

Håvard Goodwin Olsen

Oppgave for graden master i statistikk

Dataanalyse

Universitetet i Bergen, Norge

27. april 2010

Punktprosessmodeller
for linjetransektdata



Denne oppgaven er skrevet i L^AT_EX 2_ε med dokumentklassen «uib-mi-master», laget av Karl Ove Hufthammer. Den ble compilert med pdfTeX-1.40.9 den 27. april 2010. Brødteksten er satt i 11 punkts Latin Modern.

Takk

Jeg vil spesielt takke min veileder Hans Julius Skaug for å legge til rette en interessant oppgave, samt for meget god veiledning og hjelp gjennom flere år. Jeg vil også takke Geir Drage Berentsen for å svare på spørsmål når det var noe jeg lurte på og for å lese gjennom oppgaven. En takk går også til resten av Reins-folket.

Innhold

1	Introduksjon	1
1.1	Innledning	1
1.1.1	Linjetransekt	1
1.1.2	Tynning av en punktprosess	2
1.1.3	Markovmodulert Poissonprosess	3
1.1.4	Todimensjonal prosess	3
1.2	Oppbygging av oppgaven	4
2	Punktprosesser	6
2.1	Stokastiske prosesser	6
2.1.1	Markovkjeder	6
2.1.2	Poissonprosesser	8
2.1.3	Fødsels- og dødsprosesser	10
2.2	Markovmodulert Poissonprosess (MMPP)	12
2.3	Transektlinje som en stokastisk punktprosess	14
2.4	Fornylesprosesser	17
2.5	Markov fornyelsesprosesser	17
2.6	MMPP som en Markov fornyelsesprosess	19
3	Estimering av tilstander	23
3.1	Forward-backwardalgoritme for en skjult Markovmodell (SMM)	24
3.2	Simuleringer med diskret SMM og normalfordelte observasjoner	28
3.3	Forward-backwardalgoritme for MMPP	29
3.3.1	Simuleringseksempel	31
4	Telling av nordøstatlantisk vågehval	33
4.1	Tilpasning av MMPP til data	33
4.2	Effekt av tidsvarierende halvstripebredde w	34
4.3	Inhomogen Poissonprosess	42
4.4	Diagnostikk	45
4.5	Estimering av tilstander	50
5	Simuleringer	55
5.1	Likelihoodsimuleringer	55

5.2	IPP simuleringer	62
6	Diskusjon og konklusjon	66
A	Utledninger	69
A.1	Overgangssannsynligheter.	69
A.2	Derivasjon og integrasjon av matriseeksponential.	71
A.3	Utledning av differensialligningen $H'(t)=H(t)C$	73
A.4	Løsning av differensialligningen $H'(t)=H(t)C$	77
A.5	Eksplisitt løsning av matriseeksponentialen for en MMPP.	79
B	Generering av en MMPP	82
	Litteratur	83

1

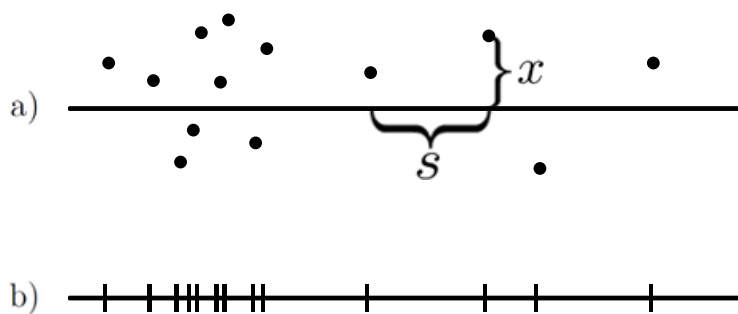
Introduksjon

1.1 Innledning

Denne oppgaven omhandler punktprosesser som modell for sekvensen $\{s_i\}$, avstandene mellom observasjoner langs en transektlinje. En illustrasjon av en transektlinje med observasjoner er gitt i figur 1.1 a), hvor venstre del skal forestille et klynget området. Gjennom oppgaven ser vi på en prosess som tar hensyn til at individer kan klynge seg, det vil si at punkter opptrer oftere i noen perioder av transektlinjen enn andre. I en anvendelse av teorien blir det brukt observasjoner fra vågehval i norske farvann. Linjetransekt sammen med punktprosesser er de metodene som er mest brukt for estimering av dyrebestander (Waagepetersen og Schweder, 2006).

1.1.1 Linjetransekt

Ved et linjetransekt beveger en observatør seg langs en linje og markerer posisjonen til observasjonene. En enklere modell enn linjetransekt er et stripetransekt, som fungerer mye på samme måte. Forskjellen er at det er en bestemt stripebredde som undersøkes på hver side av transektlinjen, med den antagelsen at samtlige individer innenfor stripebredden blir observert (Buckland *et al.*, 2001, side 3). Dette gjør at metoden kan være ineffektiv, fordi individer observert utenfor stripebredden blir ignorert, og bredden må ofte være smal for at antagelsen skal være oppfylt. Ved et linjetransekt blir avstandene fra linjen til punktene



Figur 1.1: Observasjoner langs en transektlinje (a) og de samme observasjonene projisert vinkelrett ned på linjen (b). Illustrasjonen skal forestille et høyintensitetsområde (λ_2) til venstre og et lavintensitetsområde (λ_1) til høyre på linjen, med $\lambda_2 > \lambda_1$ som intensitet i en Poissonprosess. Posisjonene til en observasjon er notert med $\{(x_i, y_i)\}$, hvor y er posisjonen på transektlinjen og x er vinkelrett avstand. Avstand mellom to observasjoner på transektlinjen er gitt som s .

notert, og denne metoden tillater at punkter innenfor stripebredden ikke blir observert. Dette gir at en større stripebredde kan brukes, eller bredden kan være ubegrenset, hvor samtlige observasjoner blir brukt. Her blir det beregnet en effektiv stripebredde, hvor like mange observasjoner blir forbigått på innsiden som observert på utsiden. For individer som er veldig spredt er linjetransekt mer effektiv ettersom det gir et større datasett for samme mengde arbeid (Buckland *et al.*, 2001, side 3), og det er denne metoden som blir vurdert i denne oppgaven. Burnham *et al.* (1985) undersøker og sammenligner effektivitet og skjevhet på linjetransekt og stripetransekt, de konkluderer med at førstnevnte er å foretrekke.

1.1.2 Tynning av en punktprosess

Observasjonene $\{(x_i, y_i)\}$ i et koordinatsystem kan bli sett på som en tynnet punktprosess, ettersom ikke alle punkter blir oppdaget. Den originale punktprosess består av alle punkter, uansett om de er oppdaget eller ikke (Skaug, 2006). I en tynnet punktprosess blir det operert med en deteksjonssannsynlighet $g(x)$. Tidligere arbeid på dette var Schweder (1974, 1977), hvor linjetransekt-data først ble sett på som en tynning av en punktprosess. En tynning vil si å fjerne punkter fra en prosess etter et bestemt kriterium, og i samsvar med

linjetransekt er punktene fjernet uavhengig av hverandre med sannsynlighet $1 - g(x)$ (Waagepetersen og Schweder, 2006).

1.1.3 Markovmodulert Poissonprosess

Den enkleste punktprosessen er en Poissonprosess, hvor hendelser opptrer uavhengig av hverandre med samme intensitet (Cox og Isham, 1980, side 3). Et klassisk eksempel er innkomne telefonsamtaler til en sentral. Ved en transektlinje og punkter som er observert i planet, kan de bli projisert ned på linjen for å skape en endimensjonal punktprosess, illustrert i figur 1.1 b). En Poissonprosess er i mange situasjoner ikke passende, fordi observasjoner vil opptre oftere i noen perioder av transektlinjen enn andre. Dette gjelder for eksempel med dyrepopulasjoner, hvor mange dyr har tendens til å gruppere seg, enten på grunn av mat eller fordi de er flokkdyr. Hvis transektlinjen går gjennom et slikt område, er det naturlig å tro at observasjoner vil opptre hyppigere. Hovedprosessen det blir sett på i denne oppgaven er en Markovmodulert Poissonprosess (MMPP) som tar hensyn til dette. Punktene opptrer i henhold til en Poissonprosess med en intensitet λ_i som avhengig av tilstanden den er i, begrenset i denne oppgaven til to tilstander.

1.1.4 Todimensjonal prosess

Relatert til tynning er artikkelen til Högmander (1991), som vurderte en todimensjonal fordeling av individer og deteksjonssannsynligheter. Han så på at hvert individ hadde en deteksjonsradius, og individet ble observert hvis transektlinjen traff innenfor deteksjonssirkelen. Det ble definert en $y(t)$ som antall sirkler/individer berørt av transektlinjen ved tid t og sett på kovariansen $c(s) = \mathbb{E}[y(t_1)y(t_2)]$. Selv om Högmander (1991) begrenset seg til det stasjonære tilfellet, knyttet hans arbeid sammen punktprosessteori og linjetransektestimering (Hedley, 2000).

En todimensjonal modell for bruk på vågehval er utarbeidet av Hagen og Schweder (1994) og Cowling (1998). De har sett på en todimensjonal Neymann-Scott (N-S) Poissonmodell for å modellere klyngetettheten. I denne prosessen er klyngesentrene fordelt i henhold til en Poissonprosess, og antall punkter i en klynge er Poissonfordelt. Posisjonene til punktene er uniformt fordelt rundt sentrene hos Hagen og Schweder (1994). I arbeidet til Cowling (1998) er de normalfordelt, og hun fant forventet antall punkt som blir oppdaget ved en transektlinje med gaussisk deteksjonsfunksjon, og viste at endimensjonal linjetransektdata fra en romlig N-S populasjon er en N-S-prosess på linjen (Schweder, 2003). Waagepetersen og Schweder (2006) så også på en todimensjonal

prosess, kalt shot-noise Coxprosess, som er et eksempel på en N-S-prosess hvor antall punkter i en klynge er negativ binomisk fordelt.

Mens Cowling (1998) og Waagepetersen og Schweder (2006) har sett på todimensjonal N-S med anvendelse på vågehval, har Skaug (2006) sett på MMPP for de projiserte observasjonene, b) i figur 1.1 på side 2. Fordelen ved å bruke en MMPP er at likelihoodfunksjonen er lett tilgjengelig.

1.2 Oppbygging av oppgaven

Målet med denne oppgaven er å se på et linjetransekt som en stokastisk punktprosess som tar hensyn til at punkter kan klynge seg i enkelte perioder. Hovedprosessen som diskuteres, en MMPP med to tilstander, blir beskrevet av fire parametere. Det er intensitetene til Poissonprosessene (λ_i) og bytteintensiteter (μ_i), hvor $i = 1, 2$ (Skaug, 2006). Det blir sett på hvor godt denne prosessen kan beskrive data fra en transektlinje. En MMPP er et tilfelle av en dobbelstokastisk Poissonprosess (også kalt Coxprosess), som igjen er en generalisering av Poissonprosessen (Cox og Isham, 1980, side 10). En type Coxprosess er en som skifter mellom perioder hvor hendelser opptrer som en Poissonprosess og perioder helt uten hendelser, for eksempel driftstans av system hvor det er perioder systemet ikke er i bruk.

I kapittel 2 blir det sett på en transektlinje som en punktprosess. Fokuset er på MMPP med oppbygging fra en Poissonprosess. Det ses på funksjoner og egenskaper til MMPP, blant annet overdispersjonskoeffisienten (grad av klynge), tetthet og uttrykk for likelihooden. Hvordan en MMPP kan skrives som en Markov fornyelsesprosess blir også diskutert.

I tillegg til å estimere parameterne i en MMPP, er det ønskelig å si noe om hvilken tilstand prosessen er i til enhver tid. I kapittel 3 skriver vi MMPP om til en Skjult Markovmodell med diskret tid og estimerer tilstanden til tidssteg k basert på observasjonene. Det er gjort ved å dele transektlinjen inn i korte biter (1 km), hvor hver bit tilsvarer et tidssteg. Det blir også vist gjennom simulering at dette gir gode resultater for estimering av tilstander langs transektlinjen.

Anvendelse på vågehval i Nordøstatlanteren er utført i kapittel 4, hvor området er oppdelt i 18 separate blokker. Parameterne blir estimert basert på observasjonene, og sammenlignet med en inhomogen Poissonprosess. Store deler av kapitlet er basert på beregninger av likelihoodverdier hvor vi sammenligner to forskjellige oppsett. Det ene oppsettet er å bruke tidsvarierende stripebredde i estimeringen av parameterne, det andre er å bruke en konstant (gjennomsnittlig) stripebredde. Våre beregninger viser at sistnevnte gir større likelihood i noen av blokkene, i motsetning til hva som man kunne forvente seg. En varierende

stripebredde vil påvirke intensitetsparameteren, og det er naturlig å tro at denne ekstra informasjonen skulle gi bedre parametertilpasning. Dette tilfellet blir sett nærmere på, om det har en naturlig forklaring eller om det skyldes tilfeldigheter. Påstanden at dette kan skyldes tilfeldigheter ser vi nærmere på i kapittel 5 hvor simuleringer blir utført i programmet *R*. Datasett fra en MMPP, med samme forhold som observasjonene av vågehval, blir generert for å undersøke om en modell med konstant stripebredde kan gi bedre tilpasning av enn en tidsvarierende stripebredde.

2

Punktprosesser

2.1 Stokastiske prosesser

En stokastisk prosess er en samling av tilfeldige variabler $X(t)$, hvor t er en parameter fra et sett T , enten diskret, $T = \{0,1,2,\dots\}$, eller kontinuerlig, $T = [0, \infty)$. Stokastiske prosesser er karakterisert av tilstandsrommet, som er verdiene $X(t)$ kan ta, ved indekssettet T og den avhengige relasjonene mellom de tilfeldige variablene $X(t)$ (Taylor og Karlin, 1998, side 5).

En type stokastisk prosess er Markovprosessen som har en hukommelsestapsegenskap kalt Markovegenskapen. Ved en gitt verdi av $X(t)$ og med $s > t > u$, er ikke verdiene av $X(s)$ påvirket av verdiene av $X(u)$. Det vil si at ved nåværende tilstand er ikke sannsynligheten for en fremtidig hendelse av prosessen endret med kunnskap om dens tidligere oppførelse. Med andre ord, hvis en betinger prosessen på nåværende tilstand, er fremtidige og tidligere hendelser uavhengige.

2.1.1 Markovkjeder

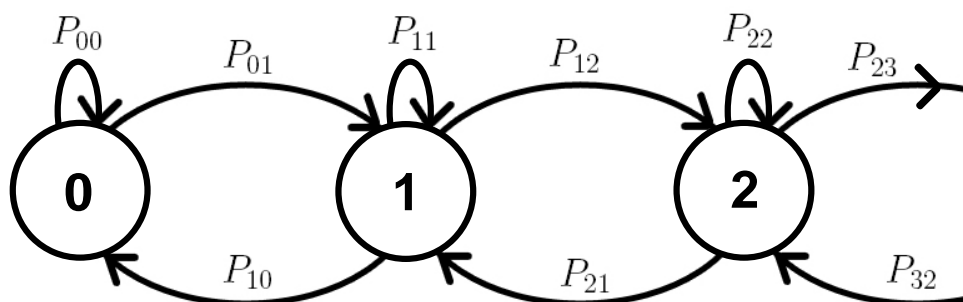
En diskret tids Markovkjede er en Markovprosess med et endelig eller tellbart tilstandsrom, og diskret tid $T = \{0,1,2,\dots\}$.

Markovegenskapen er definert ved

$$P(J_{n+1} = j | J_0 = i_0, \dots, J_{n-1} = i_{n-1}, J_n = i) = P(J_{n+1} = j | J_n = i), \quad (2.1)$$

for alle tidspunkter n og tilstander $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j$ (Taylor og Karlin, 1998, side 95).

Det siste leddet i formel 2.1 kalles ett-steps overgangssannsynlighet. Gitt at prosessen er i tilstand i ved tid n , er den i tilstand $j + 1$ ved $n + 1$. Dette noteres som $P_{ij}^{n, n+1}$. Når ett-steps overgangssannsynlighetene er uavhengige av n , sies det at Markovkjeden har stasjonære overgangssannsynligheter og kalles en homogen Markovkjede. Dette gir at $P_{ij}^{n, n+1} = P_{ij}$, hvor P_{ij} er notasjonen på den betingede sannsynligheten at tilstandsverdien gjør en overgang fra i til j i ett forsøk. Videre betyr betegnelsen $P_{ij}^{(n)}$ at prosessen har gått fra tilstand i til j i akkurat n steg. Verdiene P_{ij} kan settes opp i en matrise \mathbf{P} og kalles overgangssannsynlighetsmatrise. En Markovprosess er fullstendig definert når dens overgangssannsynlighetsmatrise og fordelingen til initialverdien J_0 er definert (Taylor og Karlin, 1998, side 96). En illustrasjon av en Markovkjede og overgangssannsynligheter er gitt i figur 2.1.



Figur 2.1: Markovkjede med de tre første tilstandene og overgangssannsynligheter mellom dem. I dette eksempelet kan prosessen ved neste tid enten forbli i samme tilstand eller gå til en av nabo-tilstandene. Det gir $P_{ij} = 0$ hvis $j > i + 1$ eller $j < i - 1$, med andre ord det er ikke mulig å hoppe to steg.

Hvis overgangssannsynlighetsmatrisen er regulær, det vil si at \mathbf{P}^k har bare positive elementer for en verdi av k og \mathbf{P} har endelig antall av tilstander (0 til N), eksisterer det sannsynligheter P_{ij} slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0 \text{ for } j = 0, 1, \dots, N.$$

Denne grensen er overgangssannsynligheten fra tilstand i til j i n steg når n går mot uendelig. Sannsynligheten for at prosessen vil befinne seg i tilstand j i det lange løp er π_j og er uavhengig av starttilstanden i . Betingelsene sier at det alltid vil være mulig å komme fra tilstand i til j , og at prosessen vil komme til tilstand j ettersom det er et endelig antall tilstander.

Utregning av $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$ er unik løsningen av følgende ligninsett:

$$\pi_j = \sum_{k=0}^N \pi_k P_{kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^N \pi_k = 1.$$

Her er \mathbf{P} en regulær overgangssannsynlighetsmatrisen med tilstander $0, 1, \dots, N$, og Markovkjeden må være homogen. Vektoren $\boldsymbol{\pi}$ som oppfyller formel 2.2 kalles en stasjonær sannsynlighetsfordeling (Taylor og Karlin, 1998, side 204).

2.1.2 Poissonprosesser

En annen type stokastisk prosess er Poissonprosessen, som er en tidskontinuerlig Markovprosess. Denne prosessen teller antall hendelser opp til en tid t , og er definert ved Poissonfordelingen. Hvis X er Poissonfordelt med parameter μ er

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

hvor parameteren μ er forventningen og variansen til X .

