - 1 - dim(X^*)$$

Merk at siden X=(X*)*(teorem 1) er enhver varietet dualen til en eller annen varietet, så hvis dim(X)<N-1 er def(X*)>0, så defekte varieteter er egentlig ikke uvanlige.

Hvis def(X)=d>0 vil fiberen (ved projeksjonen $\pi_2(I_X)$) til ethvert punkt H i X* ha dimensjon d. Altså vil tangeringslokuset mellom X og H også ha dimensjon d. For eksempel, for en kjegle i $\mathbb{P}^3$ vil tangeringslokuset være en linje.

1.5 Hyperplansnitt og projeksjon

Vi så at for en defekt kvadrikk kunne ved et hyperplansnitt få en kvadrikk med mindre defekt, nå skal vi vise at dette også gjelder for vilkårlige projektive varieteter. Samtidig får vi en relasjon mellom et hyperplansnitt i $\mathbb{P}^N$ med en projeksjon fra punktet svarende til hyperplanet i $(\mathbb{P}^N)^*$. Dette kan vi og bruke til å si litt om dualgraden til varieteten.

Så, la $X \subset \mathbb{P}^N$ være en projektiv varietet av dimensjon n. La H være et generelt hyperplan i $\mathbb{P}^N$, da er $X \cap H \neq \emptyset$. I $\mathbb{P}^N*$ er X* dualvarieteten til X mens H vil svare til et punkt h. Siden H er generelt vil $h \notin X^*$, så vi kan projisere X* fra punktet h. Situasjonen oppsummeres i følgende diagram.

$$\begin{tikzcd}
 & & I_X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \subset\mathbb{P}^N\times(\mathbb{P}^N)^* \\
\mathbb{P}^N\supset & X \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[ddd, dotted, no head] & & X^* \arrow[d, "\pi_h"] & \subset(\mathbb{P}^N)^* \\
 & & & \pi_h(X^*) & \\
 & & & & \subset(\mathbb{P}^{N-1})^* \\
\mathbb{P}^{N-1}\supset & X\cap H \arrow[rr, dotted, no head] & & (X\cap H)^* &
\end{tikzcd}$$

Først vil vi undersøke hva som skjer på venstre side av diagrammet, altså hva som skjer ved et generelt hyperplansnitt med tanke på dualitet. La x være et glatt punkt på X og anta $x \in X \cap H$. La T være et tangenthyperplan som tangerer X i x, det vil si at det inneholder tangentrommet $T_{X,x}$. Siden H er generelt vil $T \cap H$ være et hyperplan i $\mathbb{P}^{N-1}$ og vil inneholde tangentrommet $T_{X\cap H,x}$. Så $T \cap H$ er et tangenthyperplan til $X \cap H$.

Omvendt, et tangenthyperplan T' til $X' = X \cap H$ i x vil svare til en pensel av hyperplan i $\mathbb{P}^N$, presist de som inneholder T', $\{T_i | T_i \supset T'\}$. Dim(T_i) er lik $dim(T) + 1$ samtidig som $dim(T_{X,x}) = dim(T_{X\cap H,x}) + 1$. Og siden $T_i \supset T_{X\cap H,x}$ vil vi da ha $T \subset T_{X,x}$ for en eller annen $T \in T_i$. Altså er T et tangenthyperplan til X i x.

Om vi dualiserer vil tangenthyperplanene til X, svare til punktene til X* og omvendt, og tangenthyperplanene til $X \cap H$ svarer til punktene til $(X \cap H)^*$ og omvendt. Vi får da gjennom projeksjonen π_H at

$$(X \cap H)^* \subset \pi_H(X^*)$$

Vi kan undersøke denne inklusjonen nærmere ved å se på hva dualitetsdefekten har å si for den.

Sats 1. *La X og* π_H *være som over, og la i være inklusjonen* $i : (X \cap H)^* \to \pi_H(X^*)$.
a)Dualititsdefekten, def(X)=d >0 hvis og bare hvis i er surjektiv. Ekvivalent, def(X)=d >0 hvis og bare hvis $(X \cap H)^* = \pi_H(X^*)$.
b)Hvis def(X)>0 er π_H *endelig.*
c)Hvis def(X)=d>0 er def($X \cap H$*)=d-1.*

Bevis. a) Anta def(X)>O og la $t \in \pi_h(X^*)$. Da vil t svare til minst et punkt i X* som korresponderer til en tangenthyperflate til X. Siden denne tangenthyperflaten vil ha et tangeringslokus med X av dimensjon d. Det vil si at den tangerer i minimum en kurve. Minst et av punktene på kurven vil da være med i $X \cap H$ siden en kurve og et generelt hyperplan snitter i minst et punkt. Så ethvert tangenthyperplan til X vil også være et tangenthyperplan til $X \cap H$. Så $t' \in (X \cap H)^*$ og følgelig er i en surjektiv inklusjon. Omvendt, hvis vi antar at def(X)=0, det vil si at X* er en hyperflate, er dim(X*)=N-1. Da vil $dim(\pi_h(X*)) = N - 1$ mens $dim((X \cap H)^*) = (N - 1) - 1 = N - 2$.

b) Dette følger av standardegenskapene til projeksjoner. Siden d>0 er X* ikke en hyperflate. π_H er da en naturlig projeksjon av X* fra et punkt $H \notin X*$ til $\mathbb{P}^{N-1*}$. Linjer fra H møter da X* høyst endelig mange ganger, så π_H er endelig.

c) Ved (a) og (b) får vi at $dim((X \cap H)^*) = dim(\pi_h(X^*)) = dim(X^*)$. Men, $(X \cap H)^* \subset \mathbb{P}^{N-1*}$ så def($X \cap H$) $= (N - 1) - 1 - dim(X \cap H)^* = N - 1 - dim(X^*) - 1 = def(X) - 1$ □

Korollar 1. *Anta def(X)>0. La grad(X*) betegne graden til X*. Da er*

$$grad(X^*) = grad((X \cap H)^*)$$

Bevis. Vi har at $(X \cap H)^* = \pi_H(X^*)$ og siden X* ikke er en hyperflate har vi at grad(X*)=grad($\pi_H(X^*)$). □

1.6 Graden til duale varieteter

For å prøve å beregne graden er det igjen nyttig å skille mellom når X har positiv defekt og når X ikke har defekt. Hvis $def(X) = d > 0$ kan vi sette

$$X_d = X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_d.$$

Iterativt bruk av sats (1) gir da at $def(X_d) = 0$, og av korollaret ser vi at graden til X* er lik graden til X_d*. Altså kan vi betrakte tilfellene med positiv defekt som trivielle med tanke på graden.