En Poissonprosess med rate λ er definert ved følgende punkter av Taylor og Karlin (1998, side 270):

- (1) For tidspunktene $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, er prosessøkningen $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ uavhengige tilfeldige variabler,
- (2) for $s \geq 0$ og $t > 0$ har den tilfeldige variabelen $X(t + s) - X(s)$ en Poissonfordeling: $P(X(t + s) - X(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots,$
- (3) $X(0) = 0$.

Forventningen og variansen til denne prosessen er λt .

På samme måte er en Poisson punktprosess med rate λ definert. Her er $N((s, t])$ antall punkter eller hendelser mellom tidspunktene s og t , med $s < t$ og har en Poissonfordeling med parameter $\lambda(t - s)$,

$$P(N((s, t]) = k) = \frac{[\lambda(t - s)]^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

Videre skilles det mellom flere typer Poissonprosesser etter hvordan verdien λ er definert, blant annet stasjonær/homogen Poissonprosess og ikke-stasjonær/ikke-homogen (inhomogen) Poissonprosess. Den homogene Poissonprosessen har raten λ som er konstant gjennom hele prosessen. Dette gjør antall hendelser i intervallet $(s, s + t]$ følger en Poissonfordeling med parameter λt . Ved den inhomogene Poissonprosessen kan λ -verdien endre seg med tiden, det gir at λ er lik $\lambda(t)$. I tillegg gir det at antall hendelser i intervallet $(s, s + t]$ er Poissonfordelt med parameter lik $\int_s^{s+t} \lambda(u) du$. Hvis raten til en inhomogen Poissonprosess, $\lambda(t)$, selv er en stokastisk prosess, kalles denne prosessen $X(t)$ en dobbel-stokastisk Poissonprosess eller en Cox-prosess (Taylor og Karlin, 1998, side 273).

Følgende er noen resultater vedgående en Poissonprosess med $X(t) = N((0, t])$ (Taylor og Karlin, 1998, side 290). Ved denne prosessen opptrer hendelser i henhold til parameteren λ for positive t -verdier. Betegner Y_n som tidspunktet til hendelse nummer n , med $Y_0 = 0$, og avstanden mellom to hendelser som $S_n = Y_n - Y_{n-1}$. Observasjonspunktet Y_n er gamma fordelt med parametere n og $1/\lambda$. Dette gir sannsynlighetstetthetsfunksjon lik

$$f_{Y_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, n = 1, 2, \dots, t \geq 0. \quad (2.4)$$

Videre er tidspunktet til den første hendelsen eksponentielt fordelt med parameter $1/\lambda$ og sannsynlighetstetthetsfunksjon som

$$f_{Y_1}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0. \quad (2.5)$$

Tidene mellom hendelser $S_n, n = 0, 1, \dots, n - 1$ er uavhengige tilfeldige variabler, hver med eksponentiell fordeling

$$f_{S_n}(s) = \lambda e^{-\lambda s}, s \geq 0. \quad (2.6)$$

Hvis $X(t)$ er en Poissonprosess med rate lik $\lambda > 0$ har vi for enhver $0 < u < t$

$$P(X(u) = k | X(t) = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}, 0 \leq k \leq n,$$

som er sannsynligheten $P(X = k)$ i en binomisk fordeling med parametere n og u/t . Dette gir sannsynligheten for k hendelser før tiden u , gitt at det skal være n hendelser ved en senere tid t .

Med observasjonspunkt $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ som hendelser i en Poissonprosess med rate lik λ , er simultanfordelingen gitt antall punkter lik n ved tiden t ($N(t) = n$) lik

$$f_{Y_1, \dots, Y_n | X(t)=n}(y_1, \dots, y_n) = n!t^{-n},$$

hvor $0 < y_1 < \dots < y_n \leq t$. Betinget på antall hendelser i et intervall, er hvor hendelsene intreffer uniformt fordelt på en bestemt måte.

2.1.3 Fødsels- og dødsprosesser

Fødsels- og dødsprosesser er en generalisering av Poissonprosesser. En Poissonprosess er en Markovprosess for positive heltall, og den er ikke-avtagende. Følgende postulater gjelder (Taylor og Karlin, 1998, side 334):

- (1) $P(X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = k) = \lambda h + o(h)$ når $h \rightarrow 0$ og $k = 0, 1, 2, \dots$
- (2) $P(X(t+h) - X(t) = 0 | X(t) = k) = 1 - \lambda h + o(h)$ når $h \rightarrow 0$ og $k = 0, 1, 2, \dots$
- (3) $X(0) = 0$.

Første punkt sier at sannsynligheten for at en hendelse skjer i et lite intervall med lengde h er tilnærmet λh , mens det eneste alternativet er at ingen hendelser opptrer, punkt (2) med sannsynlighet $1 - \lambda h$. Her er tiden kontinuerlig mens tilstandene i prosessen er diskret.

På samme måte defineres en ren fødselsprosess, hvor sannsynligheten for at en hendelse opptrer ved et gitt tidspunkt kan være avhengig av antall hendelser som har skjedd tidligere, for eksempel ved antall individer i en populasjon uten dødsfall. Den følger de samme postulatene som en Poissonprosess. Derimot kan det være mange forskjellige λ -verdier, ettersom hvor langt ut i prosessen en befinner seg, notert med λ_i . På tilsvarende måte har en også en ren dødsprosess, som er en synkende prosess. En sammenslåing av disse gir en fødsels- og dødsprosess, hvor prosessen kan både øke og synke i forskjellige tilstander. Dette fungerer på samme måte som en Markovkjede, med den begrensningen at den ikke kan gjøre 2 hopp. Med andre ord prosessen kan ikke bytte rett fra tilstand i til tilstand $i+2$ utenom å måtte være innom tilstand $i+1$. Postulatene defineres på samme måte som under en Poissonprosess utenom at den kan gå et hakk ned i prosessen. Ved en avstand h er sannsynligheten for at prosessen går en tilstand opp som $\lambda_i h$ og en tilstand ned $\mu_i h$, mens sannsynligheten for at det oppholdes i samme tilstand er $1 - (\lambda_i + \mu_i)h$, når h går mot 0.

Verdiene λ_i og μ_i kalles infinitesimal fødsels- og dødsrater. Ratene settes opp i en matrise kalt den infinitesimale generator av fødsels- og dødsprosessen

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Når prosessen forlater tilstand i går den til tilstand $i + 1$ med sannsynlighet lik $\lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$ og til tilstand $i - 1$ med sannsynlighet $\mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$. Verdien μ_0 er definert til å være 0.

Et eksempel på en endelig tilstands fødsels- og dødsprosess er kontinuerlig tids Markovkjede med to tilstander 1 og 2. Hvor lenge prosessen oppholder seg i tilstand 1 og 2 er eksponentielt fordelt med parametere som henholdsvis λ_0 og μ_1 . Med bare to tilstander gir det λ_1 lik 0, fordi en ny «fødsel» ikke kan opptre når en oppholder seg i tilstand 2. Prosessen vil oppholde seg i denne tilstanden helt til et «dødsfall» opptrer, som skjer i henhold til μ_1 . Dette gir en infinitesimal generator matrise lik

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 \\ \mu_1 & -\mu_1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Sannsynligheten for å bytte tilstand i løpet av en tid t , $P_{ij}(t) = P(X(t+u) = j | X(u) = i)$ for alle u , er utledet i avsnitt A.1 for to tilstander.

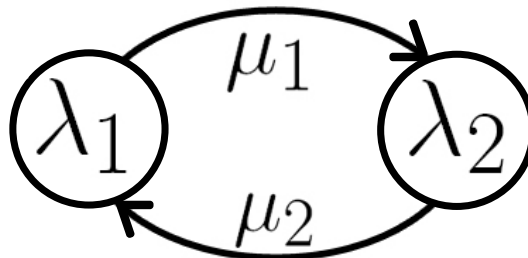
For en generell fødsels- og dødsprosess uten noen absorberende tilstander, det vil si tilstander prosessen kommer til men ikke kan forlate, har en følgende grense som ved en Markovprosess

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j.$$

Denne grensen er uavhengig av starttilstanden i . Ved at π_j er positive og oppfyller ligningssettet formel 2.2 på side 8, hvor N kan være uendelig, har den en stasjonær sannsynlighetsfordeling. Hvis prosessen starter i tilstand i med sannsynlighet π_i , vil den ved en tid t være i tilstand i med samme sannsynlighet π_i . Dette er også sannsynligheten for at prosessen befinner seg i tilstand i i det lange løp (Taylor og Karlin, 1998, side 366).

2.2 Markovmodulert Poissonprosess (MMPP)

MMPP er en generalisering av en Poissonprosess. En Poissonprosess har uavhengige hendelser med en rate λ , men i mange situasjoner kan hendelsene opptre oftere i noen perioder enn andre. Et eksempel er observasjoner av dyrepopulasjoner som ofte opptrer i flokk. Hvis prosessen befinner seg inne i en flokk, vil det være forventet å se mange flere observasjoner nærmere hverandre enn hvis prosessen er utenfor en flokk. Et annet eksempel er observasjoner av vulkanutbrudd, hvor en vulkan har perioder med forskjellige aktivitetsnivå. Her følger hyppigheten av utbrudd hvilket aktivitetsnivå eller tilstand vulkanen har (Bebbington, 2007). Tanken i MMPP er å ta hensyn til dette ved at det er en rate, λ_i , for hver tilstand prosessen oppholder seg i. Ved å la $X(t)$ være en ikke-homogen Poissonprosess, beskrevet i avsnitt 2.1.2, hvor raten $\lambda(t)$ selv er en stokastisk prosess, kalles denne en dobbel-stokastisk Poissonprosess. En MMPP oppnås ved å la $\lambda(t)$ være en endelig tilstands Markovprosess (Skaug, 2006). Vi betrakter her en MMPP med to tilstander og tilhørende rater, λ_1 og λ_2 , tilsvarende som et lavt og høyt nivå hvor $\lambda_1 < \lambda_2$. Hvilket nivå som det oppholdes i bestemmes av en Markovprosess med bytteintensiteter μ_1 og μ_2 , hvor μ_1 markerer overgangen mellom et lavt og høyt nivå, mens μ_2 markerer en overgang fra høyt til lavt, illustrert i figur 2.2. Infinitesimal generator matrisen er lik formel 2.8 på forrige side, med notasjonen $\lambda_0 = \mu_1$ og $\mu_1 = \mu_2$. Dette er likt oppbygningen i eksempelet under fødsels- og dødsprosesser (avsnitt 2.1.3), hvor det var en endelig tilstands fødsels- og dødsprosess med to tilstander.



Figur 2.2: En Markovmodulert Poissonprosess med tilstandene λ_1 og λ_2 og bytteintensitetene μ_1 og μ_2 mellom tilstandene.

En MMPP beskrives av parameterne $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. Om prosessen starter i lavt eller høyt område bestemmes av initialfordelingen $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2]$.

Her er π_i sannsynligheten for at prosessen startes i tilstand λ_i , det vil si $\pi_i = P(\lambda(0) = \lambda_i)$, hvor $\lambda(t)$ er markovprosessen i MMPPen. Vektoren $\boldsymbol{\pi}$ er en stasjonær sannsynlighetsfordeling ved at den oppfyller formel 2.2 på side 8.

Etter hvor prosessen startes, er det to måter $\boldsymbol{\pi}$ defineres. Hvis prosessen startes på et tilfeldig punkt langs linjen, er den definert ved

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2] = \left[\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right]. \quad (2.9)$$

Startes ved en observasjon betegnes den ved $\boldsymbol{\pi}^*$ og er gitt som

$$\boldsymbol{\pi}^* = [\pi_1^*, \pi_2^*] = \left[\frac{\lambda_1 \pi_1}{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2}, \frac{\lambda_2 \pi_2}{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2} \right] \quad (2.10)$$

hvor π_1 og π_2 er gitt ved formel 2.9.

I avsnitt A.1 er det utledet stasjonære overgangssannsynligheter til $X(t)$, $P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$, og gir for to tilstander på matriseform

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_2 + \mu_1 e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1 (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})}{\mu_2 + \mu_1} \\ \frac{\mu_2 (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1 + \mu_2 e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{\mu_2 + \mu_1} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Ved å ta grensen når t går mot uendelig,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_2 + \mu_1 e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1 (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})}{\mu_2 + \mu_1} \\ \frac{\mu_2 (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1 + \mu_2 e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{\mu_2 + \mu_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \\ \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \end{bmatrix},$$

fåes stasjonærfordelingen (formel 2.9).

Hvis initialfordelingen er gitt som formel 2.9, er forventning og varians kjent under en MMPP. De er gitt som (Skaug, 2006)

$$\mathbb{E}(n) = L \frac{\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (2.12)$$

$$\text{Var}(n) = \mathbb{E}(n) + 2\mu_1 \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)L} + L(\mu_1 + \mu_2) - 1}{(\mu_1 + \mu_2)^4}, \quad (2.13)$$

hvor n er antall observasjoner på linjen $[0, L]$.

Ved disse verdiene kan en få et estimat av overdispersjonskoeffisienten, som er definert ved $\tau = \text{Var}(n)/\mathbb{E}(n)$. Denne sier i hvilken grad punktene er klynget sammen utenfor det som er ventet ved en Poissonprosess. Ved en Poissonfordelingen er forventning og varians like, og τ er lik 1. Overdispersjonskoeffisienten lik 1 fås også ved å la lengden L gå mot null. Dette sier at ved å bryte ned til mange korte transektlinjer, vil τ gå mot den til en Poissonfordeling (Skaug, 2006). Overgangen til en Poissonprosess oppnås også ved noen andre tilfeller. Hvis λ_1 er lik λ_2 , faller siste ledd vekk i variansen og τ blir lik 1. Det er rimelig, ettersom det er en konstant lik rate gjennom hele transektlinjen. På samme måte oppstår det en Poissonprosess ved at enten μ_1 eller μ_2 går mot null eller uendelig, slik at prosessen oppholder seg kun i et av nivåene.

2.3 Transektlinje som en stokastisk punktprosess

En Markovmodulert Poissonprosess (MMPP) brukes til å modellere punkter ved en transektlinje (Skaug, 2006). Ved en transektlinje hvor tilhørende observasjoner ligger rundt linjen med forskjellige avstander, kan en projisere observasjonene ned på linjen og få en endimensjonal punktprosess. Figur 1.1 på side 2 viser en transektlinje med observasjoner og en projisering vinkelrett ned på linjen. Punktene langs linjen blir gitt som y_i , $i = 1, \dots, n$, hvor n er totalt antall observasjoner. Dette kan ses på som et koordinatsystem med to dimensjoner hvor punktet (y_i, x_i) gir observasjoner nummer i i koordinatsystemet. Punktet y_i er hvor på transektlinjen observasjonen befinner seg, og x_i den vinkelrette avstanden fra transektlinjen.

Sannsynligheten for å oppdage en observasjon ved en vinkelrett avstand x fra transektlinjen kalles deteksjonsfunksjonen og er gitt ved $g(x)$ (Skaug *et al.*, 2004), som er $g(x) = P(\text{Oppdage observasjonen} | \text{avstand } x)$. Et estimat av denne funksjonen brukes til å estimere den effektive halvstripebredden

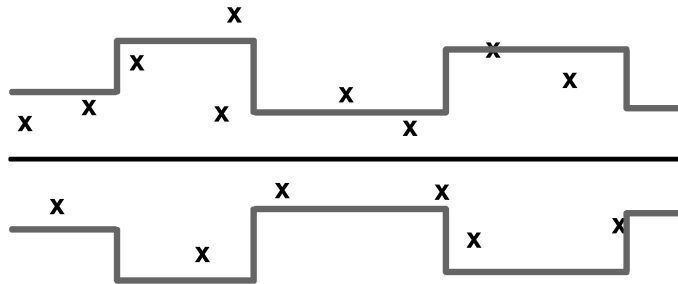
$$w = \int_0^{\infty} g(x) dx. \quad (2.14)$$

Hvis en lar den effektive halvstripebredden ved punkt y være $w(y)$, og den totale lengden på transektlinjen L , vil den gjennomsnittelige halvstripebredden på transektlinjen være

$$\bar{w} = \frac{1}{L} \int_0^L w(y) dy. \quad (2.15)$$

På samme måte kan en beregne en gjennomsnittelig halvstripebredde på mindre deler av transektlinjen, for eksempel mellom to observasjoner. En illustrasjon av en transektlinje med varierende halvstripebredder er gitt i figur 2.3, med

observasjoner (x) og halvstripebredden (w) tegnet som en grå linje. Estimater av halvstripebredden (formel 2.14) er basert sannsynligheten for å oppdage en observasjon ved en avstand x som gjør at estimert halvstripebredde kan bli mindre enn avstanden til observerte punkter, eller større enn noen punkter som ikke er observert. En effektiv halvstripebredde er avstanden fra linjen hvor like mange punkter er oppdaget utenfor linjen som ikke blir observert på innsiden (Buckland *et al.*, 2001, side 3). Grensen uendelig i formel 2.14 indikerer at alle observasjoner er notert og brukt i estimeringene. En kan også bruke mindre søkeområde, hvor observasjoner sett utenfor blir ignorert, da integreres det opp til dette område i beregningen av den effektive stripebredden.



Figur 2.3: En transektlinje med observasjoner (x) rundt og en varierende halvstripebredde (w), definert ved formel 2.14 på forrige side, tegnet som en grå linje symmetrisk rundt transektlinjen.

Stripebredden kommer inn i beregningene av observasjonsratene, der λ_i er definert ved

$$\lambda_i = 2w\rho, \quad (2.16)$$

hvor ρ er gjennomsnittelig dyretetthet og 2-tallet kommer av at halvstripebredden er symmetrisk rundt transektlinjen. Dette sier at raten i det område en befinner seg i, bygger på dyretettheten og arealet dekket gjennom stripebredden til transektlinjen.