Bemerkning 1. Av denne grunn er det klassiske begrepet *klassen* til X lik graden til X* hvis X* er en hyperflate og lik 0 når X er defekt.

Hvis def(X)=0 er X* altså en hyperflate. X* er da gitt som nullpunktsmengden til et irredusibelt polynom. Graden til X* er da graden til dette polynomet, men å bestemme polynomet eksplisitt behøver slett ikke være enkelt. Å kunne bestemme graden er da et mindre ambisiøst prosjekt men er likevel en nyttig invariant å studere.

Hvis X er glatt gir følgende teorem oss en formel for å beregne graden til dualen til X. Formelen teller antall punkt i snittet mellom X* og en generell linje i dualrommet. Spesielt så får man da null om X* ikke er en hyperflate, samme som for den klassiske klassen til X.

Teorem 2. *La X være en glatt projektiv varietet. For enhver null-dimensjonal sykel Z på X er betegner $\int_X Z$ graden til Z (antall punkt i Z). Hvis X* er en hyperflate er graden gitt ved*

$$deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_X \frac{c(T_X)}{(1+ht)^2} \tag{1.2}$$

der $c(T_X)$ er chernpolynomet til tangentbunten T_X til x, h er klassen til et hyperplan og t er en formell variabel.

Bevis. Dette er en formel av Nicholas Katz sitert fra [Ful98]. For flere formler av denne typen se kapitell 6 i [Tev05]. □

Bemerkning 2. Resultater som omhandler snitt-teori og chern-klasser kommer til å bli brukt uten videre forklaring. Resultatene er å finne i [Ful98].

1.7 Dualgraden til en hyperflate

Som et eksempel på bruk av formelen (1.2) skal vi bruke den på tilfellet der X er er er hyperflate av grad d i $\mathbb{P}^N$.

$$deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_X \frac{c(T_X)}{(1+h)^2}$$

Vi kan finne $c(T_X)$ ved hjelp av den eksakte sekvensen

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^N|_X} \to (N_X) \to 0.$$

der T_X er tangentbunten til X, $T_{\mathbb{P}^N|_X}$ er tangentbunten til $\mathbb{P}^N$ restrisert til X og N_X er normalbunten til X. Vi har at

$$c(T_{\mathbb{P}^N|_X}) = (1+h)^{N+1}$$
$$.c(N_X) = 1 + dh$$

Fra elementæregenskapene til chern-polynomer har vi at

$$c(T_X) = \frac{c(T_{\mathbb{P}^N|_X})}{c(N_X)}.$$

Så innsatt blir

$$deg(X^*) = (-1)^{N-1} \int_X \frac{(1+h)^{N-1}}{(1+h)^2}.$$

For å evaluere integralet over $\mathbb{P}^N$ i stedet for over X må vi gange med dh siden dh er klassen til X.

$$
\begin{aligned}
deg(X^*) &= (-1)^{N-1}\int_{\mathbb{P}^N} \frac{(1+h)^{N-1}}{(1+h)^2}dh \\
&= (-1)^{N-1}\int_{\mathbb{P}^N} (\binom{N-1}{0}h^{N-1} + \binom{N-1}{1}h^{N-2} + \dots \\
&\quad + \binom{N-1}{N-1}h^0)(1 - dh + d^2h^2 - d^3h^3 + \dots)dh
\end{aligned}
$$

Siden $\mathbb{P}^N$ har dimensjon N har vi når vi evaluerer på $\mathbb{P}^N$ at

$$
h^a = \begin{cases} 1 & \text{for a=N} \\ 0 & \text{for } a \neq N \end{cases}
$$

Derfor er det nok å se på koeffisienten til h^N leddet. Koeffisienten er

$$
d(\binom{N-1}{0} - \binom{N-1}{1}d + \binom{N-1}{2}d^2 - \dots (-1)^{N-1}\binom{N-1}{N-1}d^{N-1})
$$

som vi kan trekke sammen ved binomialteoremet og vi får

$$
deg(X^*) = d(d-1)^{N-1}. \tag{1.3}
$$

Vi ser at hvis d=1 så er hyperflaten et hyperplan og graden til dualen blir 0 som man forventet for et punkt.For d=2 får vi bekreftet at en glatt kvadrikk har en dual av grad 2 som også gir en glatt kvadrikk.

Kapittel 2

Determinentelle Varieteter

2.1 Determinentelle Varieteter

Definisjon 5. Hvis V er vektorrommet av alle $m \times n$ matriser, så er projektiviseringen den generiske determinentelle varieteten, $M = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{mn-1}$. For alle k er $M_k \subset M$ undervarieteten gitt av matriser av rang k eller mindre.

Denne definisjonen gjør matriser om til projektive rom på den mest naturlige måten. Gitt en matrise $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{m \times n}$ er da $\{a_{i,j}\}$ variablene i det tilhørende projektive rommet.

Eksempel 1. Det enkleste eksempelet er, M_1, undervarieteten svarende til matriser av rang mindre eller lik 1. M_1 kan også sees på som Segre varieteten gitt ved $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{mn-1}$. Fordi, om vi har $(x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{P}^{m-1}$ og $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$ er Segre varieteten produktet, $(x_0y_0, \ldots, x_iy_j, \ldots x_my_n)$. Dette må nødvendigvis ha rang mindre eller lik 1 siden det er et produkt av to vektorer. Omvendt vil enhver rang 1 matrise kunne skrives som et slikt produkt.