Den gjennomsnittelige dyretettheten under MMPP er gitt ved (Skaug, 2006)

$$\rho_{mmpp} = \frac{\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2}{2w(\mu_1 + \mu_2)}, \quad (2.17)$$

og samlet dyretetthet er

$$D = \frac{\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} = 2w\rho_{mmpp}.$$

Totalt areal A dekket under prosessen, med beregnet w , er $2wL$, og forventningen (formel 2.12) kan skrives som et produkt av areal og gjennomsnittelig

dyretetthet.

$$\mathbb{E}(n) = A * \rho_{MMPP} = 2wL * \left(\frac{\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2}{2w(\mu_1 + \mu_2)} \right) = L * \left(\frac{\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \right).$$

Ved transektlinjen og n observasjoner i intervallet $[0, L]$ på punktene y_1, \dots, y_n , kan en definere venteavstanden mellom to observasjoner som $s_i = y_i - y_{i-1} > 0, i = 2, \dots, n$. Venteavstand til første observasjon defineres som $s_1 = y_1$. Da er den simultane tetthetsfunksjonen til de k første venteavstander gitt ved

$$f(s_1, \dots, s_k) = \boldsymbol{\pi} \exp[\mathbf{C}s_1]\Lambda \exp[\mathbf{C}s_2]\Lambda \cdots \exp[\mathbf{C}s_k]\Lambda \mathbf{e}, \quad (2.18)$$

hvor $\mathbf{e}' = (1, 1)$ og $\boldsymbol{\pi}$ er stasjonærfordelingen gitt ved formel 2.9 på side 13. Her er matriseeksponentialen definert ved

$$\exp[\mathbf{C}s] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{C}^i s^i}{i!}, \quad (2.19)$$

hvor \mathbf{C}^0 er identitetsmatrisen. Videre er matrisen \mathbf{C} lik differensen $\mathbf{Q} - \Lambda$, med

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

hvor \mathbf{Q} er den infinitesimale matrisegeneratoren til Markovprosessen $\lambda(t)$.

På samme måte defineres overlevelsesfunksjonen (Skaug, 2006)

$$V(s) = 1 - F(s) = 1 - \int_0^s f(t)dt = \int_s^{\infty} f(t)dt = \boldsymbol{\pi} \exp[\mathbf{C}s]\mathbf{e}, \quad (2.20)$$

hvor $F(s)$ er den kumulative fordelingsfunksjonen.

En av fordelene med MMPP er at likelihoodfunksjonen har et eksplisitt uttrykk (Skaug, 2006). Ved $\exp[\mathbf{C}s]$ definert på samme måte som under den simultane tetthetsfunksjonen (formel 2.18), og n observasjoner i intervallet $[0, L]$ på stedene y_1, \dots, y_n på transektlinjen. La parameterne i en MMPP være gitt som $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$, da er likelihoodfunksjonen gitt ved

$$\text{Lik}(\theta) = \boldsymbol{\pi} \exp[\mathbf{C}s_1]\Lambda \cdots \exp[\mathbf{C}s_n]\Lambda \exp[\mathbf{C}(L - y_n)]\mathbf{e}, \quad n \geq 1. \quad (2.21)$$

Matriseeksponentialen gitt i formel 2.19 på forrige side kan skrives på en eksplisitt form (Skaug, 2006)

$$\exp[Cy] = \exp[(Q - \Lambda)y] = U^{-1} \left[e^{-\theta_2 y} \begin{bmatrix} S_2 - \theta_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & S_1 - \theta_2 \end{bmatrix} - e^{-\theta_1 y} \begin{bmatrix} S_2 - \theta_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & S_1 - \theta_1 \end{bmatrix} \right]. \quad (2.22)$$

Her er

$$\begin{aligned} S_i &= \lambda_i + \mu_i, i = 1, 2, \\ K &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2, \\ U &= \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4K}, \\ \theta_1 &= (S_1 + S_2 + U)/2, \\ \theta_2 &= (S_1 + S_2 - U)/2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Denne skrivemåten er utledet i avsnitt A.5.

2.4 Fornyelsesprosesser

Poissonprosessen, sett på i avsnitt 2.1.2, er en prosess hvor ventetiden mellom påfølgende hendelser er eksponensielt fordelt. En generalisering av denne kalles fornyelsesprosess. En fornyelsesprosess er en prosess som registrerer hendelser i et tidsintervall, hvor tidene mellom hendelser er positive, uavhengige og identisk fordelte tilfeldige variabler (Taylor og Karlin, 1998, side 419). Avstanden mellom hendelse $k - 1$ og k er betegnet som S_k , og tidspunktet til hendelse nummer k , Y_k , vil være summen av foregående S -verdier, $S_1 + S_2 + \dots + S_k$.

2.5 Markov fornyelsesprosesser

En Markov fornyelsesprosess er en generalisering av en fornyelsesprosess, hvor det ved enhver tid er tilknyttet en tilstand til prosessen. En fornyelsesprosess oppnås hvis det kun er en tilstand. Tilstandsvariabelen, J , kan bytte tilstand langs den kontinuerlige tiden og tar verdier fra et diskret tilstandsrom. Markov fornyelsesprosessen blir beskrevet av to variabler, tilstandene og avstandene mellom hendelser eller observasjoner S . Variabelen J kan ikke observeres, mens S -verdiene er observerbare. Prosessen (J, S) , noteres ved hendelser som (J_n, S_n) ,

utgjør en Markov fornyelsesprosess (Fischer og Meier-Hellstern, 1993). Her er

$$\begin{aligned} J_k &: \text{Tilstand ved observasjon } k, \\ Y_k &: \text{Observasjon nummer } k, \\ S_k &: \text{Avstand mellom observasjon } Y_k \text{ og } Y_{k-1}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

Prosesen må oppfylle kravet at

$$\begin{aligned} P(J_{n+1} = j, S_{n+1} \leq x | J_0, \dots, J_n; S_0, \dots, S_n) \\ = P(J_{n+1} = j, S_{n+1} \leq x | J_n). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Dette betyr at sannsynligheten for at variabelen J er i tilstand j ved tid $n+1$ og at avstanden til neste observasjon, S_{n+1} , gitt tidligere tilstander og venteavstander bare er avhengig av nåværende tilstand. Det er også antatt at prosessen er tidshomogen, som gir at

$$F_{ij}^{(n)}(x) = F_{ij}(x) := P(J_{n+1} = j, S_{n+1} \leq x | J_n = i), \tag{2.26}$$

er elementer i en overgangssannsynlighetsmatrise $F(x)$ til Markov fornyelsesprosessen. Dette er sannsynligheten for en overgang mellom tilstand i til j ved to påfølgende hendelser og at avstanden mellom dem skal være mindre enn eller lik x .

Ved en kontinuerlig tids Markovkjede med diskrete tilstander vil sekvensen av tilstander som prosessen har besøkt utgjøre en diskret tids Markovkjede kalt embedded Markovkjede (Taylor og Karlin, 1998, side 396). Tilstandssekvensen ved hendelsene i en Markov fornyelsesprosess, $\{J_k\}$, vil utgjøre en embedded diskret tids Markovkjede med overgangssannsynlighetsmatrise $F(\infty)$ (Ryden, 1994).

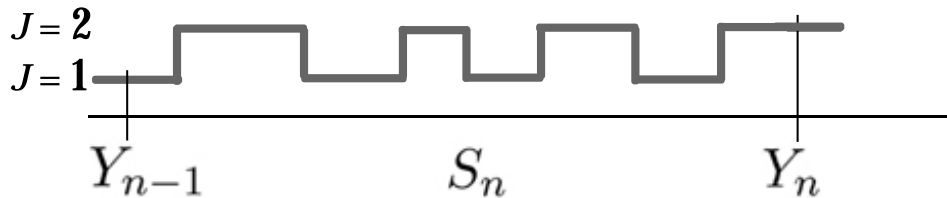
Fornyelsesprosesser og Markovkjeder er spesialtilfeller av en Markov fornyelsesprosess. En fornyelsesprosess oppstår hvis verdiene til tilstandsrommet som J kan ta, bare består av ett punkt, med andre ord bare en tilstand. En diskret tids Markovkjede oppstår hvis S_n tar verdien 1 for alle n . Er S_n eksponentielt fordelt med en rate avhengig av J_n , er det en kontinuerlig Markovkjede. For eksempel ved fødsels- og dødsprosesser (avsnitt 2.1.3), hvor raten til eksponentiellfordelingen bare er avhengig av hvilken tilstand prosessen befinner seg i. Hvis det bare er en tilstand og ventetidene er eksponentielt fordelt vil det gi en Poissonprosess.

2.6 MMPP som en Markov fornyelsesprosess

En MMPP er en Markov fornyelsesprosess, og bare en ren fornyelsesprosess i et spesielt tilfelle (Fischer og Meier-Hellstern, 1993). Dette spesialtilfellet er hvis $\lambda_1 > 0$, og $\lambda_2 = 0$, og under λ_1 er tidene mellom hendelsene eksponentielt fordelt. I denne prosessen vil hendelser bare opptre i den ene tilstanden, mens det ikke er mulig for hendelser i den andre tilstanden. Det blir som en av/på-Poissonprosess, hvor punkter opptrer som en Poissonprosess i tilstand 1, og ikke i tilstand 2. Dette kalles også en $(0, \lambda)$ Cox prosess (Taylor og Karlin, 1998, side 273).

Marginalfordelingen til venteavstanden S_{n+1} vil være avhengig av både tilstanden til prosessen ved tid n og tid $n + 1$. Med $J_n = i$ og $J_{n+1} = j$ vil ikke tiden S_{n+1} mellom dem være eksponentielt fordelt. Mellom hendelsene vil prosessen først ha en overgang fra i til j ved flere steg, og deretter vil prosessen gå videre med et antall returnerende opphold i tilstand j uten at noen hendelser opptrer, før det tilslutt opptrer en hendelse i tilstand j . Overgangen fra tilstand i til j mellom to hendelser vil da være avhengig av både tilstand i ved tid n og tilstand j ved tid $n + 1$. Dette er slik en MMPP også oppfører seg, følgelig er en MMPP er en Markov fornyelsesprosess (Fischer og Meier-Hellstern, 1993).

MMPP'en som er diskutert tidligere i avsnitt 2.2, var begrenset to tilstander. Det samme gjelder for denne som en fornyelsesprosess. Hvor lenge prosessen oppholder seg i en tilstand vil være eksponentielt fordelt, og det kan være et antall overganger av tilstander mellom to påfølgende observasjoner, illustrert i figur 2.4. Dette gjør at fordelingen mellom to hendelser blir mer komplisert.



Figur 2.4: En MMPP som en Markov fornyelsesprosess. To hendelser Y_{n-1} og Y_n som er observerbare, hvor de henholdsvis tilhører tilstand 1 og 2. Tilstandene er ikke observerbare. Mellom observasjonene kan den underliggende prosessen bytte tilstand flere ganger, før en ny observasjon inntreffer i tilstand to. Sannsynligheten for en overgang fra tilstand 1 til 2 ved to påfølgende hendelser og at avstanden mellom dem, S_k , skal være mindre eller lik x , vil være variabelen $F_{12}(x)$ i formel 2.26.

Prosessens og fordelingen vil fremdeles styres av parameterne som betegner

MMPP'en; $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ og μ_2 . Som nevnt tidligere er overgangssannsynlighetene mellom tilstand i og j , og at avstanden mellom to observasjoner skal være mindre eller lik x gitt i matrisen $F(x) = \{F_{ij}(x)\}$ med elementer definert i formel 2.26 på side 18. Matrisen er definert som (Fischer og Meier-Hellstern, 1993):

$$F(x) = \int_0^x \exp[(Q - \Lambda)u] du \Lambda, \quad (2.27)$$

hvor $\exp[(Q - \Lambda)u]$ er en matriseeksponential definert som $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Q - \Lambda)^i u^i}{i!}$.

Løsningen av dette integralet gir

$$F(x) = C^{-1}(\exp[Cx] - I)\Lambda, \quad (2.28)$$

dette er vist i avsnitt A.2, her er $C = Q - \Lambda$ og I er identitetsmatrisen.

Overgangssannsynlighetsmatrisen $F(\infty)$ for den diskret tids Markovkjeden embedded ved hendelser vil for en to-tilstands MMPP bli lik

$$\begin{aligned} F(\infty) &= \int_0^{\infty} \exp[(Q - \Lambda)u] du \Lambda \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \exp[(Q - \Lambda)u] du \Lambda \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (Q - \Lambda)^{-1} [\exp\{(Q - \Lambda)u\}]_0^R \Lambda \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (Q - \Lambda)^{-1} [\exp\{(Q - \Lambda)R\} - I] \Lambda \\ &= (Q - \Lambda)^{-1} (-I) \Lambda \\ &= (\Lambda - Q)^{-1} \Lambda. \end{aligned}$$

Her er det brukt at $\exp[0] = I$, og at grensen $\lim_{R \rightarrow \infty} \exp\{(Q - \Lambda)R\} = 0$. Det kan sees ved å se på den eksplisitte skrivemåten for matriseeksponentialen (formel 2.22). Uttrykket for overgangssannsynlighetene blir da

$$\begin{aligned} F(\infty) = (\Lambda - Q)^{-1} \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & -\mu_1 \\ -\mu_2 & \lambda_2 + \mu_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{K} \begin{bmatrix} \lambda_2 + \mu_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & \lambda_1 + \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{K} \begin{bmatrix} \lambda_1(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_1 \lambda_2 \\ \mu_2 \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_1 + \mu_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

hvor $K = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2$.

Utledning av matrisen $F(x)$, definert i formel 2.27 på forrige side, gjøres her for en MMPP med to tilstander. Dette gjøres ved å bestemme $(d/dx)F(x)$ ved Chapman-Kolmogorov ligninger og løse disse. Utledningen gjøres i to hovedsteg.

Først defineres det en variabel $H_{ij}(t)$ som er sannsynligheten for å gå fra tilstand i og tilstand j i en MMPP i tidsrommet $(0, t]$, samt at det ikke opptrer noen hendelser i den perioden. Ved Chapman-Kolmogorov ligningene defineres de deriverte av disse ligningene, $H'_{ij}(t)$, hvor de kan settes opp på matriseform og danne differensialligningen $H'(t) = H(t)C$. Utledning av denne ligningen er gjort i avsnitt A.3.

Neste steg er å løse ligningen og vise at løsningen gir matrisen $F(x)$. For å løse ligningen brukes det metoder for system av første ordens lineære ligninger og suksessive approksimasjoner (Boyce og R.C., 2005, hhv. side 111 og 390). Vi viser at løsningen for et system av typen $\mathbf{x}' = C\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, har en løsning på formen $\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0$, hvor C er en konstantmatrise. Matrisen $\Phi(t)$ kalles en fundamentalmatrise, som består av vektorene $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ og $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ fra løsningen av systemet. Den generelle løsningen av et n -dimensjonalt system av denne typen er på formen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, som kan skrives på formen $\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{c}$, med startkravet $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. For den aktuelle ligningen er $t_0 = 0$, og $\mathbf{x}^{(j)}(0) = \mathbf{e}^{(j)}$, som er enhetsvektoren. Dette gir at $\mathbf{x}^0 = I$. Fundamentalmatrisen $\Phi(t)$ har også initialkrav $\Phi(0) = I$. Det søkes etter matrisen $\mathbf{x} = \Phi(t)$ som løsningen på ligningssettet ved suksessive approksimasjoner. Denne fundamentalmatrisen vil tilfredsstillende ligningen

$$\Phi(t) = \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t C\Phi(s)ds.$$

Den kommer fra å uttrykke ligningen som $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$. Ved å anta en løsning $\mathbf{x} = \Phi(t)$, som tilfredsstiller initialverdiproblemet, vil $f[t, \Phi(t)]$ være en kontinuerlig funksjon bare av t . Dette gjør at $\Phi(t)$ kan oppnåes ved å integrere $\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x})$ fra startpunktet 0 til en verdi t som gir (Boyce og R.C., 2005, side 110)

$$\Phi(t) = \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t f[s, \Phi(s)]ds.$$

Utførelsen er gitt i avsnitt A.4, og gir $H(t) = \exp[(Q - \Lambda)t]$ som løsning på differensialligningen. Da blir overgangssannsynlighetsmatrisen $F(x)$ lik

$$F(x) = \int_0^x H(u)\Lambda du = \int_0^x \exp[(Q - \Lambda)u]\Lambda du.$$

Multiplikasjonen med Λ kommer av at en hendelse skal opptre i slutten av intervallet S_{n+1} , og $H(t)$ er definert til å ikke inneholde noen hendelser.

Sjekker tilslutt at løsningen tilfredsstillter ligningen ved å derivere $H(t) = \exp(Ct)$, vist i avsnitt A.2, som gir $H'(t) = C \exp(Ct)$. I utledningen kan C matrisen også trekkes ut på høyre side. Siden t^i og i fakultet er konstanter gir deriveringen også $H'(t) = \exp(Ct)C$. Dette gir at $\exp(Ct)$ vil oppfylle den opprinnelige differensialligningen.

3

Estimering av tilstander

I forrige kapittel betraktet vi en MMPP som en Markov fornyelsesprosess (J_k, S_k) (formel 2.24 på side 18) med overgangssannsynlighetsmatrise $F(x)$ (formel 2.27 på side 20).

Ettersom tilstandene ikke er observerbare, er det ønskelig å estimere tilstanden ved en tid t basert på observasjonene $Y^{(n)} = Y_1, \dots, Y_n$,

$$P(J(t) = i | Y^{(n)}).$$

Tilstandene kan estimeres med en forward-backwardalgoritme, som er definert for en diskret skjult Markovmodell (SMM) (Rabiner og Juang, 1986; Bebbington, 2007). En SMM er en dobbel-stokastisk prosess hvor den underliggende prosessen som styrer tilstandene er skjult og ikke kan observeres, men observasjonene vil være avhengige av de skjulte tilstandene. Sekvensen av observasjoner vil da gi noe informasjon om sekvensen av tilstander som er besøkt. Målet med algoritmen er å beregne sannsynligheter for tilstandene ved hvert tidssteg basert på observasjonene og bakgrunnsmodellen SMM.

Det er tre parametere som definerer en diskret SMM:

δ : initialfordelingen,

A : overgangssannsynlighetsmatrisen,

f : tetthetene til observasjonene, som er betinget på tilstandene J .

Hvert tidssteg k vil inneholde en observasjon Y_k og en mulighet til å bytte tilstand ved overgangssannsynlighetsmatrisen $A = \{a_{ij}\}$. Fordelingen til observasjonen $f_i(Y_k)$ kan være diskret eller kontinuerlig. Det er antatt at $Y_k|J_k$, observasjonen gitt tilstanden ved tid k , er uavhengig av de andre observasjonene og tilhørende tilstander, henholdsvis $Y_1, \dots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \dots, Y_n$ og $J_1, \dots, J_{k-1}, J_{k+1}, \dots, J_n$ (Bebbington, 2007).

En SMM noteres med

$$\Theta = (A = \{a_{ij}\}, f = \{f_i, i = 1, \dots, N\}, \delta), \quad (3.1)$$

hvor

$$\begin{aligned} a_{ij} &= P(J_{k+1} = j | J_k = i), \\ f_i(Y_k) &= f(Y_k | J_k = i), \\ \delta_i &= P(J_1 = i), \end{aligned}$$

med $i = 1, \dots, N$ mulige tilstander.

3.1 Forward-backwardalgoritme for en skjult Markovmodell (SMM)

Forward-backwardalgoritmen er basert på en diskret SMM Θ (formel 3.1) og består av to deler; forward- og backwarddelen ved en tid k . Forwarddelen beregner sannsynligheten for at prosessen er i tilstand i basert på de foregående observasjonene, mens backwarddelen beregner sannsynligheten for tilstand i basert på de senere observasjonene. De to delene kombineres for å få sannsynligheten for en tilstand basert på alle observasjonene og modellen, $P(J_k = i | Y_1, \dots, Y_n, \Theta)$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, N$.

Forwarddelen av algoritmen betegnes med α . Den er definert som simultansannsynligheten $\alpha_k(i) = P(Y_1, \dots, Y_k, J_k = i | \Theta)$, for at prosessen skal være i tilstand i ved tid k og alle de foregående observasjonene gitt SMM-modellen. Denne kan løses iterativt fra første observasjon til ønsket tidssteg, ved følgende rekursive formel

$$\begin{aligned} \alpha_1(i) &= \delta_i f_i(Y_1), \\ \alpha_{k+1}(i) &= \left(\sum_{j=1}^N \alpha_k(j) a_{ji} \right) f_i(Y_{k+1}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

for $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n - 1$ (Rabiner og Juang, 1986). Dette fortsetter til det er beregnet en verdi for alle observasjonene fra første til ønsket punkt.

Avslutningssteget gir $P(Y^{(n)}|\Theta) = \sum_{i=1}^S \alpha_n(i)$, hvor $Y^{(n)}$ er en vektor av alle observasjonene. Utledningen av den rekursive formelen er som følger:

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1}(i) &= P(Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1}, J_{k+1} = i) \\
&= \sum_{j=1}^2 P(Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1}, J_k = j, J_{k+1} = i) \\
&= \sum_{j=1}^2 P(Y_1, \dots, Y_k, J_k = j) P(Y_{k+1}, J_{k+1} = i | Y_1, \dots, Y_k, J_k = j) \\
&= \sum_{j=1}^2 \alpha_k(j) P(Y_{k+1}, J_{k+1} = i | J_k = j) \\
&= \sum_{j=1}^2 \alpha_k(j) a_{ji} f_i(Y_{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Utvidelsen i andre linje er en sum over alle mulige tidligere tilstander som utgjør sannsynligheten for tid $k + 1$, overgangen til tredje linje følger av relasjonen $P(A, B) = P(B) * P(A|B)$.

Backwarddelen er definert, for tid k og tilstand i , som $\beta_k(i) = P(Y_{k+1}, \dots, Y_n, J_k = i | \Theta)$, med $i = 1, \dots, N, k = n, n - 1, \dots, 1$. Denne starter på siste observasjon og går bakover. Dette er sannsynligheten for de resterende observasjonene etter tid k og tilstand er lik i , gitt modellen Θ . Startpunktet er $\beta_n(i) = 1$ for alle i . De rekursive stegene videre er

$$\beta_k(i) = \sum_{j=1}^S a_{ij} f_j(Y_{k+1}) \beta_{k+1}(j), \tag{3.4}$$

for $i = 1, \dots, N, k = n - 1, \dots, 1$, og utledningen er

$$\begin{aligned}
\beta_k(i) &= P(Y_{k+1}, \dots, Y_n, J_k = i) \\
&= \sum_{j=1}^2 P(Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_n, J_k = i, J_{k+1} = j) \\
&= \sum_{j=1}^2 P(Y_{k+2}, \dots, Y_n, J_{k+1} = j) P(Y_{k+1}, J_k = i | Y_{k+2}, \dots, Y_n, J_{k+1} = j) \\
&= \sum_{j=1}^2 \beta_{k+1}(j) P(Y_{k+1}, J_k = i | J_{k+1} = j) \\
&= \sum_{j=1}^2 \beta_{k+1}(j) a_{ij} f_j(Y_{k+1}).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

For å kombinere både forward- og backwarddelen, slik at sannsynligheten for en tilstand i ved en tid k kan baseres på både de foregående og de senere observasjoner, er det definert:

$$\begin{aligned}
\xi_k(i, j) &= P(J_k = i, J_{k+1} = j | Y^{(n)}, \Theta) \\
&= \frac{\alpha_k(i) a_{ij} f_j(Y_{k+1}) \beta_{k+1}(j)}{P(Y^{(n)} | \Theta)} \\
&= \frac{\alpha_k(i) a_{ij} f_j(Y_{k+1}) \beta_{k+1}(j)}{\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S \alpha_k(i) a_{ij} f_j(Y_{k+1}) \beta_{k+1}(j)},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

for $k = 1, \dots, n - 1$.

Utleddning av $\xi_k(i, j)$ følger.

$$\begin{aligned}
\xi_k(i, j) &= P(J_k = i, J_{k+1} = j | Y^{(n)}) \\
&= \frac{P(J_k = i, J_{k+1} = j, Y^{(n)})}{P(Y^{(n)})}.
\end{aligned}$$

Utvider telleren.

$$\begin{aligned}
& P(J_k = i, J_{k+1} = j, Y^{(n)}) \\
&= P(Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1}, Y_{k+2}, \dots, Y_n, J_k = i, J_{k+1} = j) \\
&= P(Y_1, \dots, Y_k, Y_{k+1}, J_k = i | J_{k+1} = j, Y_{k+2}, \dots, Y_n) P(J_{k+1} = j, Y_{k+2}, \dots, Y_n) \\
&= P(Y_1, \dots, Y_k, J_k = i | J_{k+1} = j, Y_{k+2}, \dots, Y_n) P(Y_{k+1} | J_{k+1} = j, Y_{k+2}, \dots, Y_n) \\
&\quad \times P(J_{k+1} = j, Y_{k+2}, \dots, Y_n) \\
&= P(Y_1, \dots, Y_k, J_k = i | J_{k+1} = j) P(Y_{k+1} | J_{k+1} = j) P(J_{k+1} = j, Y_{k+2}, \dots, Y_n) \\
&= \alpha_k(i) a_{ij} f_j(Y_{k+1}) \beta_{k+1}(j).
\end{aligned}$$

Det andre steget kommer av $P(A, B) = P(A|B)P(B)$, hvor i $P(A|B)$ -delen er Y_{k+1} uavhengig av de andre verdiene og den er trukket ut i steg tre. Videre er de to første sannsynlighetene ikke avhengig av de observasjonene den er betinget på, og siste ledd er av definisjonene.

Nevneren følger av at

$$\begin{aligned}
P(Y^{(n)}) &= \sum_{j=1}^2 P(J_{k+1} = j, Y^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(J_k = i, J_{k+1} = j, Y^{(n)}),
\end{aligned}$$

hvor denne sannsynligheten er utledet over.

Tilslutt beregnes sannsynligheten for å være i tilstand i ved tid k gitt observasjonene. Det vil være sannsynligheten $P(J_k = i | Y^{(n)})$ og er lik $\sum_{j=1}^2 P(J_k = i, J_{k+1} = j | Y^{(n)})$, dette gir

$$\gamma_k(i) = \sum_{j=1}^2 \xi_k(i, j). \tag{3.7}$$

Ettersom ξ_k gjelder for $k = 1, \dots, n-1$, gir det ikke et estimat av det siste punktet γ_n , siden backwarddelen bruker neste observasjon i estimeringen. For allikevel å få et estimat av tilstandene i punkt n har vi satt denne sannsynligheten til å være lik det den er i forwarddelen.

3.2 Simuleringer med diskret SMM og normalfordelte observasjoner

For å teste forward-backwardalgoritmen er det generert en diskret SMM og algoritmen er implementert. Modellen er begrenset til to tilstander og 100 tidssteg. Overgangssannsynlighetsmatrisen er satt til

$$A = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Ved hvert tidssteg k er trukket en observasjon Y_k , etter hvilken tilstand i prosessen befinner seg i, hvor

$$\begin{aligned} Y &\sim \mathcal{N}(E_i, 1), \\ E_1 &= 5, \\ E_2 &= 7 \text{ og} \\ \delta_1 &= \delta_2 = 0.5. \end{aligned}$$

Videre estimeres sannsynlighetene for tilstandene ved tidspunktene med forward-backwardalgoritmen. Starten er forwarddelen med α -verdier. Skrevet ut for tilstander gir det

$$\begin{aligned} \alpha_1(1) &= \delta_1 f_1(Y_1), \\ \alpha_1(2) &= \delta_2 f_2(Y_1), \\ \alpha_{k+1}(1) &= (\alpha_k(1)a_{11} + \alpha_k(2)a_{21})f_1(Y_{k+1}), \\ \alpha_{k+1}(2) &= (\alpha_k(1)a_{12} + \alpha_k(2)a_{22})f_2(Y_{k+1}), \end{aligned}$$

hvor $k = 1, \dots, 99$ og matrisen A inneholder verdiene a_{ij} .

Disse α -verdiene ved tid k gir sannsynligheten for $P(Y_1, \dots, Y_k, J_k = i | \Theta)$, som er simultansannsynligheten både for alle observasjoner opp til og med tid k og at tilstanden skal være i . For å få sannsynligheten for tilstand i ved tid k gitt observasjonene og modellen brukes omformingen

$$\begin{aligned} P(J_k = i | Y_1, \dots, Y_k, \Theta) &= \frac{P(Y_1, \dots, Y_k, J_k = i | \Theta)}{P(Y_1, \dots, Y_k | \Theta)} \\ &= \frac{\alpha_k(i)}{\sum_{j=1}^2 \alpha_k(j)}. \end{aligned}$$

Etter utregning for alle k og i gir det sannsynligheten for hvilken tilstand prosessen befinner seg i ved hvert tidssteg. Estimert tilstand blir den av de to verdiene som har høyest sannsynlighet. Det kan videre sammenlignes med de ekte/genererte tilstandene, og konklusjonen blir at forwarddelen beregner korrekt tilstand i 81 av de 100 tidsstegene.

Beregner videre backwarddelen, med $\beta_{100}(i) = 1$ og

$$\begin{aligned}\beta_k(1) &= a_{11}f_1(Y_{k+1})\beta_{k+1}(1) + a_{12}f_2(Y_{k+1})\beta_{k+1}(2), \\ \beta_k(2) &= a_{21}f_1(Y_{k+1})\beta_{k+1}(1) + a_{22}f_2(Y_{k+1})\beta_{k+1}(2),\end{aligned}$$

for $k = 99, 98, \dots, 2, 1$. Ved samme argumentasjon som for α -verdiene for beregning av sannsynligheten for hvilken tilstand prosessen er i, gir dette korrekt beregnet tilstand i 70 av 99 tidssteg.

Forward- og backwarddelen kombinert beregnes ved verdien $\xi_k(i, j) = P(J_k = i, J_{k+1} = j | Y_1, \dots, Y_n, \Theta)$ for $k = 1, \dots, n$ som i formel 3.6 på side 26 og sannsynligheten for å være i tilstand i ved tid k som $\gamma_k(i) = \xi_k(i, 1) + \xi_k(i, 2)$. Ved innsetting av tidligere beregnede α - og β -verdier, og beregning av γ , gir det korrekt estimert tilstand i 90 av 100 tilfeller. Dette er vist i figur 3.1 på neste side.

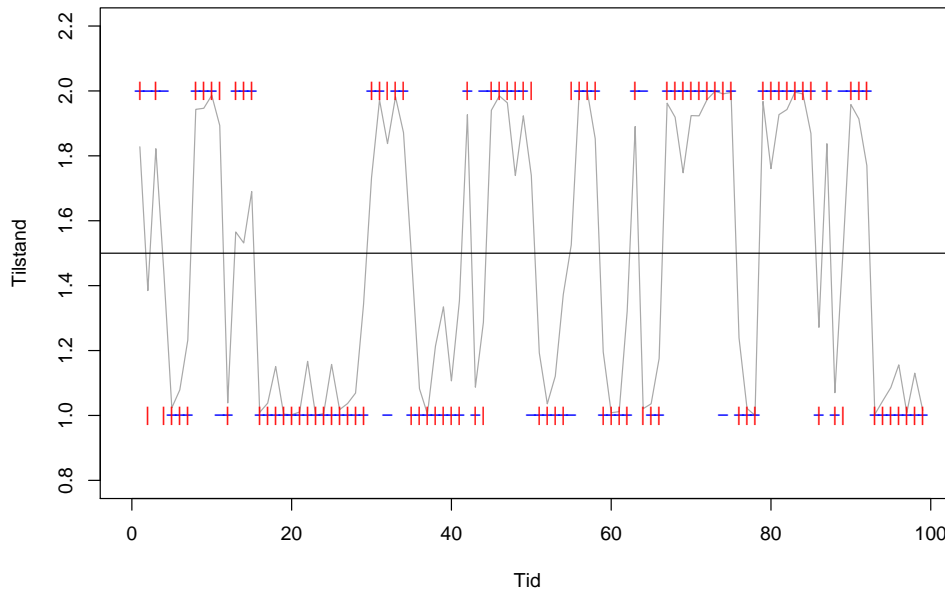
3.3 Forward-backwardalgoritme for MMPP

Forward-backwardalgoritmen i avsnitt 3.1 var basert på en diskret skjult Markovmodell, med tilhørende overgangssannsynligheter og tettheter til observasjonene. Vi ser her på å bruke algoritmen til å estimere tilstandene til en MMPP, hvor tiden er kontinuerlig, ved å lage en diskret SMM basert på en MMPP. Tanken er å dele opp transektlinjen L inn i små biter med lik lengde, K , og estimere tilstanden til hver av bitene. Innenfor hver bit kan det være ingen eller opptil flere observasjoner, som gir for bit k med n_k observasjoner

$$Y_k = (y_1, \dots, y_{n_k}), \quad k = 1, \dots, L/K.$$

For å beregne de rekursive delene i forward (formel 3.2 på side 24), backward (formel 3.4 på side 25) og forward-backward (formel 3.6 på side 26), må det defineres overgangssannsynligheter og tetthet for de to tilstandene. Tettheten for n observasjoner og avstanden mellom dem, s_i , er gitt ved formel 2.18 på side 16 i avsnitt 2.2. Tettheten går på avstandene mellom alle observasjonene, hvor den slutter på siste observasjon. Når tettheten skal beregnes for hver bit i dette oppsettet, vil det være en avstand fra siste observasjon til slutten av biten. Beregning av tettheten gjøres som ved beregning av likelihoodverdien, hvilket

Forward-backwardalgoritme for en diskret SMM og normalfordelte observasjoner



Figur 3.1: Estimerte tilstander med forward-backwardalgoritmen. Blå streker (–) er sanne tilstander og røde streker (|) er estimerte tilstander. 90 av 100 tilstander er blitt riktig estimert. Her er forventningene til normalfordelingen 5 og 7 for henholdsvis tilstand 1 og 2, begge med standardavvik 1. Den grå linjen i midten er $\gamma_k(2)$, som er sannsynligheten for at prosessen er i tilstand 2. Det er lagt til 1 for å få $\gamma_k(2)$ i midten av figuren. Er denne sannsynligheten over 0.5 (svart strek, lagt til 1) blir estimert tilstand satt til 2.

gir

$$f(Y_k) = \boldsymbol{\pi} \exp[\mathbf{C}s_1] \Lambda \cdots \exp[\mathbf{C}s_{n-1}] \Lambda \exp[\mathbf{C}(K - y_{n_k})] \mathbf{e}, \quad (3.8)$$

hvor K er lengden på biten med y_{n_k} som siste observasjon. Som før er $\mathbf{e}' = (1,1)$, og $\boldsymbol{\pi}$ er stasjonærfordelingen. Hvis det ikke er noen observasjoner i biten vil det gi $\boldsymbol{\pi} \exp[\mathbf{C}K] \mathbf{e}$.

Denne tettheten er en samlet tetthet for observasjonene som tar høyde for at prosessen kan være i flere tilstander. For å estimere tilstandene med algoritmen trengs det en tetthet for hver av tilstandene gitt de samme observasjonene. Det er multiplikasjonen med stasjonærfordelingen som gjør dette, og ved å utelate denne vil det gi en tetthet for hver tilstand. Dette gir, etter multiplikasjon med \mathbf{e} , at elementene til matriseeksponentialen legges sammen. Det vil gi

$$\begin{aligned} f_1(Y_k) &= f(Y_k|J_k = 1) = E_{11}(Y_k) + E_{22}(Y_k), \\ f_2(Y_k) &= f(Y_k|J_k = 1) = E_{21}(Y_k) + E_{22}(Y_k), \end{aligned} \quad (3.9)$$

hvor er $E_{i,j}$ element i, j i matrisen $\exp[\mathbf{C}s_1]\Lambda \cdots \exp[\mathbf{C}s_{n-1}]\Lambda \exp[\mathbf{C}(K - y_n)]$.

Videre må overgangssannsynlighetene $P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j|X(s) = i)$ defineres. Her er $X(t)$ en tidskontinuerlig Markovprosess med N diskrete tilstander og stasjonære overgangssannsynligheter. Disse sannsynlighetene er utledet i avsnitt A.1, og gir

$$\mathbf{P}(K) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_2 + \mu_1 e^{-(\mu_1 + \mu_2)K}}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)K})}{\mu_2 + \mu_1} \\ \frac{\mu_2(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)K})}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1 + \mu_2 e^{-(\mu_1 + \mu_2)K}}{\mu_2 + \mu_1} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

3.3.1 Simuleringseksempel

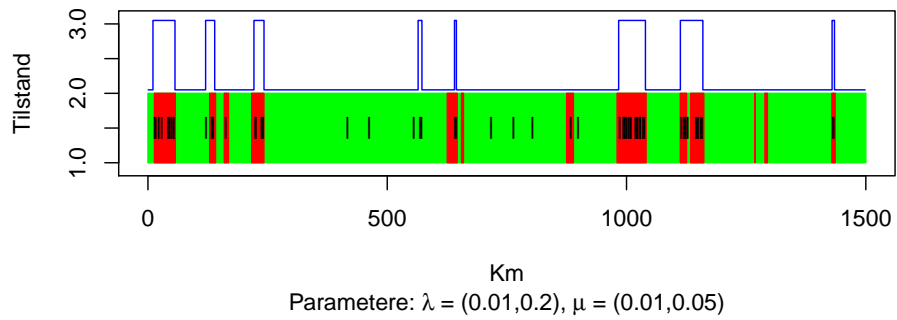
Det er kjørt et simuleringseksempel for å teste ut estimeringsalgoritmene. Det er brukt genererte data fra en MMPP, forklart i tillegg B, og forward-backwardalgoritmene er brukt for å estimere tilstandene. Ved generering av data, utifra gitte λ - og μ -verdier, er tilstanden til prosessen kjent ved enhver tid. Simuleringen ble kjørt med $\boldsymbol{\lambda} = [0.01, 0.20]$, $\boldsymbol{\mu} = [0.01, 0.05]$ og lengde på transektlinjen på 1500. Med bitlengde $K = 1$ gir det en overgangssannsynlighetsmatrise (formel 3.10) lik

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0.9903 & 0.0097 \\ 0.0485 & 0.9515 \end{bmatrix}.$$

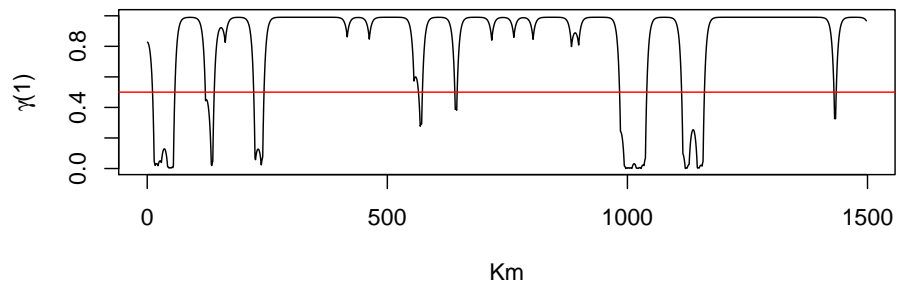
Dette gir 1500 biter som skal estimeres. Forward-backwardalgoritmen er kjørt med beregning av ξ -verdier, formel 3.6 på side 26, som et estimat på hvilken tilstand prosessen er i og kontrollert mot den sanne tilstanden prosessen. Tettheter er regnet som i formel 3.9 og beregnet ved å bruke den eksplisitte skrivemåten for matriseeksponentialen gitt ved formel 2.22 på side 17.