2.2 Dimensjonen til M_k

For å beregne dimensjonen til M_k ser vi på insidenskorrespondansen

$$\Psi = \{(A, \Lambda) | \Lambda \subset Ker(A)\} \subset M \times G(n-k, n).$$

Siden enhver $m \times n$ matrise, A, definerer en lineær transformasjon $A : K^n \to K^m$. Vi ser så på koordinatprojeksjonene

$$\pi_1 : \Psi \to M \text{ og } \pi_2 : \Psi \to G(n-k, n).$$

Hvis $A \in M_K$, så er nulliteten til A lik n-k, så π_1 er bijektiv på M_k og vi får

$$dim(M_k) = dim(\Psi).$$

For hver $\Lambda \in G(n-k, n)$ vil rommet av transformasjoner $A : K^n \to K^m$ der $\Lambda \subset Ker(A)$ være $Hom(K^n/\Lambda, K^m)$ som har dimensjon km som vektorrom. Fibrene til π_2 er da projektive rom av dimensjon km-1, og da vi vet at $dim(G(n-k, n)) = (n-k)k$ får vi

$$dim(M_k) = dim(\Psi) = dim(G(n-k,n)) + km - 1 = k(m+n-k) - 1.$$

Alternativt kan dette skrives som

$$codim(M_k) = mn - 1 - km - nk + k^2 + 1 = (m-k)(n-k).$$

2.3 Graden til M_k

Teorem 3. *La M_k være den determinentelle varieteten gitt av mengden av $m \times n$ matriser med rang mindre eller lik k. Da er graden til M_k gitt ved*

$$deg(M_k) = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{\binom{m+i}{k}}{\binom{k+i}{k}}.$$

Bevis. 19.10 i [Har95] gir et bevis for tilfellet $m \geq n = k+1$, ellers se [Ful98] 14.4.11. □

2.4 Tangentrommet til M_k

La $A \in M_k - M_{k-1}$ være et punkt representert ved en matrise av grad k. For passende valg av basis for K^m og K^m kan vi representere A med følgende matrise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

La U være et affint omegn av A gitt ved $X_{1,1} \neq 0$. Kan da sette de Euklidske koordinatene som $x_{i,j} = X_{i,j}/X_{1,1}$ da kan et generelt punkt av U skrives som

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & & x_{1,m} \\ x_{2,1} & 1+x_{2,2} & x_{2,3} & \dots & & x_{2,m} \\ \vdots & & \dots & & & \\ x_{l,1} & \dots & 1+x_{l,l} & x_{l,l+1} & \dots & x_{l,m} \\ x_{l+1,1} & \dots & x_{l+1,l} & x_{l+1,l+1} & \dots & x_{l+1,m} \\ \vdots & & & & & \\ x_{n,1} & \dots & & & & x_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Tangentrommet er bestemt av de partiell deriverte av de lineære leddene til $(k+1) \times (k+1)$ minorene. Når l<k har ingen $(k+1) \times (k+1)$ minorer noen lineære ledd, og tangentrommet i et punkt i M_{k-1} blir hele M.

Når $l = k$ er de eneste $(k+1) \times (k+1)$ minorene med lineære ledd de som består av alle de k første radene og kolonnene. Videre blir de lineærene leddene alle på formen $x_{i,j}$ med i,j>k, av disse er det eksakt (m-k)(n-k) valgmuligheter. Siden dette også er kodimensjonen til M_k så er M_k glatt for punkt med i $M_k - M_{k-1}$. Tangentrommet er da bestemt ved rommet av matriser der nedre høyre $(m-k) \times (n-k)$ undermatrise er 0. M_{k-1} utgjør singulærlokuset til M_k.

2.5 Dualvarieteten til M_k

Nå som vi har funnet tangentrommet til M_k kan vi bestemme tangenthyperplanene og dermed dualvarieteten som var gitt ved

$$M_k^* = \overline{\{H|\text{H er tangenthyperplan til } M_k\}}.$$

H_A er et tangenthyperplan i et glatt punkt A hvis det inneholder tangentrommet. Vi så at slike tangentrom var bestemt av matrisen med $x_{i,j} = 0$ for $i, j > k$ Generelt kan vi skrive et hyperplan som $Z(\sum a_{i,j} x_{i,j})$. Så hvis H_A skal inneholde tangentrommet må vi ha at koeffisientmatrisen har formen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,m} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

I dualrommet er H_A et punkt. Og analogt med at $A \in M_k$ ser vi at $H_A \in M_{min(m-k,n-k)}$. Vi kan anta at $m \leq n$ uten tap av generalitet. Vi får da at

$$M_k^* \subset M_{m-k}.$$

Som da gir

$$M_{m-k}^* \subset M_{m-(m-k)} = M_k.$$

Følger dermed at om vi aksepterer bidualiteten, X**=X (teorem 1), blir

$$M_k^* = M_{m-k}.$$

Eventuelt kan vi vise bidualiteten for determinentelle varieteter, $M_k^{**} = M_k$, direkte ved følgende lemmaer

Lemma 1. *Gitt matrisenene A og B. Da er produktet AB=**0** bevart ved Gauss-Jordan eliminasjon.*

Bevis. Hvis $\mathbf{a}_i$ er rekkevektorene i A og $\mathbf{b}_j$ er søylevektorene i B, har vi at $AB = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$ for alle i og j. Så hvis to rekker i A ombyttes vil det samme gjelde. Ved multiplikasjon med en skalar, k, får vi $k\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$ for alle i og j. Og om en multippel av en rekke legges til en annen får vi $\mathbf{a}_{i_1+k}\mathbf{a}_{i_2} \cdot \mathbf{b}_j = 0$. □

Lemma 2. *La $A \in A_k = M_k - M_{k-1} \subset M$ og $B \in A_{m-k} \subset M^*$ være respektivt representert ved matrisene A og B. Vi sier at B er dual til A om B inneholder tangentrommet til A_k i A, $B \supset T_A(A_K)$. Da er B dual til A hvis og bare hvis $AB^T = 0$ og $A^T B = 0$.*

Bevis. Hvis B er dual til A ser vi at A og B blir som matrisene A (2.1) og B (2.2) i diskusjonen over og vi får $AB^T = 0$ og $A^TB = 0$ ved å gange ut.