Resultatet er vist i figur 3.2 på neste side, som viser sann tilstand ved lav (grønn) og rød (høy) i figur a) og trukne observasjoner som sorte streker. Estimerte tilstander (blå strek) er lagt over de sanne tilstandene, flyttet en enhet høyere. I b) er sannsynligheten for at estimert tilstand er 1 for hver bit, som svarer til $\gamma(1)$ i forward-backwardalgoritmen. Er den over 0.5 settes estimert tilstand til 1, og under 0.5 til tilstand 2. Ved å se på figur a) stemmer de reestimerte tilstandene ganske nøyaktig med de ekte, den er riktig estimert ved 94% av de 1500 bitene. Algoritmen feilestimerer på et par naturlige steder. For eksempel estimerer den tilstanden til å være 2 rundt 550km, hvor det er tre tette observasjoner i et lavintensitetsområde og den får ikke med seg høyintensitetsområder med få eller ingen observasjoner.

a) Ekte tilstand: grønn(lav) og rød(høy).
 Obs: (|), estimert tilstand lagt over.



b) Forward-backwardsannsynlighet for at prosessen er i tilstand 1.



Figur 3.2: Resultat over simulerte observasjoner og estimering av tilstander. Transektlinjen er gitt ved x-aksene. Figur a) viser genererte tilstander hvor grønn er lav tilstand (1) og rød høy (2), og trukne observasjoner (|). Estimerte tilstander er tegnet over (blå strek), den er flyttet en enhet opp hvor en verdi på 3 betyr tilstand 2 og en verdi på 2 tilstand 1. Figur c) er sannsynligheten for prosessen er i tilstand 1. Er den over 0.5 (rød linje), gir det estimert tilstand lik 1 i figur a).

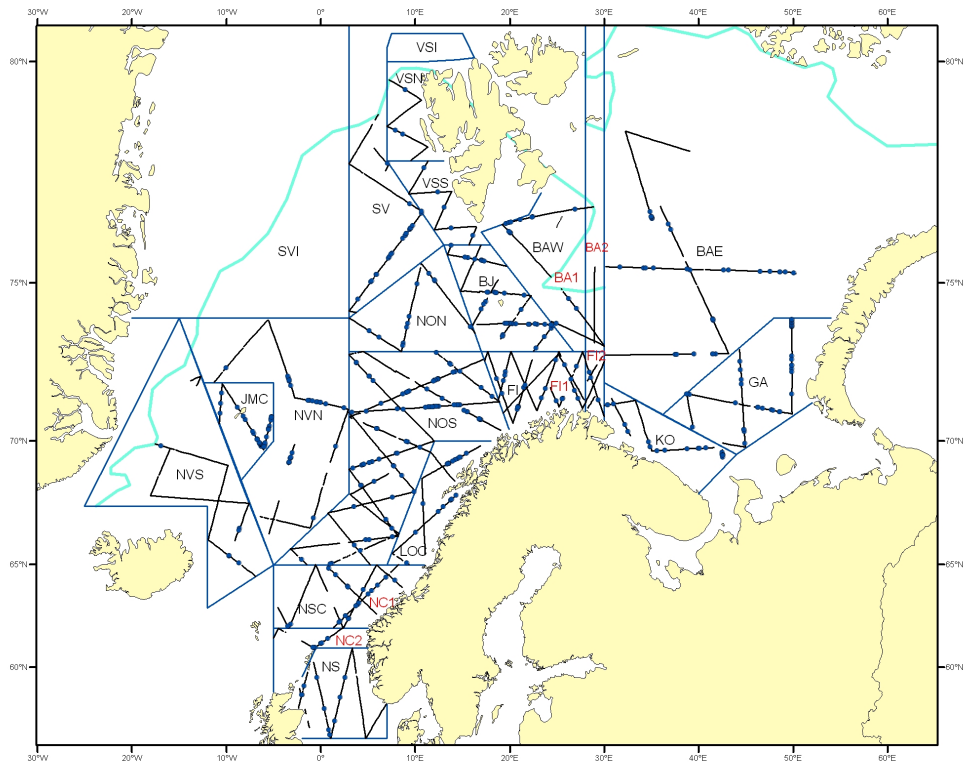
4

Telling av nordøstatlantisk vågehval

I dette kapitlet blir MMPP anvendt på observasjoner av vågehval i Nordøstatlanteren, en undersøkelse utført i perioden 2002-2007. Området er det opp i 18 surveyblokker og estimering av parameterne er gjort for hver blokk. Oppdelingen og observasjoner projisert ned på transektlinjen er vist i figur 4.1 på neste side, hvor en kan se at observasjonene klumper seg. Vi sammenligner en MMPP med og uten tidsvarierende halvstripebredde (w) og ser på tilhørende likelihoodverdier. Halvstripebredden vil påvirke dyretettheten ρ , og det er naturlig å tro at en tidsvarierende w vil gi et bedre estimat av parameterne enn en konstant halvstripebredde gjennom hele blokken. I 8 av 18 blokker er ikke det tilfelle, hvor estimering med en konstant w gir høyere likelihoodverdier. Vi undersøker her hva dette kan skyldes og undersøker estimerte verdier nærmere for begge modellene for å se om det er en sammenheng med høyere likelihoodverdier for modellen med konstant stripebredde. Det er også estimert en inhomogen Poissonprosess på de samme observasjonene i avsnitt 4.3 for å se om det samme oppstår i en enklere modell.

4.1 Tilpasning av MMPP til data

Estimerte parameterne er satt opp i tabell 4.1 på side 35. Verdiene ρ er gjennomsnittelig dyretetthet, hvor ρ_1 er for lavt område og ρ_2 er for høyt område. Parameteren λ er relatert til ρ gjennom $\lambda = 2w\rho$. Nederste linje er forholdet mellom største og minste verdi og det er stor variasjon mellom blokkene, hvor



Figur 4.1: Vågehval i Nordøstatlanteren fra en undersøkelse utført i perioden 2002-2007. Området er delt inn i 18 surveyblokke, skilt med blå linjer. Svarte streker er transektlinjer og blå prikker er observerte vågehval projisert ned på linjen. Observasjonene i denne figuren er for plattform A på båten, mens observasjonene brukt i dette kapittelet er fra plattform B.

bytteintensitetene μ har større forhold enn ρ . Det er også tatt med gjennomsnitt (\bar{x}) og empirisk varians (s^2), hvor μ_2 og spesielt ρ_2 har høy varians. Variasjonen mellom blokkene kan skyldes biologisk variasjon eller statistisk usikkerhet (Skaug, 2009). Usikkerheten er i sammenheng med at flere av blokkene har få observasjoner.

4.2 Effekt av tidsvarierende halvstripebredde w

Estimering av parameteren $\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ er basert på sekvensen $\{s_i\}$, avstandene mellom observasjonene. Halvstripebredden w er estimert separat og

Tabell 4.1: Oversikt over estimerte parametere ved en MMPP innenfor hver blokk, hvor λ er lik $2\hat{w}\rho$. Enheten til ρ er km^{-2} , til μ er km^{-1} , km for L og \hat{w} og km^{-1} for λ . Blokkenes navn tilsvarende figur 4.1 på forrige side og hvilket år undersøkelsen ble utført, hvor L er total lengde på transektlinjen. Antall observasjoner er gitt som n .

Blokk	n	L	ρ_1	ρ_2	\hat{w}	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2
BAW 03	11	847	0,0137	0,5327	0,1843	0,0050	0,1963	0,0071	0,1612
BAE 07	25	2055	0,0199	1,5796	0,2141	0,0085	0,6764	0,0012	0,1211
BJ 03	34	1235	0,0405	6,6565	0,2337	0,0189	3,1119	0,0023	0,5795
FI 02	29	1992	0,0211	0,5581	0,2110	0,0089	0,2355	0,0028	0,0981
NOS 06	24	2045	0,0124	0,5101	0,1748	0,0043	0,1783	0,0014	0,0468
KO 07	18	927	0,0096	0,4235	0,1685	0,0032	0,1427	0,0335	0,2728
GA 07	28	1331	0,0225	0,3576	0,2201	0,0099	0,1574	0,0055	0,0473
JMC 05	32	621	0,0312	3,6795	0,1906	0,0119	1,4028	0,0976	3,2652
LOC 06	21	1378	0,0166	1,7976	0,2351	0,0078	0,8453	0,0014	0,2261
NC1 04	5	1290	0,0112	0,2113	0,1579	0,0035	0,0667	0,0032	0,4680
NC1 06	6	841	0,0164	0,2308	0,2022	0,0066	0,0933	0,0033	0,4463
NC2 04	6	357	0,0016	0,2211	0,2729	0,0009	0,1207	0,0093	0,0674
NON 03	10	757	0,0058	0,1997	0,1752	0,0020	0,0700	0,0252	0,1248
NOS 02	60	4273	0,0191	0,4238	0,1762	0,0067	0,1494	0,0033	0,0674
NS 04	7	2115	0,0062	0,1766	0,2427	0,0030	0,0857	0,0028	0,5742
NVN 05	11	1705	0,0119	0,3205	0,1833	0,0044	0,1175	0,0033	0,0518
NVS 05	7	1787	0,0046	0,4834	0,2190	0,0020	0,2117	0,0046	0,4430
SV 03	32	1614	0,0226	0,4926	0,2061	0,0093	0,2030	0,0036	0,0648
\bar{x}			0,01595	1,04760	0,20376	0,00651	0,44804	0,01174	0,39587
s^2			0,00009	2,70474	0,00092	0,00002	0,56138	0,00053	0,54897
maks/min			25,8104	37,7106	1,7283	22,1029	46,6527	83,0870	69,8214

ikke regnet som en parameter i estimeringen. Den er en funksjon av kovariater basert på værforhold, sikt osv. og er målingene for dette er utført hver time (Skaug, 2009). Dette medfører at det er $(\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2)$ som estimeres. Estimateret beregnes gjennom optimering av likelihoodfunksjonen (formel 2.21 på side 16) i optimeringsprogrammet AD Model Builder (Skaug, 2006). De estimerte parametere i tabell 4.1 er med variasjon i stripebredden. Variabelen \hat{w} er tidsvektet gjennomsnittelig halvstripebredde.

Et estimeringsalternativ er å bruke en konstant stripebredde gjennom hele blokken. Det er naturlig å tro at estimatene blir bedre når stripebredden varierer med tiden ettersom det blir gitt mer nøyaktig informasjon. Det viser seg at for 8 av 18 blokker gir det bedre parametertilpasning, høyere likelihoodverdi, med å bruke en tidsvektet gjennomsnittelig halvstripebredde \hat{w} . Likelihoodverdiene for alle blokkene er gitt i tabell 4.2 på neste side, hvor lik_{med} er modellen med variasjon i w og lik_{uten} er med konstant stripebredde (uten variasjon). Differansen Δ likelihood er lik_{med} minus lik_{uten} .

For å undersøke hva dette skyldes, blir det her sett på de estimerte verdiene og om det er en sammenheng mellom negativ likelihooddifferanse og estimerte

Tabell 4.2: Log-likelihoodverdier med og uten tidsvarierende halvstripebredde w . Likelihood med varierende w er gitt som lik_{med} , og uten variasjon (konstant) som lik_{uten} hvor det er brukt \hat{w} fra tabell 4.1 på forrige side. Differansen Δ likelihood er $lik_{med} - lik_{uten}$.

Blokknr.	Blokknavn	lik_{med}	lik_{uten}	Δ likelihood
1	BAW 03	-55,7281	-55,8948	0,1652
2	BAE 07	-123,8910	-123,7790	-0,1120
3	BJ 03	-137,0700	-134,7700	-2,3020
4	FI 02	-146,7370	-143,3600	-3,3770
5	NOS 06	-105,6280	-106,7170	1,0890
6	KO 07	-82,4413	-83,8311	1,3880
7	GA 07	-133,2930	-130,6250	-2,6690
8	JMC 05	-117,6490	-117,3660	-0,2830
9	LOC 06	-78,1587	-79,7015	1,5424
10	NC1 04	-32,6939	-32,8275	0,1295
11	NC1 06	-36,3798	-35,7169	-0,6628
12	NC2 04	-25,0324	-25,4028	0,3917
13	NON 03	-53,1600	-51,9783	-1,1960
14	NOS 02	-282,8800	-284,2150	1,3360
15	NS 04	-48,7197	-47,0417	-1,6746
16	NVN 05	-101,7190	-101,9460	0,2240
17	NVS 05	-44,3972	-44,4947	0,1006
18	SV 03	-142,2840	-143,5000	1,2160

verdier. Det er også utført simuleringer i avsnitt 5.1 for å se om dette kan skyldes tilfeldigheter. Et argument for at det kan være tilfeldigheter er at det er få observasjoner i hver blokk som estimatet av θ er basert på, flere av dem med under 10 observasjoner og gjennomsnittelig 21.

Summen av likelihoodverdiene for alle blokkene blir -1747,86 og -1743,17 på henholdsvis med variasjon og uten variasjon i w . Ved å slå av blokkvariasjonen, det vil si at alle 376 observasjonene legges innenfor en blokk, og regne ut likelihoodverdiene på samme måte, blir de -1804.62 og -1806.48 på henholdsvis med variasjon og uten variasjon. Dette resulterer i lavere likelihoodverdier, men modellen med variasjon gir størst likelihood.

Tabell 4.3: Oppsummerende størrelser sortert blokkvis etter Δ likelihood. Med lengde og antall observasjoner for hver blokk, samt forventning gitt ved formel 2.12 på side 13 og τ som er varians/forventning, den forteller om overdispersjon (grad av klynge).

Δ lik	Blokk	L	Obs	$\mathbb{E}(n)_{med}$	$\mathbb{E}(n)_{uten}$	τ_{med}	τ_{uten}	τ_{med}/τ_{uten}
-3,377	BAW 03	1991,647	29	30,068	28,957	4,6376	2,8855	1,6072085
-2,669	BAE 07	1330,746	28	33,636	27,813	6,5779	2,7225	2,4161249
-2,302	BJ 03	1235,142	34	38,588	34,024	9,3179	5,2293	1,7818637
-1,6746	FI 02	2115,007	7	7,255	7,2148	1,0663	1,045	1,0203828
-1,196	NOS 06	756,5052	10	10,177	10,092	2,6027	2,8863	0,9017427
-0,6628	KO 07	841,3152	6	6,1182	6,0957	1,0793	1,058	1,0201323
-0,283	GA 07	620,8092	32	32,437	31,351	2,6154	2,7246	0,9599207
-0,112	JMC 05	2054,561	25	30,727	29,966	10,387	10,522	0,9871697
0,1006	LOC 06	1787,486	7	7,4782	7,1531	1,9719	1,7374	1,1349718
0,1295	NC1 04	1290,346	5	5,1321	5,1539	1,0804	1,0753	1,0047429
0,1652	NC1 06	847,4832	11	11,072	10,653	4,0366	2,8511	1,4158044
0,224	NC2 04	1704,527	21	19,131	18,958	4,634	4,5813	1,0115033
0,3917	NON 03	357,1272	6	5,4904	6,4355	4,5537	7,4909	0,6078976
1,089	NOS 02	2044,692	24	19,318	21,466	6,9517	10,082	0,689516
1,216	NS 04	1613,857	32	31,671	32,231	5,8273	6,654	0,8757589
1,336	NVN 05	4273,19	60	56,941	57,973	4,3755	5,4545	0,8021817
1,388	NVS 05	926,742	18	17,148	17,741	2,7473	2,9945	0,9174487
1,5424	SV 03	1378,24	21	17,616	21,057	6,4084	13,53	0,4736438

Tabell 4.3, 4.4, 4.5 og 4.7 gir en oversikt over estimatene på hvaldataene og forskjeller på estimering med og uten varierende w .

Ved tabell 4.3 er likelihood verdiene sortert etter stigende rekkefølge, med de tilhørende verdier for antall observasjoner, forventning $\mathbb{E}(n)$ og overdispersjonskoeffisienten τ for begge modellene. Forholdet mellom τ -verdiene er også tatt med. Forventningene for både med variasjon og uten variasjon gir et godt samsvar med antall observasjoner i noen av blokkene, men for flere blokker er det et avvik. Forventningene i modellen med variasjon avviker mer enn i modellen uten variasjon. Summen av kvadratavvik mellom estimert forventning og observasjoner, delt på 17, er 7,92 og 2,37 for henholdsvis med variasjon og uten variasjon. Verken lengden L eller antall observasjoner ser ut til å ha noen klar sammenheng med Δ likelihoodverdiene. Det ser ut til å være en tendens på sammenhengen av τ verdiene. Parameteren τ , definert som varians/forventning, er et estimat på klyngetettheten. Forholdet mellom τ_{med} og τ_{uten} ser ut til å være større for de laveste deltalikelihood verdiene og litt synkende ettersom deltalikelihoodverdiene stiger, som kan sees på plottet i figur 4.2 på side 39.

I tabell 4.4 på neste side er det en oversikt over stripebreddene, men det skiller seg ikke ut noen sammenheng mellom disse og deltalikelihood.

Tabell 4.5 på side 39 er differansene mellom de estimerte parameterne med variasjon og uten variasjon. Dette viser at forskjellen på ρ_1 og μ_1 verdiene ligger

Tabell 4.4: Oversikt over de forskjellige halvstripebreddene og hvor mye de avviker fra det tidsvektede gjennomsnittet \hat{w} som er brukt i modellen med konstant halvstripebredde. Dette er maks og min verdiene og hvor langt disse verdiene ligger fra den \hat{w} og tilslutt Δ likelihood.