Omvendt hvis $AB^T = 0$ og $A^TB = 0$ kan vi ved Gauss-Jordan elminasjon på totalmatrisen [A|B] få A som på formen lik A over. Av lemmaet over blir produktet fortsatt **0**. Skriver så matrisene på blokkform

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{og } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

. Vi har at $AB^T = 0$ og $A^TB = 0$. vi utnytter at vi kan multiplisere blokker tilsvarende som om de skulle være vanlige matrise-entryer. Dette gir da at $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, så B kommer på formen lik B over slik at B er dual til A. □

Hvis B er dual til A får vi at $AB^T = 0$ og $A^TB = 0$. Transponert får vi at $(AB^T)^T = BA^T = 0$ og at $(A^TB)^T = B^TA = 0$ slik at A er dual til B, og bidualitet gjelder som forventet.

2.6 Determinentelle varieteter og hyperplansnitt

Nå skal vi bruke situasjonen fra sats (1) på tilfellet der X er en determinentell varietet gitt av $m \times n$ matriser av rang k, $X = M_k$. Vi husker diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & & I_X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N*} \\
\mathbb{P}^N \supset & X \arrow[rr, dash, dotted] \arrow[ddd, dash, dotted] & & X^* \arrow[d, "\pi_h"] & \subset \mathbb{P}^{N*} \\
 & & & \pi_h(X^*) & \\
 & & & & \subset \mathbb{P}^{N-1*} \\
\mathbb{P}^{N-1} \supset & X \cap H \arrow[rr, dash, dotted] & & (X \cap H)^* &
\end{tikzcd}$$

Nå som vi har vist at $X^* = M_{m-k}$(eller M_{n-k} om m>n) så har vi formler for dimensjonen og graden til X og tilsvarende for X*. Oppsummert har vi for dimensjonene

$$\begin{aligned}
dim(X) &= k(m+n-k) - 1 \\
codim(X) &= (m-k)(n-k) \\
dim(X^*) &= (m-k)(n+k) - 1 \\
codim(X^*) &= k(n-m+k) \\
def(X) &= codim(X^*) - 1 = k(n-m+k) - 1
\end{aligned} \tag{2.3}$$

.

Vi snitter X med passende hyperplan og setter

$$X_r = M_k \cap \mathbb{P}^{N-r} = M_k \cap H_1 \cap \ldots \cap H_r.$$

Vi er interessert i å beregne graden til X_r^*. Iterativt bruk av korollaret til teorem (1) gir

$$grad(X^*_{def(X)}) = grad(X^*).$$

Derimot når $r > def(X) = 0$ vil $def(X_r) = 0$ og $X_r{}^*$ er da en hyperflate. Da trenger $\pi_h(X_r^*)$ ei å bevare graden. Hvis X_r er glatt kan vi bruke formelen(refeq:dualgrad) og dette gjør vi for noen konkrete tilfeller i kapittel 3. Nå skal vi først vise at om vi klarer å beregne graden i et slikt konkret tilfelle får vi et annet tilfelle med på kjøpet på grunn av speilsymmetrien mellom M_k og $M_k^*{=}M_{m-k}$.

Bemerkning 3. For overgangstilfellet $r = def(X)$ hvis X_r er glatt vil vi kunne beregne graden til $X_r{}^*$ både ut i fra formelen (1.2) og ut i fra teorem (3). På denne måten kan teorem (3) i noen tilfeller utledes av (1.2). Spesielt kan vi bruke dette for M_1 som er glatt for alle r.

2.7 Å beregne dualgraden til noen ikke-glatte determinentelle varieteter

For enkelthetsskyld begrenser vi oss til å se på determinentelle varieteter gitt av kvadratiske matriser, det vil si at m=n. Får av (2.3)

$$\begin{aligned}
dim(X) &= k(m+n-k) - 1 = 2mk - k^2 - 1 \\
codim(X) &= (m-k)(n-k) = (m-k)^2 \\
dim(X^*) &= (m-k)(n+k) - 1 = m^2 - k^2 - 1 \\
codim(X^*) &= k(n-m+k) = k^2 \\
def(X) &= codim(X^*) - 1 = k^2 - 1
\end{aligned} \tag{2.4}$$

.

Definerer nå

$$\sigma(m,r,k) = \begin{cases} grad(M_k \cap \mathbb{P}^{N-r})^* & \text{når } (M_k \cap \mathbb{P}^{N-r})^* \text{ er en hyperflate} \\ 0 & \text{når } (M_k \cap \mathbb{P}^{N-r})^* \text{ ikke er en hyperflate} \end{cases}$$

Det vil si at $\sigma(m,r,k)$ er klassen til $M_k \cap \mathbb{P}^{N-r} = X_r$. Følgende diagram gir et oversiktsbilde over X_r og tilhørende $\sigma(m,r,k)$

$$
\begin{tikzcd}
I_X \subset \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^N)^* \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \sigma(n,r,k) \\
X = X_0 = M_k \subset \mathbb{P}^N & M_k^* = M_{n-k} \subset (\mathbb{P}^N)^* \arrow[d, "\phi_1"'] & 0 \\
X_1 \arrow[d, dotted, dash] & X_1^* = \phi_1(X_O^*) \arrow[d, dotted] & 0 \\
X_{def(M_k)} = X_{k^2-1} & X_{k^2-1}^* = \phi_{k^2-1}(X_{k^2-2}^*) \arrow[d, "\phi_{k^2}"'] & > 0 \\
X_{k^2} \arrow[d, dotted, dash] & X_{k^2}^* \subset \phi_{k^2}(X_{k^2-1}^*) \arrow[d, dotted] & > 0 \\
X_{dim(M_k)-1} = X_{(n-k)^2-1} & X_{(n-k)^2-1}^* \subset \phi_{(n-k)^2-1}(X_{(n-k)^2-2}^*) \arrow[d, "\phi_{(n-k)^2}"'] & > 0 \\
X_{dim(M_k)} = \emptyset & \emptyset \subset \phi_{(n-k)^2}(X_{(n-k)^2-1}^*) & 0
\end{tikzcd}
$$

Anta at r er slik at X_r^* er en hyperflate, det vil si at $r \geq k^2 - 1$, da finner vi graden til X_r^* ved å snitte X_r^* med $dim(X_r^*) = N - r - 1$ generelle hyperplan i $\mathbb{P}^{N-r}$ og teller antall punkt. har nå at

$$
\begin{gathered}
(X_r)^* \cap h_1 \cap \ldots \cap h_{N-r-1} \\
\text{der } X_r = M_k \cap H_1 \cap \ldots \cap H_r
\end{gathered}
$$

der er H hyperplan i $\mathbb{P}^N$ mens h er hyperplan i $(\mathbb{P}^{N-r})^*$. Vi vil løfte hyperplanene h til hyperplan i $(\mathbb{P}^N)^*$, dette kan vi gjøre ved å sette

$$H_i' = h_i \cap \mathbb{P}^r.$$

Nå vil h korrespondere med hyperplan H' i $(\mathbb{P}^N)^*$. Husk at

$$I_X = I_{M_k} = \{(x, H) | \text{hyperplan, H, som tangerer X i et glatt punkt } x \in X\}$$

har dimensjon N-1.

Ser vi nå på pullbackene av hyperplanene H og H' er disse divisorer til konormalen I_X

$$\pi_1^*(H_1), \ldots \pi_1^*(H_r) \text{ og} \pi_2^*(H_1'), \ldots \pi_2^*(H_{N-r-1}').$$

Totalt har vi N-1 divisorer og om vi snitter med I_X får vi da et antall punkt som gir graden. Så vi har at

$$\sigma(n,r,k) = I_X \cap \pi_1 * (H_1) \cap \ldots \cap \pi_1 * (H_r) \cap \pi_2 * (H_1') \cap \ldots \cap \pi_2 * (H_{N-r-1}').$$

Men ved ren symmetri ser vi at vi kan bytte rollene til hyperplanene fra $\mathbb{P}^N$ med de fra $(\mathbb{P}^N)^*$. Dette gir

Sats 2. *La M_k være den determinentelle varieteten svarende til mengden av $m \times m$-matriser av rang mindre eller lik k og la*

$$\sigma(m,r,k) = \begin{cases} grad(M_k \cap \mathbb{P}^{N-r})^* & \text{når } (M_k \cap \mathbb{P}^{N-r})^* \text{ er en hyperflate} \\ 0 & \text{når } (M_k \cap \mathbb{P}^{N-r})^* \text{ ikke er en hyperflate} \end{cases}$$

Da er

$$\sigma(m,r,k) = \sigma(m, N-r-1, m-k) \tag{2.5}$$

der $N = m^2 - 1$ er dimensjonen til den generiske determinentelle varieteten gitt av mengden av alle $m \times m$-matriser.

Bevis. Det gjenstår kun å vise tilfellet der $X_r^* = M_k \cap \mathbb{P}^r$ ikke er en hyperflate. Det vil si at $r < def(M_k) = codim(M_{m-k})$ og da er

$$\sigma(n,r,k) = 0.$$

Da må vi se på M_{m-k} for å vise at vi også har at $\sigma(m, N-1-r, m-k) = 0$. Vi har at

$$\begin{aligned} r &< codim(M_{m-k}) - 1 \\ r &< N - dim(M_{m-k}) - 1 \\ dim(M_{m-k}) &< N - r - 1 \end{aligned}$$

som gir

$$\sigma(m, N-1-r, m-k) = 0 = \sigma(m,r,k)$$

som forventet. □

Hvis vi nå kan beregne dualgraden til noen determinentelle varieteter kan vi dernest bruke satsen til å finne dualgraden til de determinentelle varitetene gitt av matriser med korang til de første. Fordelen her er at vi kan bestemme dualgraden indirekte til noen tilfeller som i utgangspunktet ikke er så lette å bestemme, de er for eksempel ikke glatte slik at man ikke kan bruke formelen (1.2).

Kapittel 3

Beregninger

Vi spør oss nå hvilke determentelle varieteter vi kan beregne dualgraden lettest. Vi skal bruke formelen (1.2) som kun kan brukes på glatte varieteter. Av de determinentelle varietetene er det kun de med rang k=1 som er glatte, og da disse også er de enkleste eksemplene er det naturlig å ta utgangspunkt i å beregne deres dualgrad. Vi har også hjelp av Segre representasjonen av rang 1 tilfellet som produktet av to projektive rom (se eksempel (1)).