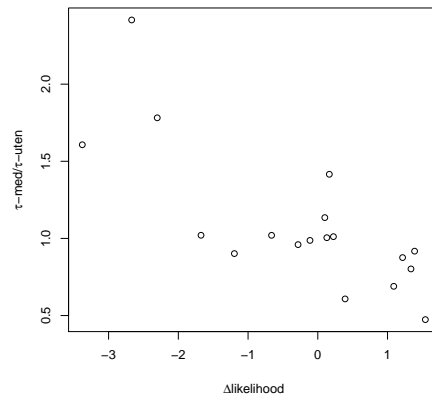
Blokk	maks w	min w	\hat{w}	maks $w - \hat{w}$	min $w - \hat{w}$	Δ lik
BAW 03	0,2410	0,1380	0,1843	0,0567	-0,0463	0,1652
BAE 07	0,4000	0,1380	0,2141	0,1859	-0,0761	-0,1120
BJ 03	0,4000	0,1380	0,2337	0,1663	-0,0957	-2,3020
FI 02	0,3770	0,1380	0,2110	0,1660	-0,0730	-3,3770
NOS 06	0,4000	0,1380	0,1748	0,2252	-0,0368	1,0890
KO 07	0,3610	0,1380	0,1685	0,1925	-0,0305	1,3880
GA 07	0,4000	0,1380	0,2201	0,1799	-0,0821	-2,6690
JMC 05	0,2900	0,1380	0,1906	0,0994	-0,0526	-0,2830
LOC 06	0,4000	0,1400	0,2351	0,1649	-0,0971	1,5424
NC1 04	0,2170	0,1380	0,1579	0,0591	-0,0199	0,1295
NC1 06	0,4000	0,1380	0,2022	0,1978	-0,0642	-0,6628
NC2 04	0,4000	0,1500	0,2729	0,1271	-0,1349	0,3917
NON 03	0,3020	0,1380	0,1752	0,1268	-0,0372	-1,1960
NOS 02	0,4000	0,1380	0,1762	0,2238	-0,0382	1,3360
NS 04	0,4000	0,1440	0,2427	0,1573	-0,1047	-1,6746
NVN 05	0,4000	0,1380	0,1833	0,2167	-0,0453	0,2240
NVS 05	0,4000	0,1380	0,2190	0,1810	-0,0810	0,1006
SV 03	0,4000	0,1380	0,2061	0,1939	-0,0681	1,2160

for det meste på tredje og fjerde desimal, mens forskjellen på ρ_2 og μ_2 er større. Relative differanser mellom parameterne i forhold til med variasjon, sortert etter likelihooddifferansene, er gitt i tabell 4.6 på side 40. Heller ikke her er det en klar sammenheng med Δ likelihoodverdiene.

En sammenheng med likelihooddifferansene og avviket mellom antall observasjoner i blokken og forventningen er vist i tabell 4.7 på side 41. Den viser også en forskjell på forventningene for med variasjon og uten variasjon. Det ses at når $\Delta \mathbb{E}(n)$ er positiv, $\mathbb{E}(n)_{med} > \mathbb{E}(n)_{uten}$, er Δ likelihood negativ, $Lik_{med} < Lik_{uten}$. Størst forventning gir lavest likelihoodverdi. Plot av delta-likelihood mot $\mathbb{E}(n)_{med}$ minus $\mathbb{E}(n)_{uten}$ er gitt i figur 4.3 på side 40.

Tabell 4.5: Differanser i de estimerte parameterne mellom modellen med variasjon i w og modellen uten variasjon.

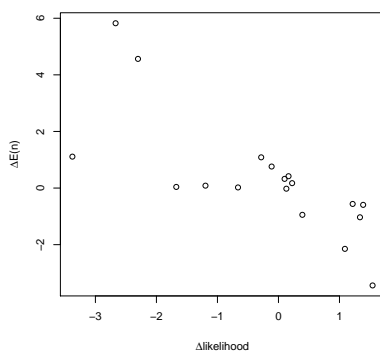
Blokk	$\Delta\rho_1$	$\Delta\rho_2$	$\Delta\mu_1$	$\Delta\mu_2$	Δlik
BAW 03	0,00452	0,20532	-0,00419	-0,01706	0,16520
BAE 07	-0,00178	0,08080	0,00021	0,02090	-0,11200
BJ 03	-0,00256	1,33850	-0,00013	-0,11883	-2,30200
FI 02	-0,00516	-1,12476	0,00025	-0,34216	-3,37700
NOS 06	0,00182	-0,02532	0,00034	0,01578	1,08900
KO 07	-0,00562	-0,08567	0,01637	0,01351	1,38800
GA 07	-0,01303	-0,70603	0,00108	-0,26817	-2,66900
JMC 05	0,00511	0,78960	-0,00030	0,80830	-0,28300
LOC 06	-0,00142	-1,39510	0,00020	0,01278	1,54240
NC1 04	0,00169	-0,00407	-0,00094	-0,15367	0,12950
NC1 06	0,00013	-0,00033	-0,00097	-0,15501	-0,66280
NC2 04	-0,00031	-0,22664	0,00147	0,00166	0,39170
NON 03	0,00260	0,03462	0,00260	0,04780	-1,19600
NOS 02	-0,00102	-0,12487	0,00113	0,00556	1,33600
NS 04	-0,00001	0,00217	-0,00083	-0,21618	-1,67460
NVN 05	0,00560	0,04491	-0,00203	-0,00733	0,22400
NVS 05	0,00111	0,14663	-0,00432	-0,04668	0,10060
SV 03	-0,00073	-0,06467	0,00024	0,00231	1,21600



Figur 4.2: Deltalikelihoodverdier (med variasjon minus uten variasjon) for hvaldataene plottet mot forholdet mellom τ med variasjon og τ uten variasjon for blokkene, verdier tilsvarende tabell 4.3 på side 37.

Tabell 4.6: Relative differanser i de estimerte parameterne mellom modellen med variasjon i w og modellen uten variasjon, relativt i forhold til modellen med variasjon.

Blokk	$\Delta\rho_1$	$\Delta\rho_2$	$\Delta\mu_1$	$\Delta\mu_2$	Δlik
FI 02	-0,24490	-2,01519	0,09137	-3,48623	-3,37700
GA 07	-0,57830	-1,97452	0,19710	-5,66406	-2,66900
BJ 03	-0,06319	0,20108	-0,05696	-0,20506	-2,30200
NS 04	-0,00151	0,01229	-0,29567	-0,37650	-1,67460
NON 03	0,44781	0,17335	0,10332	0,38301	-1,19600
NC1 06	0,00786	-0,00143	-0,29293	-0,34731	-0,66280
JMC 05	0,16388	0,21459	-0,00308	0,24755	-0,28300
BAE 07	-0,08932	0,05115	0,17718	0,17261	-0,11200
NVS 05	0,23845	0,30331	-0,94176	-0,10537	0,10060
NC1 04	0,15040	-0,01926	-0,29514	-0,32835	0,12950
BAW 03	0,33005	0,38545	-0,59434	-0,10586	0,16520
NVN 05	0,46859	0,14013	-0,60878	-0,14150	0,22400
NC2 04	-0,19526	-1,02510	0,15876	0,02460	0,39170
NOS 06	0,14625	-0,04964	0,23682	0,33743	1,08900
SV 03	-0,03215	-0,13130	0,06554	0,03574	1,21600
NOS 02	-0,05342	-0,29463	0,34488	0,08246	1,33600
KO 07	-0,58286	-0,20227	0,48863	0,04952	1,38800
LOC 06	-0,08604	-0,77609	0,14709	0,05653	1,54240



Figur 4.3: Deltalikelihoodverdier (med variasjon minus uten variasjon) plottet mot tilsvarende differanse mellom forventningene, verdier i første og siste kolonne i tabell 4.7 på neste side.

Tabell 4.7: Deltalikelihood sortert i stigende rekkefølge, og differansen mellom forventningen $\mathbb{E}(n)$ og antall observasjoner i blokkene (n), både med og uten variasjon i w . Differansen mellom $\mathbb{E}(n)_{med}$ og $\mathbb{E}(n)_{uten}$ er gitt som $\Delta \mathbb{E}(n)$

Blokk	Δ likelihoood	$\mathbb{E}(n)_{med} - n$	$\mathbb{E}(n)_{uten} - n$	$\Delta \mathbb{E}(n)$
FI 02	-3,377	1,068	-0,043	1,111
GA 07	-2,669	5,636	-0,187	5,823
BJ 03	-2,302	4,588	0,024	4,564
NS 04	-1,6746	0,255	0,2148	0,0402
NON 03	-1,196	0,177	0,092	0,085
NC1 06	-0,6628	0,1182	0,0957	0,0225
JMC 05	-0,283	0,437	-0,649	1,086
BAE 07	-0,112	5,727	4,966	0,761
NVS 05	0,1006	0,4782	0,1531	0,3251
NC1 04	0,1295	0,1321	0,1539	-0,0218
BAW 03	0,1652	0,072	-0,347	0,419
NVN 05	0,224	-1,869	-2,042	0,173
NC2 04	0,3917	-0,5096	0,4355	-0,9451
NOS 06	1,089	-4,682	-2,534	-2,148
SV 03	1,216	-0,329	0,231	-0,56
NOS 02	1,336	-3,059	-2,027	-1,032
KO 07	1,388	-0,852	-0,259	-0,593
LOC 06	1,5424	-3,384	0,057	-3,441

4.3 Inhomogen Poissonprosess

For å undersøke negative likelihooddifferanser videre er det kjørt en inhomogen Poissonprosess (IPP) på de samme observasjonene, for å se om samme effekt opptrer. Ved en inhomogen Poissonprosess eksisterer det ikke bytteintensiteter. Det vil si at det bare blir estimert en λ for alle blokkene. Tabell 4.8 er en oversikt over likelihoodverdiene for MMPP og IPP, estimert for alle observasjonene uten blokkvariasjon.

Tabell 4.8: Samlet likelihood for MMPP og IPP, med og uten variasjon i halvstripebredden w .

MMPP		IPP	
med variasjon	uten variasjon	med variasjon	uten variasjon
1804,62	1806,48	1982,61	1988,36

Poissonprosessen er her estimert for hver av blokkene, både med og uten tidsvarierende w , for å få en sammenligning med MMPP. Estimerte λ -verdier for modellen med tidsvarierende w er gitt i tabell 4.8. Deltalikelihoodverdiene er gitt i tabell 4.10 og de er plottet mot tilhørende verdier for MMPP i figur 4.4 på side 44. Det ses at det blir samme resultat som under MMPP, utenom for blokkene BAW 03 og NVS 05, hvor MMPP fikk positiv differanse, mens IPP får negativ. Disse verdiene er små; MMPP fikk 0,1652 og 0,1006, mens IPP får -0,2830 og -0,0339 for henholdsvis blokk BAW 03 og NVS 05. For lettere sammenligning er det satt opp tabell 4.11 på side 44 hvor deltalikelihoodverdiene er sortert i stigende rekkefølge med hensyn på MMPP-verdiene. Der ses det at IPP får mye større utslag på både de negative og de positive differansene.

Tabell 4.9: Estimerte lambdaverdier for blokkene ved en inhomogen poissonprosess, hvor det er brukt tidsvarierende halvstripebredder.

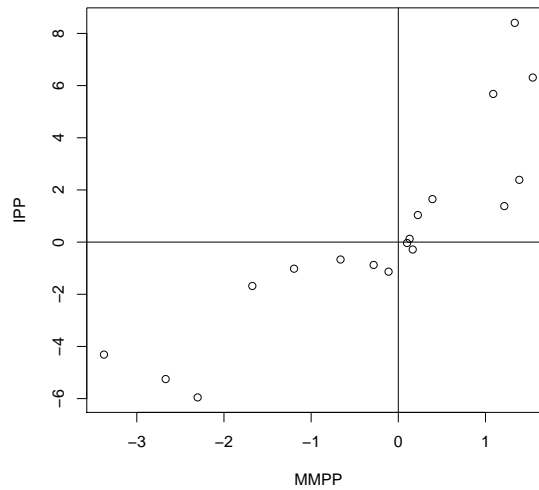
Blokk	BAW 03	BAE 07	BJ 03	FI 02	NOS 06	KO 07
λ_{pois}	0,0130	0,0122	0,0275	0,0146	0,0117	0,0194
	GA 07	JMC 05	LOC 06	NC1 04	NC1 06	NC2 04
	0,0210	0,0515	0,0152	0,0039	0,0071	0,0168
	NON 03	NOS 02	NS 04	NVN 05	NVS 05	SV 03
	0,0132	0,0140	0,0033	0,0123	0,0039	0,0198

Tabell 4.10: Likelihood verdier for MMPP og IPP, med og uten variasjon i w , og differansen.

Blokk	MMPP			IPP		
	Med var	Uten var	Δ lik	Med var	Uten var	Δ lik
FI 02	-55,7281	-55,8933	0,1652	-59,0726	-58,7896	-0,2830
GA 07	-123,8910	-123,7790	-0,1120	-136,3570	-135,2240	-1,1330
BJ 03	-137,0700	-134,7680	-2,3020	-162,1060	-156,1520	-5,9540
NS 04	-146,7370	-143,3600	-3,3770	-155,9710	-151,6580	-4,3130
NON 03	-105,6280	-106,7170	1,0890	-124,9980	-130,6790	5,6810
NC1 06	-82,4413	-83,8293	1,3880	-86,5512	-88,9388	2,3876
JMC 05	-133,2930	-130,6240	-2,6690	-141,3690	-136,1190	-5,2500
BAE 07	-117,6490	-117,3660	-0,2830	-127,7530	-126,8780	-0,8750
NVS 05	-78,1587	-79,7011	1,5424	-102,5570	-108,8660	6,3090
NC1 04	-32,6939	-32,8234	0,1295	-32,6395	-32,7667	0,1272
BAW 03	-36,3798	-35,7170	-0,6628	-36,3257	-35,6584	-0,6673
NVN 05	-25,0324	-25,4241	0,3917	-28,8675	-30,5159	1,6484
NC2 04	-53,1600	-51,9640	-1,1960	-54,2806	-53,2612	-1,0194
NOS 06	-282,8800	-284,2160	1,3360	-307,5390	-315,9450	8,4060
SV 03	-48,7197	-47,0451	-1,6746	-48,6586	-46,9770	-1,6816
NOS 02	-101,7190	-101,9430	0,2240	-112,2890	-113,3270	1,0380
KO 07	-44,3972	-44,4978	0,1006	-45,8325	-45,7986	-0,0339
LOC 06	-142,2840	-143,5000	1,2160	-156,0800	-157,4600	1,3800

Tabell 4.11: Deltalikelihoodverdier for MMPP og IPP sortert.

Blokk	MMPP	IPP
FI 02	-3,3770	-4,3130
GA 07	-2,6690	-5,2500
BJ 03	-2,3020	-5,9540
NS 04	-1,6746	-1,6816
NON 03	-1,1960	-1,0194
NC1 06	-0,6628	-0,6673
JMC 05	-0,2830	-0,8750
BAE 07	-0,1120	-1,1330
NVS 05	0,1006	-0,0339
NC1 04	0,1295	0,1272
BAW 03	0,1652	-0,2830
NVN 05	0,2240	1,0380
NC2 04	0,3917	1,6484
NOS 06	1,0890	5,6810
SV 03	1,2160	1,3800
NOS 02	1,3360	8,4060
KO 07	1,3880	2,3876
LOC 06	1,5424	6,3090



Figur 4.4: Deltalikelihoodverdiene til MMPP og IPP plottet mot hverandre. Verdiene tilsvarer tabell 4.11.

4.4 Diagnostikk

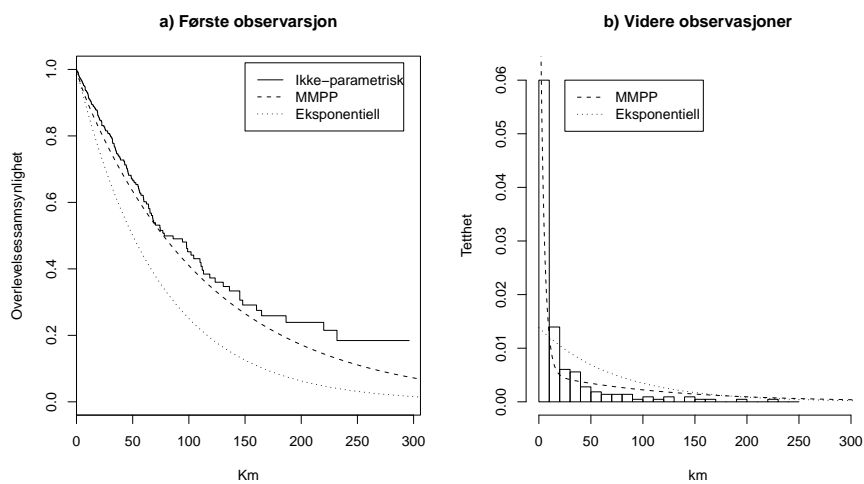
For å undersøke vågehvaldata med en overlevelsesfunksjon lages det her diagnostikkplott. Dette gjør vi for å sjekke tilpasning av estimerte modeller og observasjoner. Det sammenlignes med en ikke-parametrisk funksjon, en MMPP og en Poissonprosess. Overlevelsesfunksjonen var definert i formel 2.20 på side 16 til å være

$$V(s) = 1 - F(s) = \pi \exp[\mathbf{C}s]\mathbf{e}.$$

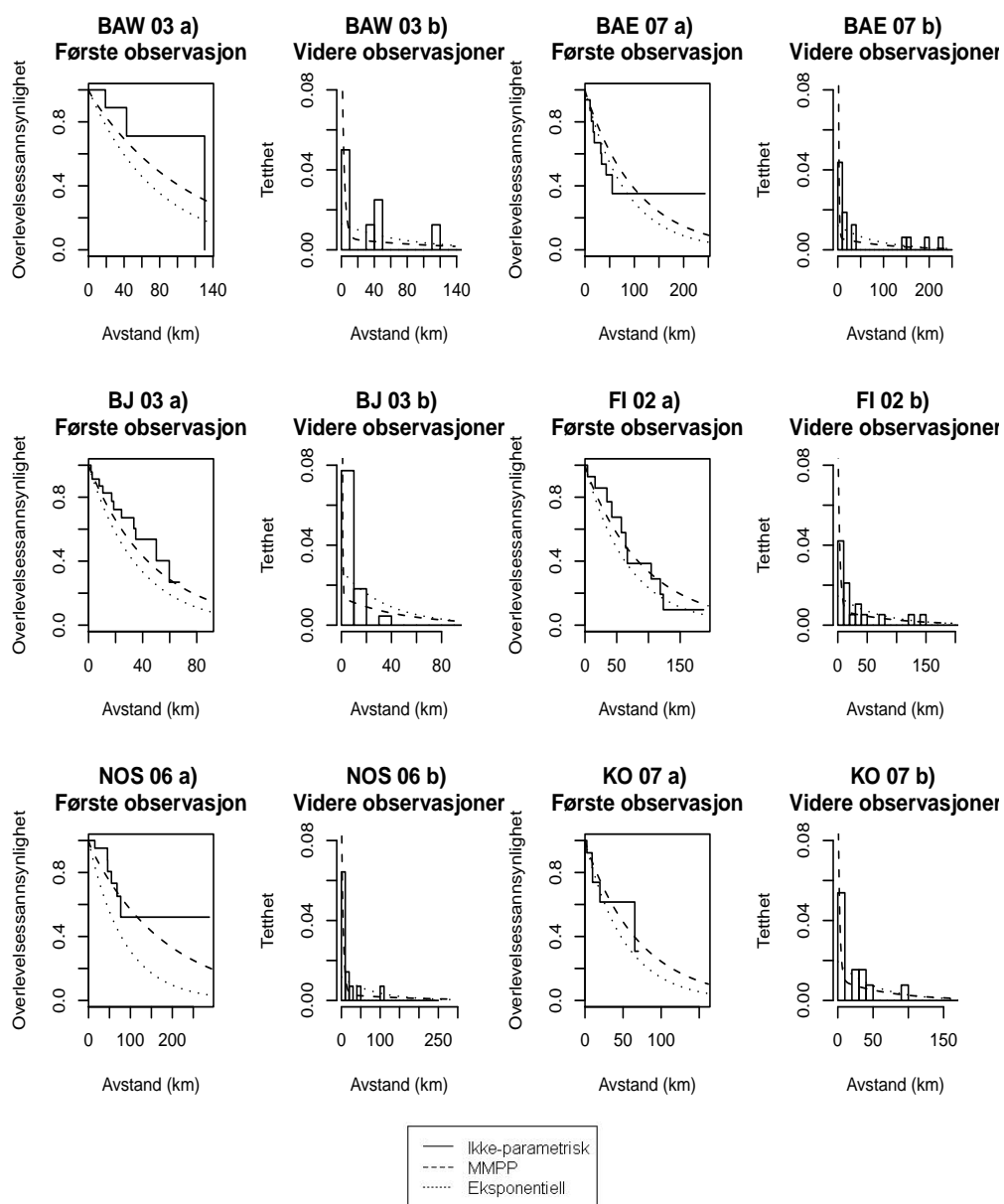
Det er tegnet to plott:

- a) En ikkeparametrisk overlevelsesfunksjonen for venteavstanden til første observasjon, lagt over er linjene for overlevelsesfunksjonen til en MMPP, definert over, og for en Poissonprosess med beregnede parametere. Den ikkeparametriske overlevelsesfunksjonen er beregnet med funksjonen *survfit* i R, hvor høyresensurerte data er inkludert i estimeringen, det er biter hvor en transektlinje er kjørt med avbrutt før en observasjon er oppdaget.
- b) Et histogram for ventetider til påfølgende observasjoner. Over dette plottene er det lagt tetthetsfunksjonen til en Poissonprosess og en MMPP. Disse er beregnet med henholdsvis tettheten til eksponentialfordeling og tettheten $\pi \exp[\mathbf{C}s]\Lambda\mathbf{e}$.

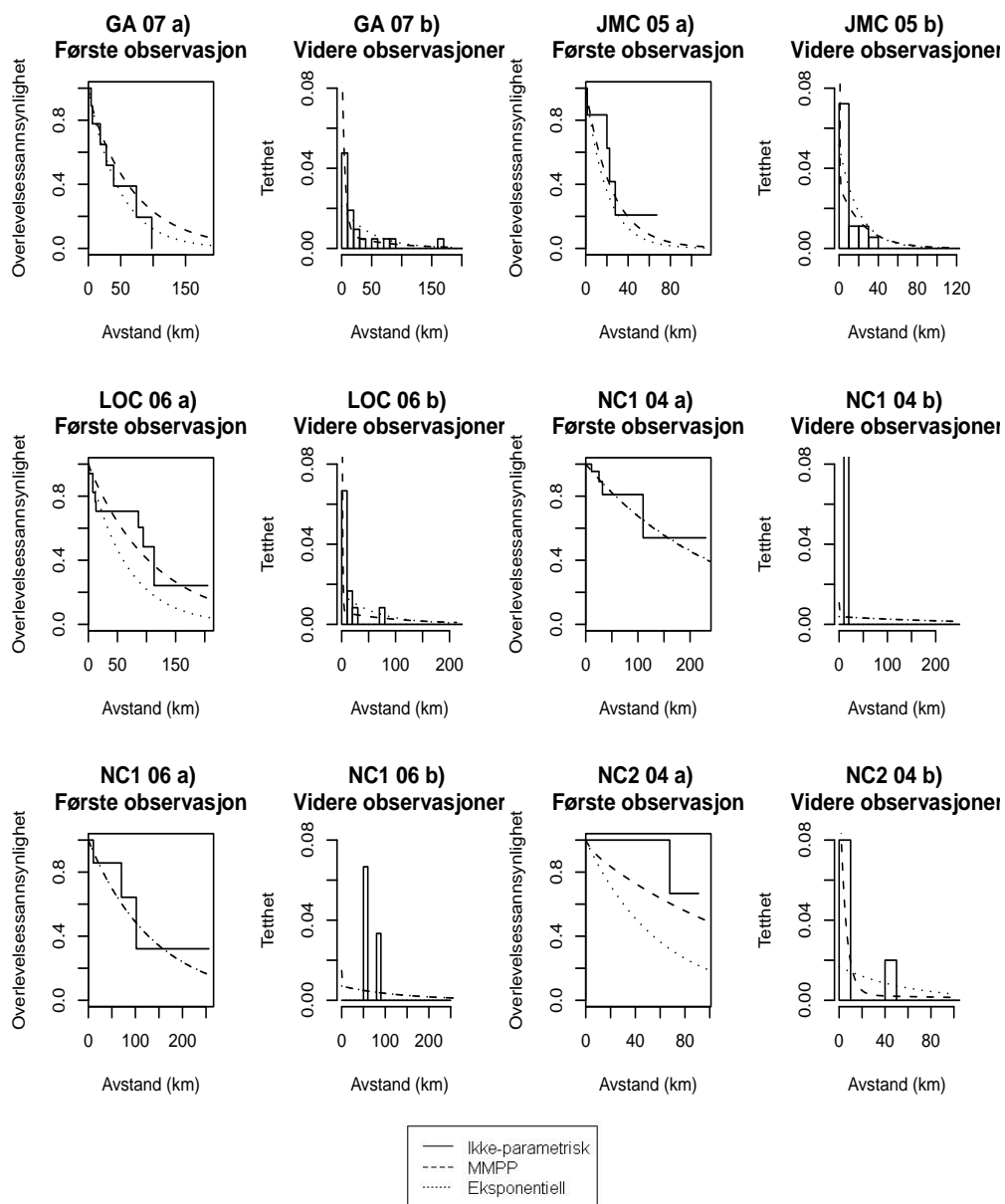
Resultatene er gitt under, først i figur 4.5 på neste side, hvor det er sett på alle observasjonene samlet, og i figur 4.6, 4.7 og 4.8, hvor observasjonene er sett på for hver blokk. Det ses at MMPP-modellen har en bedre tilpasning av observasjonene enn en Poissonprosess.



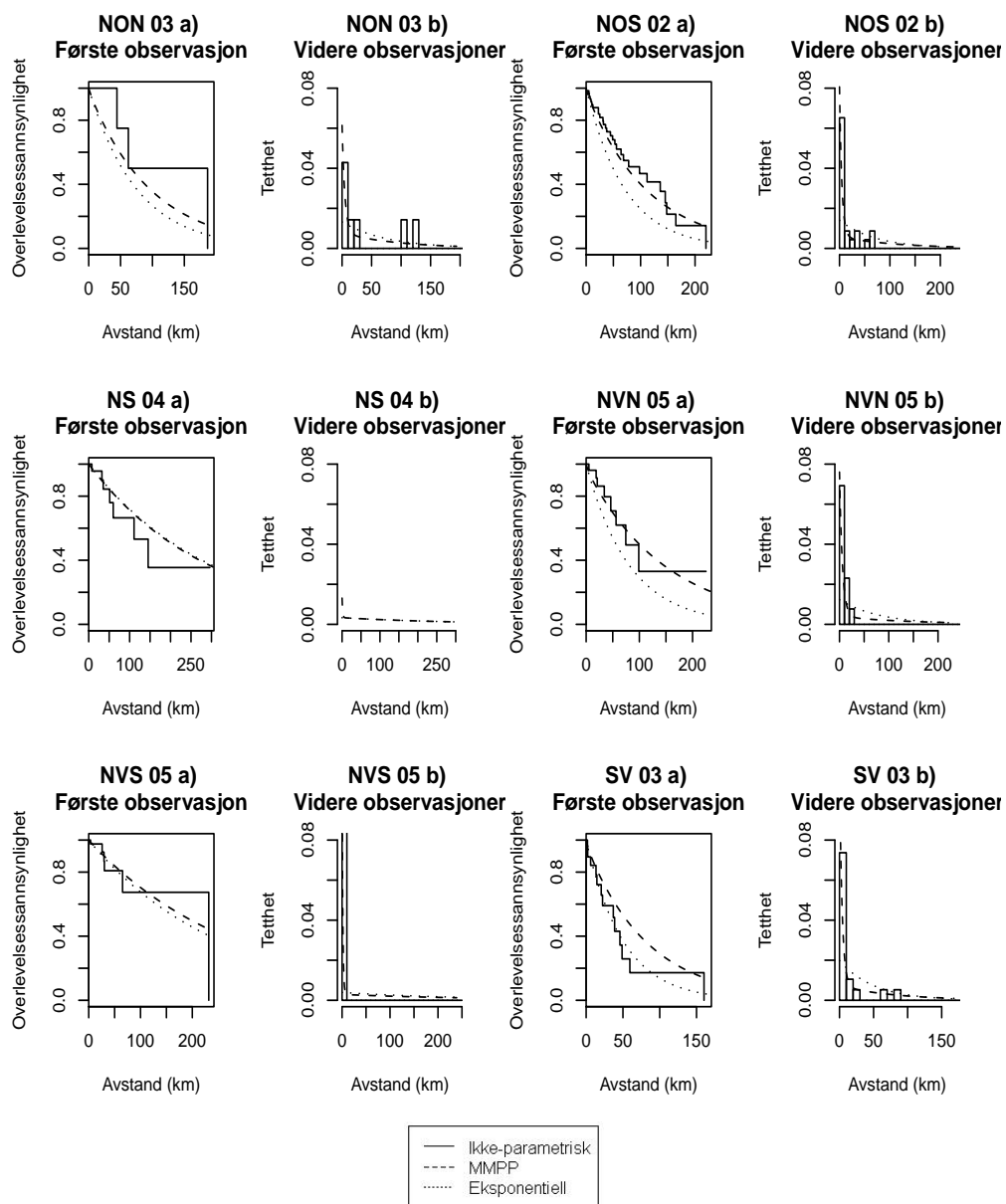
Figur 4.5: Diagnostikk av vågehvaldata for MMPP og IPP, med alle observasjonene for alle blokkene samlet. Figur a) er estimert overlevelses-sannsynlighetsfunksjon til første observasjon og figur b) er et histogram av påfølgende ventetider med beregnede tettheter lagt over.



Figur 4.6: Diagnostikk for MMPP og IPP for blokk 1 til 6. Figur a) er overlevelsesfunksjonen til første venteavstand, og figur b) er histogram av påfølgende ventetider med beregnede tettheter lagt over.



Figur 4.7: Diagnostikk for MMPP og IPP for blokk 7 til 12. Se figur 4.6.



Figur 4.8: Diagnostikk for MMPP og IPP for blokk 13 til 18. Se figur 4.6.

4.5 Estimering av tilstander

Tilstandene skal estimeres innenfor hver blokk med forward-backwardalgoritmen, som i avsnitt 3.3, hvor λ - og μ -verdier hentet fra tabell 4.1 på side 35. I dette avsnittet er det brukt blokknummer, sammenhengen mellom nummer og navn på blokkene er gitt i tabell 4.2 på side 36. Transektlinjen er delt opp i biter med lengde 1 og beregninger av tettheter er gjort i forhold til formel 3.9 på side 31. Det gir følgende overgangssannsynlighetsmatriser (formel 3.10 på side 31), indikert med P_{blokk} (intervallengde),

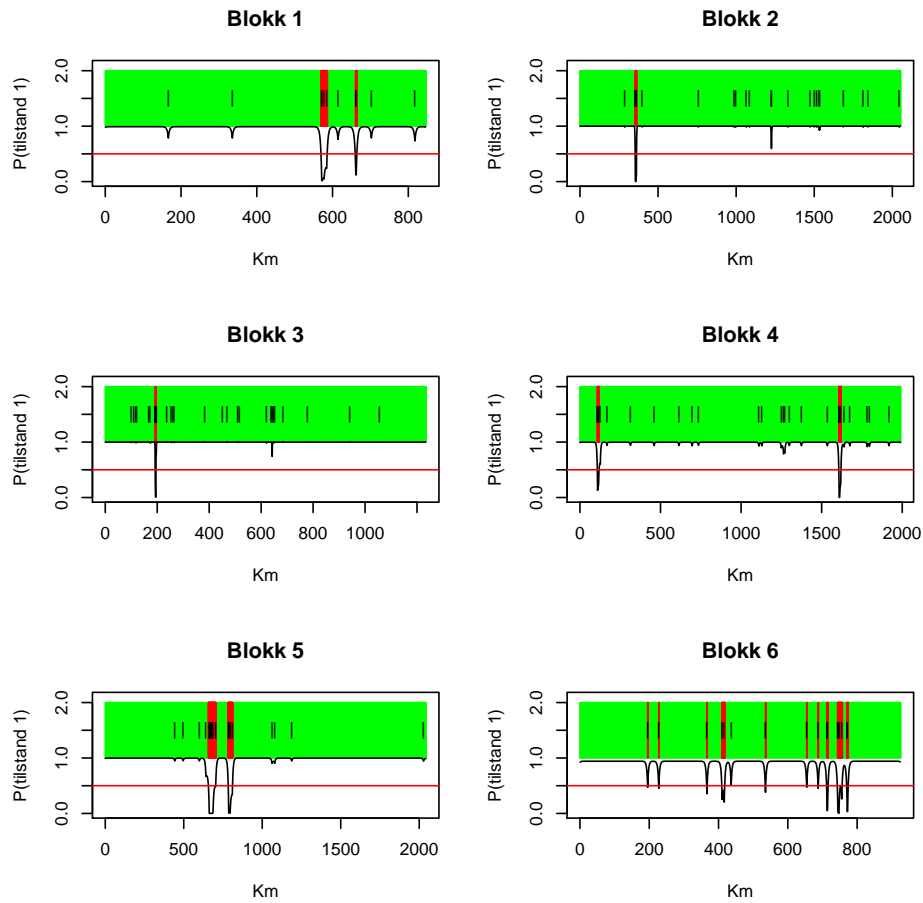
$$\begin{array}{l}
 P_{01}(1) = \begin{bmatrix} 0.9935 & 0.0065 \\ 0.1483 & 0.8517 \end{bmatrix} \quad P_{02}(1) = \begin{bmatrix} 0.9989 & 0.0011 \\ 0.1140 & 0.8860 \end{bmatrix} \quad P_{03}(1) = \begin{bmatrix} 0.9982 & 0.0018 \\ 0.4394 & 0.5606 \end{bmatrix} \\
 P_{04}(1) = \begin{bmatrix} 0.9974 & 0.0026 \\ 0.0934 & 0.9066 \end{bmatrix} \quad P_{05}(1) = \begin{bmatrix} 0.9986 & 0.0014 \\ 0.0457 & 0.9543 \end{bmatrix} \quad P_{06}(1) = \begin{bmatrix} 0.9711 & 0.0289 \\ 0.2350 & 0.7650 \end{bmatrix} \\
 P_{07}(1) = \begin{bmatrix} 0.9946 & 0.0054 \\ 0.0461 & 0.9539 \end{bmatrix} \quad P_{08}(1) = \begin{bmatrix} 0.9720 & 0.0280 \\ 0.9373 & 0.0627 \end{bmatrix} \quad P_{09}(1) = \begin{bmatrix} 0.9988 & 0.0012 \\ 0.2022 & 0.7978 \end{bmatrix} \\
 P_{10}(1) = \begin{bmatrix} 0.9974 & 0.0026 \\ 0.3732 & 0.6268 \end{bmatrix} \quad P_{11}(1) = \begin{bmatrix} 0.9973 & 0.0027 \\ 0.3595 & 0.6405 \end{bmatrix} \quad P_{12}(1) = \begin{bmatrix} 0.9911 & 0.0089 \\ 0.0648 & 0.9352 \end{bmatrix} \\
 P_{13}(1) = \begin{bmatrix} 0.9766 & 0.0234 \\ 0.1159 & 0.8841 \end{bmatrix} \quad P_{14}(1) = \begin{bmatrix} 0.9968 & 0.0032 \\ 0.0651 & 0.9349 \end{bmatrix} \quad P_{15}(1) = \begin{bmatrix} 0.9979 & 0.0021 \\ 0.4363 & 0.5637 \end{bmatrix} \\
 P_{16}(1) = \begin{bmatrix} 0.9968 & 0.0032 \\ 0.0504 & 0.9496 \end{bmatrix} \quad P_{17}(1) = \begin{bmatrix} 0.9963 & 0.0037 \\ 0.3571 & 0.6429 \end{bmatrix} \quad P_{18}(1) = \begin{bmatrix} 0.9965 & 0.0035 \\ 0.0626 & 0.9374 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Resultatet over de 18 blokkene er gitt i figur 4.9, 4.10 og 4.11. Observasjonene er gitt som svarte streker i midten, og bakgrunnsfargen er den estimerte tilstanden til prosessen, hvor grønn betyr lav tilstand og rød høy. Hvilken tilstand som estimeres beregnes ut ifra hvilken av ξ -verdiene som har størst sannsynlighet. Sannsynligheten for at prosessen skal være i tilstand 1 er gitt nederst på hver figur. Er sannsynligheten over 0.5 (rød strek), settes estimert tilstand for gjeldende bit til 1.