3.1 Beregning av graden til en dualvarietet

Vi definerer en projektiv varietet X ved å snitte $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ med r hyperplan

$$X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \cap H_1 \cap \ldots \cap H_r \tag{3.1}$$

X har da åpenbart dimensjon 2n-r. Vi ønsker å beregne graden til dualvarieteten til X ved hjelp av formelen (1.2) som var

$$deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_X \frac{c(T_X)}{(1+ht)^2}$$

der h var klassen til et hyperplan på $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Utregningen ligner på den vi hadde for dualgraden til hyperplan (avsnitt 1.3.1). Først bestemmer vi $c(T_X)$ ved hjelp av den eksakte sekvens

$$0 \to T_X \to T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} \to c(N_X) \to 0$$

Og fra elementæregenskapene til chern-polynomer fikk vi

$$c(T_X) = \frac{c(T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n})}{c(N_X)}.$$

Man kan bestemme

$$\begin{aligned} c(T_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} &= (1+h_1)^{n+1}(1+h_2)^{n+1} \\ c(N_X) &= (1+h)^r \end{aligned}$$

der h_1 og h_2 er klassene til hyperplan i hver sin $\mathbb{P}^n$ slik at $h_1 + h_2 = h$. Dette gir

$$c(T_X) = \frac{(1+h_1)^{n+1}(1+h_2)^{n+1}}{(1+h)^r}$$

som insatt i (1.2) gir

$$deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_X \frac{(1+h_1)^{n+1}(1+h_2)^{n+1}}{(1+h)^{r+2}} \tag{3.2}$$

Vi omformer dette først ved binomialekspansjon av nevneren. Kun leddene i ekspansjonen med grad $\leq$ dim(X) er interessante ettersom vi skal evaluere på X. Vi får

$$deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_X (1+h_1)^{n+1}(1+h_2)^{n+1}(\sum_{k=0}^{dim(X)} (-h)^k \binom{r+1+k}{k})$$

For telleren i (3.2) bruker vi følgende lemma

Lemma 3.

$$(1+a)^g(1+b)^g = \sum_{0 \leq e,f \leq g} \binom{g}{e}\binom{g}{f} a^e b^e$$

Bevis. Ved induksjon på g. Initialtilfellet kan sjekkes trivielt, så anta lemmaet stemmer for alle $g \leq t$. Må vise at det også stemmer for $g = t+1$

$$\begin{aligned}(1+a)^{t+1}(1+b)^{t+1} &= (1+a)^t(1+b)^t(1+a)(1+b)\\ &= (\sum_{e,f \leq t} \binom{t}{e}\binom{t}{f} a^e b^f)(1+a+b+ab)\end{aligned}$$

La oss se på et vilkårlig ledd $a^e b^f$ i $(1+a)^{t+1}(1+b)^{t+1}$

$$\begin{aligned}da^e b^f = 1&\binom{t}{e}\binom{t}{f} a^e b^f + a\binom{t}{e-1}\binom{t}{f} a^{e-1} b^f\\ &+ b\binom{t}{e}\binom{t}{f-1} a^e b^{f-1} + ab\binom{t}{e-1}\binom{t}{f-1} a^{e-1} b^{f-1}\end{aligned}$$

Slik at

$$d = \binom{t}{e}\binom{t}{f} + \binom{t}{e-1}\binom{t}{f} + \binom{t}{e}\binom{t}{f-1} + \binom{t}{e-1}\binom{t}{f-1}$$

Bruker nå følgende identitet

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Får da at

$$\begin{aligned}\binom{t+1}{e}\binom{t+1}{f} &= (\binom{t}{e}+\binom{t}{e-1})(\binom{t}{f}+\binom{t}{f-1}) \\ &= \binom{t}{e}\binom{t}{f}+\binom{t}{e-1}\binom{t}{f} \\ &\quad +\binom{t}{e}\binom{t}{f-1}+\binom{t}{e-1}\binom{t}{f-1} \\ &= d\end{aligned}$$

Og lemmaet følger.

$\square$

Innsatt får vi nå

$$\begin{aligned}deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_X \sum_{0\le i,j\le n+1} &(\binom{n+1}{i}\binom{n+1}{j}h_1^i h_2^j \\ &\cdot \sum_{k=0}^{dim(X)}((-h)^k\binom{r+1+k}{k}))\end{aligned}$$

Av (3.1) ser vi at å evaluere på X er som å evaluere på $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ modifisert med en faktorforskjell h^r

$$\begin{aligned}deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n} \sum_{0\le i,j\le n+1} &(\binom{n+1}{i}\binom{n+1}{j}h_1^i h_2^j \\ &\cdot \sum_{k=0}^{dim(X)}((-1)^k h^{k+r}\binom{r+1+k}{k}))\end{aligned}$$

Fordelen er at når vi nå skal evaluere integralet ved å se på alle leddene av grad 2n (siden 2n er graden til $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$) kan vi se bort fra alle leddene av $h_1^i h_2^j$ med i+j=2n der $i \neq j$ siden da er enten i>n eller j>n og snitter til 0 på den ene eller andre $\mathbb{P}^N$. Derimot, om i=j=n vil de snitte ned til ett punkt, altså

$$\int_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n} h_1^i h_2^j = \begin{cases} 1 & \text{for i=j} \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

Så fra

$$\begin{aligned}deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_{\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n} \sum_{0\le i,j\le n+1} &(\binom{n+1}{i}\binom{n+1}{j}h_1^i h_2^j \\ &\cdot \sum_{k=0}^{dim(X)}((-1)^k \binom{r+1+k}{k}\sum_{l=0}^{k+r}\binom{k+r}{l}h_1^l h_2^{k+r-l}))\end{aligned}$$

kaster vi ut alle leddene untatt de av typen $h_1^n h_2^n$ og vi står igjen med

$$
\begin{aligned}
deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} \int_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n} & \sum_{k=0}^{dim(X)} ((-1)^k \binom{r+1+k}{k} \\
& \cdot \sum_{l=max(k+r-n,0)}^{min(k+r,n)} (\binom{k+r}{l} h_1^l h_2^{k+r-l} \binom{n+1}{n-l} h_1^{n-l} \\
& \cdot \binom{n+1}{n+l-k-r} h_2^{n+l-k-r}))
\end{aligned}
$$

.

Evaluerer vi integralet på $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ står vi kun igjen med koeffisientene

$$
\begin{aligned}
deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} & \sum_{k=0}^{dim(X)} ((-1)^k \binom{r+1+k}{k} \\
& \cdot \sum_{l=max(k+r-n,0)}^{min(k+r,n)} \binom{k+r}{l} \binom{n+1}{n-l} \binom{n+1}{n+l-k-r})
\end{aligned}
$$

Substituerer vi k'=k+r får vi forenklet den andre summasjonen

$$
\begin{aligned}
deg(X^*) = (-1)^{dim(X)} & \sum_{k'=r}^{dim(X)+r} ((-1)^{k'-r} \binom{k'+1}{k'-r} \\
& \cdot \sum_{l=max(k'-n,0)}^{min(k',n)} \binom{k'}{l} \binom{n+1}{n-l} \binom{n+1}{n+l-k'})
\end{aligned}
$$

Siden det kun er indeksering kan vi like godt benevne k' for k igjen. Husk at dim(X)=2n-r, og vi får

$$
\begin{aligned}
deg(X^*) = (-1)^{2n-r} & \sum_{k=r}^{2n} ((-1)^{k-r} \binom{k+1}{k-r} \\
& \cdot \sum_{l=max(k-n,0)}^{min(k,n)} \binom{k}{l} \binom{n+1}{n-l} \binom{n+1}{n+l-k})
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Dette kan og skrives som

$$
\begin{aligned}
deg(X^*) &= (-1)^{2n-r} \sum_{k=r}^{2n} ((-1)^{k-r} \binom{k+1}{k-r} \alpha_k) \\
\text{der, } \alpha_k &= \sum_{l=max(k-n,0)}^{min(k,n)} \binom{k}{l} \binom{n+1}{n-l} \binom{n+1}{n+l-k}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

3.2 Talleksempel

Skal nå regne et eksempel for kontroll og for å se gangen i det. Så la n=2 og r=2. Da er

$$X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \cap H_1 \cap H_2, \text{ dim(X)=2n-r=2}$$

Først tar vi utgangspunkt i formelen (3.2) og vi får

$$\begin{aligned} deg(X^*) &= (-1)^2 \int_X \frac{(1+h_1)^3(1+h_2)^3}{(1+h)^4} \\ &= \int_X ((1+3h_1+3h_1^2+h_1^3)(1+3h_2+3h_2^2+h_2^3) \\ &\quad \cdot (1-h+h^2-h+\ldots)^4) \end{aligned}$$

Siden dimensjonen til X er to er vi interessert i grad 2 leddene. Når vi ganger ut kan vi se bort fra leddene med større grad enn dette. Tilsvarende er de leddene med grad mindre enn 2 kun interessante om de fortsatt er faktorer til å danne produkter av grad 2.

$$\begin{aligned} deg(X^*) &= \int_X (1+3h_1+3h_1^2)(1+3h_2+3h_2^2+h_2^3)(1-h+h^2)^4 \\ &= \int_X (1+3h_1+3h_2+3h_1^2+9h_1h_2+3h_2^2)(1-4h+10h^2) \\ &= \int_X (10h^2-12h_1h-12h_2h+3h_1^2+9h_1h_2+3h_2^2) \end{aligned}$$

Vi går over til å evaluere på $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ som har dimensjon 4. Så vi må se på fjerdegradsleddene.

$$\begin{aligned} deg(X^*) &= \int_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} (10h^2-12h_1h-12h_2h+3h_1^2+9h_1h_2+3h_2^2)h^2 \\ &= \int_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} ((10(h_1+h_2)^2-12h_1(h_1+h_2)-12h_2(h_1+h_2) \\ &\quad +3h_1^2+9h_1h_2+3h_2^2)(h_1+h_2)^2) \end{aligned}$$

Som sagt over er det kun leddene av typen $h_1^2h_2^2$ som gir noe på $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$

$$\begin{aligned} deg(X^*) &= \int_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} (10(h_1^2+^2 h_1h_2+h_2^2)-12h_1(h_1+h_2) \\ &\quad -12h_2(h_1+h_2)+3h_1^2+9h_1h_2+3h_2^2)(h_1^2+^2 h_1h_2+h_2^2) \\ &= \int_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2} h_1^2h_2^2(10+40+10-12-24-24-12+3+18+3) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Alternativt om vi tar utgangspunktet i formelen (3.4) regner vi først ut

$$\alpha_2 = \binom{2}{0}\binom{3}{2}\binom{3}{0} + \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{0}\binom{3}{2} = 24$$
$$\alpha_3 = \binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{0} + \binom{2}{2}\binom{3}{0}\binom{3}{1} = 18$$
$$\alpha_4 = \binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{3}{0} = 6$$

slik at vi får

$$\begin{aligned} deg(X^*) &= (-1)^2 \sum_{k=2}^{4} ((-1)^{k-2} \binom{k+1}{k-2} \alpha_k) \\ &= (-1)^0 \binom{3}{0} \alpha_2 + (-1)^1 \binom{4}{1} \alpha_3 + (-1)^2 \binom{5}{1} \alpha_4 \\ &= 24 - 72 + 60 = 12 \end{aligned}$$

som forventet. Om man i tillegg regner ut α_1 og α_0 kan man lett regne ut dualgraden for alle r når n=2.

3.3 Verditabeller

Her følger en tabell(3.1.1) over dualgraden til $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \cap H_1 \cap \ldots$ for noen flere n og r regnet ut ved hjelp av (3.3). Men, hvis M_1 er den determinentelle varieteten av m $\times m$-matriser av rang 1 som i avsnitt (2.7) da er også M_1 Segre varieteten gitt ved $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{m-1} \rightarrow \mathbb{P}^{m^2-1}$ som i eksempel (1). Tabellen er derfor og en tabell over $\sigma(n+1, r, 1)$.

Tabell 3.1: Tabell over $\sigma(n+1, r, 1)$

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=10
r=0	2	3	4	5	6	11
r=1	2	6	12	20	30	110
r=2	2	12	36	80	150	1100
r=3		12	68	220	540	8580
r=4		6	84	430	1440	53130
r=5			60	580	2832	265584
r=6			20	520	4080	1087680
r=7				280	4200	3689400
r=8				70	2940	10442190
r=9					1260	24770020
r=10					252	49327960
r=11						82390000
r=12						114985200
r=13						133161600
r=14						126572160
r=15						97146192
r=16						58760130
r=17						26984100
r=18						8848840
r=19						1847560
r=20						184756

Som en liten sjekk kan vi bruke bemerkning (3). Siden M_1 har ingen defekt vil grad(M_1^*) gi oss verdiene i den øverste rekken. Denne graden beregner vi ved hjelp av teorem (3) som gir

$$\begin{aligned} grad(M_1^*) = grad(M_{m-1}) &= \prod_{i=0}^{m-(m-1)-1} \frac{\binom{m+i}{m-1}}{\binom{m-1+i}{m-1}} \\ &= \frac{\binom{m}{m-1}}{\binom{m-1}{m-1}} = m = n+1 \end{aligned}$$

som er det samme som tabellen viser.

Hovedpoenget er at vi nå kan bruke sats 2 som gir

$$\sigma(n+1, r, 1) = \sigma(n+1, n^2+2n-r-1, n).$$

Da kan vi lage enn ny tabell(3.1.2) ut i fra verdiene fra den forrige. Vi har tabeller med tilsvarende verdier men de er tabeller over 2 forskjellige determinentelle varieteter.

Tabell 3.2: Tabell over $\sigma(n+1, r, n)$

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5		n=10
r=0	2					r=99	184756
r=1	2					r=100	1847560
r=2	2					r=101	8848840
r=3		6				r=102	26984100
r=4		12				r=103	58760130
r=5		12				r=104	97146192
r=6		6				r=105	126572160
r=7		3				r=106	133161600
r=8			20			r=107	114985200
r=9			60			r=108	82390000
r=10			84			r=109	49327960
r=11			68			r=110	24770020
r=12			36			r=111	10442190
r=13			12			r=112	3689400
r=14			4			r=113	1087680
r=15				70		r=114	265584
r=16				280		r=115	53130
r=17				520		r=116	8580
r=18				580		r=117	1100
r=19				430		r=118	110
r=20				220		r=119	11
r=21				80			
r=22				20			
r=23				5			
r=24					252		
r=25					1260		
r=26					2940		
r=27					4200		
r=28					4080		
r=29					2832		
r=30					1440		
r=31					540		
r=32					150		
r=33					30		
r=34					6		

Igjen kan vi bruke bemerkning (3). Tabellen viser verdier for $(M_{m-1} \cap \mathbb{P}^{N-r})^*$. Det øverste tallet i hver søyle svarer til tilfellet der r er lik defekten. Siden $M_{m-1}^* = M_1$ har vi av bemerkningen at

$$grad((M_{m-1} \cap \mathbb{P}^{N-def(M_{m-1})})^*) = grad(M_1).$$

Av formelen (3) eller ved å se på M_1 som Segre-varieteten til $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{m-1}$ får vi

$$grad(M_1) = \binom{2m-2}{m-1} = \binom{2n}{n}.$$

Tar vi da for eksempel n=10 får vi da

$$\binom{20}{10} = 184756$$

som i tabellen.

Vi har og at tallene i tabell (3.1.2) svarer til tall fra tabell (3.1.2) ulik null som viser at de tilhørende varietetene $X = M_{m-1} \cap H_1 \cap \ldots \cap H_r$ kan sees på som hyperflater. Vi kan dobbeltsjekke noen av tallene ved resultatet for glatte hyperflater (1.3) nemlig

$$deg(X^*) = d(d-1)^{N-1}$$

For M_{m-1} er de glatte punktene er de hvor rangen er maksimal, det singulære lokuset er da gitt ved M_{m-2}. Vi har at

$$codim(M_{m-2}) - codim(M_{m-1}) = 2^2 - 1^2 = 3.$$

Slik at om vi snitter med nok hyperplan til at de singulære punktene forsvinner vil vi stå igjen med dimensjonene 0,1 og 2. Hyperflatene er i utgangspunktet med i mengden av $n+1 \times n+1$-matriser og ligningene til hyperflatene er da gitt av de respektive determinantene som har grad n+1=d. Setter vi inn i formelen for glatte hyperplan får vi for eksempel for n=4 verdiene

$$5(5-1)^0 = 5$$
$$5(5-1)^1 = 20$$
$$5(5-1)^2 = 80$$

som er de samme som tabellen.

3.4 Veien videre

Det er to måter å generalisere sammenhengen vi har for $\sigma(m, r, k)$. Vi har til nå bare sett på når k=1, man kunne tenke seg å finne noe for k=2. Dette blir vanskelig av to grunner, for det første har vi ikke glatthet. Kun etter å ha snittet M_2 med nok hyperflater til at singulærlokuset M_1 forsvinner har vi glatthet. For det andre er M_1 Segre varieteten gitt ved produktet av 2 projektive rom, men tilsvarende beskrivelse har vi ikke for M_2.

Alternativt kan vi se på M_1 men da gitt ved rektangulære $m \times n - matriser$ i stedet for kun kvadratiske matriser. Vi har vist at for m<n har vi fortsatt sammenhengen

$$M_k = M^*_{m-k}$$

Igjen kan man utlede speilingen i sats (2)

$$\sigma(m, r, k) = \sigma(m, N - r - 1, m - k)$$

der eneste forskjellen er at nå er N=mn-1. Vi kan og igjen utlede en formel tilsvarende 3.3 ved å se på koeffisientene til leddene av typen $h_1^{m-1} h_2^{n-1}$.

Bibliografi

[Ful98] William Fulton, *Intersection Theory*, Springer, 1998.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[Har95] Joe Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer, 1995.

[Tev05] Evgueni A. Tevelev, *Projective Duality and Homogeneous Spaces*, Springer, 2005.