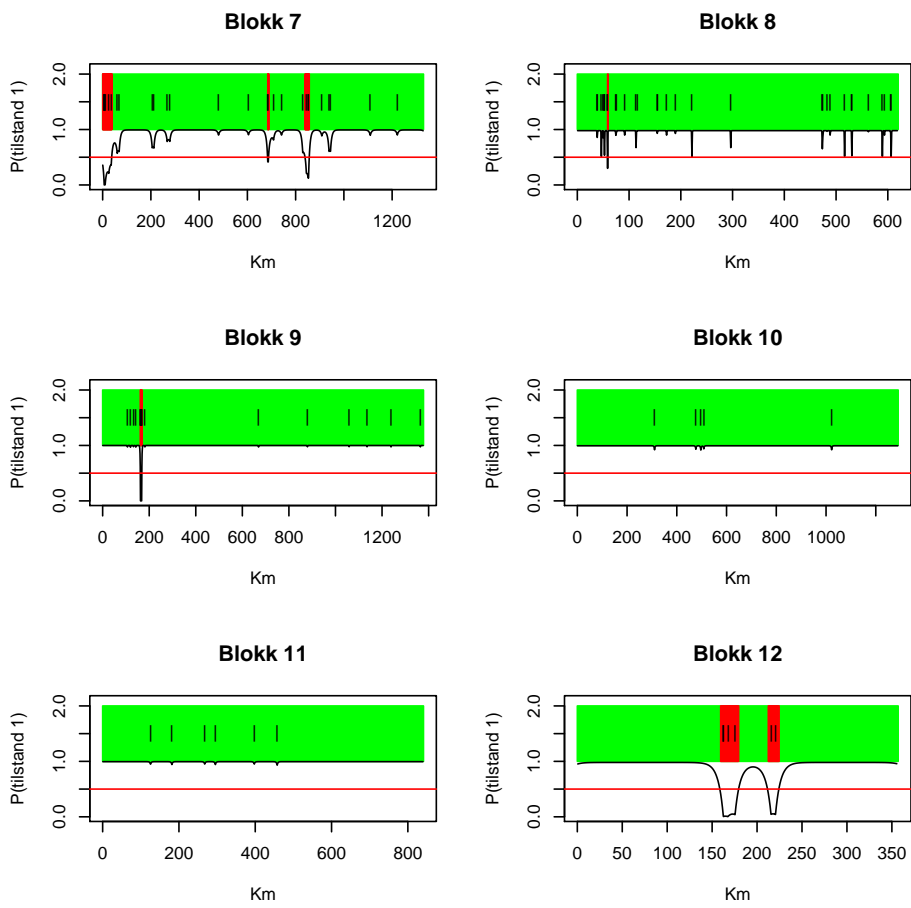
Resultatet viser at 3 av blokkene gir kun estimert tilstand til å være 1, som kan tyde på Poissonprosess. Tabell 4.12 på neste side gir andel av bitene som er estimert til tilstand 1, og på de blokkene hvor denne er lik 1 er også π_1 stor, som er sannsynlighetene for å befinne seg i tilstand 1. Dette kan også ses på ved forholdet μ_2/μ_1 , gitt i siste kolonne, hvor store verdier her gir stor andel tilstand 1. Kolonnen τ i tabell 4.12 på neste side er overdispersjonskoeffisienten som er forholdet mellom variansen og forventningen, hvor en verdi lik 1 indikerer en Poissonprosess. I de tre aktuelle blokkene har alle en τ - verdi nesten lik 1, som kan samsvare med at estimerte tilstander kun er lik 1.

Tabell 4.12: Oversikt over stasjonærfordelingen π til de forskjellige blokkene, beregnet med formel 2.9 på side 13 og μ -verdier fra tabell 4.1 på side 35. Med en bitlengde på 1 gir nest siste kolonne en andel av bitene som er estimert til å være tilstand 1. Siste kolonne er forholdet mellom bytteintensitetene μ_2 og μ_1 , som tilsvarer π_1/π_2 . Parameteren τ er overdispersjonskoeffisient.

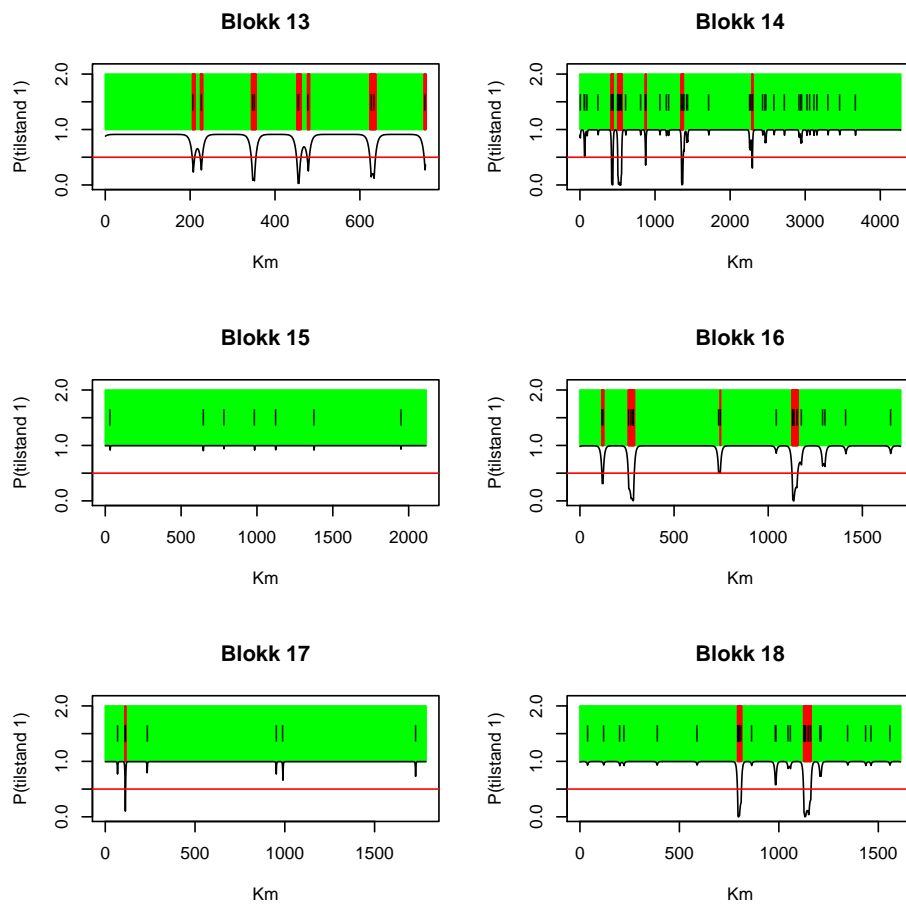
Blokk	L (km)	#obs	π_1	π_2	τ	And. ts. 1	μ_2/μ_1
1	847	11	0,9581	0,0419	4,0366	0,9752	22,8462
2	2055	25	0,9904	0,0096	10,3870	0,9961	103,0819
3	1235	34	0,9960	0,0040	9,3179	0,9976	250,2591
4	1992	29	0,9726	0,0274	4,6376	0,9874	35,5155
5	2045	24	0,9706	0,0294	6,9517	0,9633	33,0588
6	927	18	0,8906	0,1094	2,7473	0,9600	8,1435
7	1331	28	0,8959	0,1041	6,5779	0,9556	8,6021
8	621	32	0,9710	0,0290	2,6154	0,9984	33,4570
9	1378	21	0,9940	0,0060	6,4084	0,9956	166,5243
10	1290	5	0,9932	0,0068	1,0804	1,0000	146,2303
11	841	6	0,9926	0,0074	1,0793	1,0000	134,9878
12	357	6	0,8788	0,1212	4,5537	0,9101	7,2539
13	757	10	0,8320	0,1680	2,6027	0,9272	4,9514
14	4273	60	0,9538	0,0462	4,3755	0,9740	20,6339
15	2115	7	0,9951	0,0049	1,0663	1,0000	204,0259
16	1705	21	0,9395	0,0605	4,6340	0,9571	15,5325
17	1787	7	0,9898	0,0102	1,9719	0,9989	96,5941
18	1614	32	0,9469	0,0531	5,8273	0,9640	17,8242



Figur 4.9: Estimering av tilstander ved vågehvaldata for blokk 1 til 6 med forward-backwardalgoritmen og bit-lengde på 1. Observasjonene er gitt som streker, og estimert tilstand er gitt ved farger, grønn er for lav tilstand og rød for høy. Nederste graf er sannsynligheten for å være i tilstand 1, er den over 0.5 (rød linje) gir estimert tilstand lik 1 og omvendt.



Figur 4.10: Estimerte tilstander for blokk 7 til 12, se figur 4.9.



Figur 4.11: Estimerte tilstander for blokk 13 til 18, se figur 4.9.

5

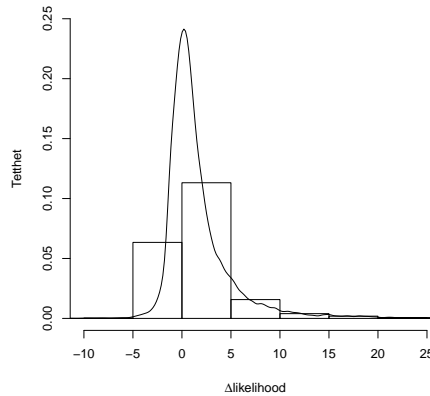
Simuleringer

5.1 Likelihoodsimuleringer

Simuleringer er utført i R for å sjekke metodene og om den negative differansen på likelihoodverdiene i avsnitt 4.2 kan skyldes tilfeldigheter. Data er generert fra en MMPP, forklart i tillegg B. I simuleringene i dette kapitlet er verdier brukt fra tabell 4.1 på side 35. Dette er gjort for å sjekke resultatene på simuleringene opp mot verdiene til hvaldataene. Tabell 5.1 på side 57 gir en oversikt over simuleringene, med sjekk av antall observasjoner som blir trukket mot forventet antall. I dette kapitlet er det brukt nummer på blokkene, hvor sammenhengen mellom blokknavn og blokknummer er gitt i tabell 4.2 på side 36.

Modellene som ble sammenlignet var med og uten tidsvarierende w . Det er utført en generering av observasjoner for begge modellene. Lengden L er delt inn i to deler, 75% og 25% henholdsvis L_{smal} og L_{bred} . Ved den første lengden er satt en stripebredde på 0.1 på observasjonene og ved den andre 0.3, som gir at bred stripe har en faktor på 3 bredere enn smal stripe. Parameterene i Poissonfordelingene, som det er trukket observasjoner fra innenfor et intensitetsområde L_j , er $0,67\lambda_i L_j$ og $2\lambda_i L_j$ på henholdsvis smal og bred område. Tabell 5.2 på side 58 er resultat av estimering av parametere fra genererte observasjoner for både med og uten variasjon i halvstripebredden. Modellen med tidsvariende stripebredde er estimert med verdiene w lik 0,1 og 0,3, mens konstant stripebredde har \hat{w} fra tabellen gjennom hele blokken. Det er kjørt 1000 simuleringer for hver blokk, og ved hver simulering er likelihoodverdien til θ beregnet for begge modellene.

Kolonnen «antall negative» i tabellen gir hvor mange av likelihooddifferansene, med variasjon minus uten variasjon, som er negative. Noen tilfeller er det få negative verdier, og ved noen tilfeller er det en andel på over 50%. Totalt er 5734 av 18000 negative, det gir en andel på 0,32. Figur 5.1 viser et histogram over likelihooddifferansene og tetthet samlet for alle blokkene. I Figur 5.3 på side 60 og 5.4 på side 61 er histogram over likelihooddifferansene plottet separat for alle blokkene.

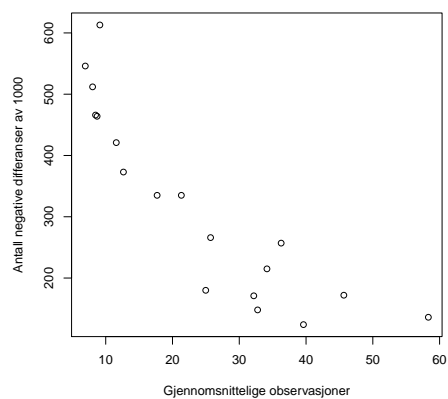


Figur 5.1: Histogram av deltalikelihoodverdiene ved simuleringene (med variasjon minus uten variasjon), 18000 simuleringer med 5734 negative differanser. Beregnet tetthet er lagt over.

For å se nøyere på disse simuleringene, er det satt opp tabell 5.3 på side 59, som har antall negative likelihooddifferanser i synkende rekkefølge. Det er en tendens til at simuleringprogrammet gir flere negative differanser når det er få observasjoner i blokkene.

Tabell 5.1: Antall observasjoner i blokkene og forventningen $\mathbb{E}(n)$, beregnet etter formel 2.12 på side 13. Gjennomsnittelige observasjoner fra 10000 simuleringer er gitt som \bar{n} .

Blokk	Obs.	$\mathbb{E}(n)$	\bar{n}
1	11	11,072	11,1959
2	25	30,727	31,8578
3	34	38,588	39,4806
4	29	30,068	30,3781
5	24	19,318	19,8621
6	18	17,148	17,2421
7	28	33,636	33,4787
8	32	32,437	32,3524
9	21	17,616	18,9124
10	5	5,1321	5,7265
11	6	6,1182	6,7571
12	6	5,4904	6,5413
13	10	10,177	10,4281
14	60	56,941	56,9671
15	7	7,255	7,7086
16	21	19,131	19,1755
17	7	7,4782	7,5937
18	32	31,671	31,743



Figur 5.2: Gjennomsnittelige observasjoner av 1000 simuleringer per blokk plottet mot antall negative likelihooddifferanser, tilsvarende verdier i tabell 5.2 på neste side.

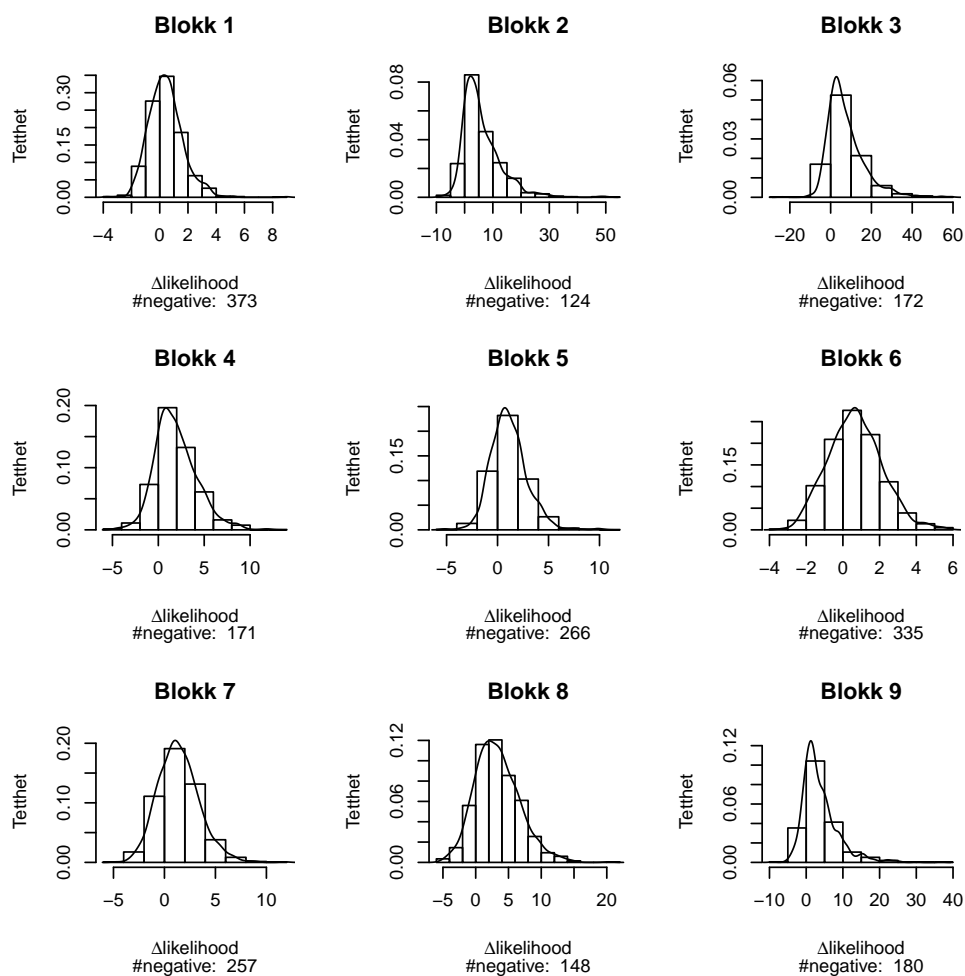
Tabell 5.2: Basert på 1000 simuleringer for hver blokk, med innputtverdier for blokkene hentet fra tabell 4.2 på side 36. Antall negative er hvor mange av simuleringene som fikk negativ likelihooddifferanse, med-variasjon - uten-variasjon. Gjennomsnittelige observasjoner er gitt som \bar{n} , mens \hat{w} er tidsvektet gjennomsnittelig halvstripebredde. Med variasjon har w lik 0,1 eller 0,3 på henholdsvis 25% og 75% av L , mens i modellen med konstant stripebredde er \hat{w} brukt gjennom hele blokken.

Blokk	# neg.	\hat{w}	\bar{n}	Med variasjon i w					
				ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2
1	373	0,1568	12,6520	0,0118	0,5448	0,0455	0,2267	0,0037	0,1709
2	124	0,1524	39,6120	0,0240	0,9589	0,0110	0,1978	0,0073	0,2922
3	172	0,1435	45,6600	0,0447	1,0045	0,0385	0,5510	0,0128	0,2882
4	171	0,1542	32,1730	0,0226	0,6476	0,0258	0,1768	0,0070	0,1998
5	266	0,1502	25,7030	0,0116	0,5632	0,0164	0,0898	0,0035	0,1692
6	335	0,1411	17,6970	0,0102	0,5243	0,0597	0,3254	0,0029	0,1479
7	257	0,1532	36,2720	0,0261	0,5199	0,0148	0,0889	0,0080	0,1593
8	148	0,1517	32,7480	0,0120	0,9457	0,1755	0,8785	0,0036	0,2869
9	180	0,1666	24,9760	0,0184	0,9216	0,0183	0,3080	0,0061	0,3070
10	546	0,1432	6,9410	0,0091	0,1867	0,2023	0,2236	0,0026	0,0535
11	512	0,1510	8,0340	0,0148	0,1882	0,1420	0,1799	0,0045	0,0569
12	613	0,1468	9,1230	0,0140	0,5182	0,0844	0,2183	0,0041	0,1521
13	421	0,1582	11,5800	0,0100	0,3343	0,0695	0,2118	0,0032	0,1058
14	136	0,1484	58,3170	0,0202	0,5013	0,0074	0,0900	0,0060	0,1488
15	464	0,1472	8,7090	0,0069	0,1355	0,2504	0,2173	0,0020	0,0399
16	335	0,1485	21,3270	0,0108	0,3918	0,0201	0,0993	0,0032	0,1164
17	466	0,1469	8,4760	0,0051	0,4411	0,1499	0,3788	0,0015	0,1296
18	215	0,1486	34,1460	0,0247	0,6367	0,0193	0,1285	0,0073	0,1892

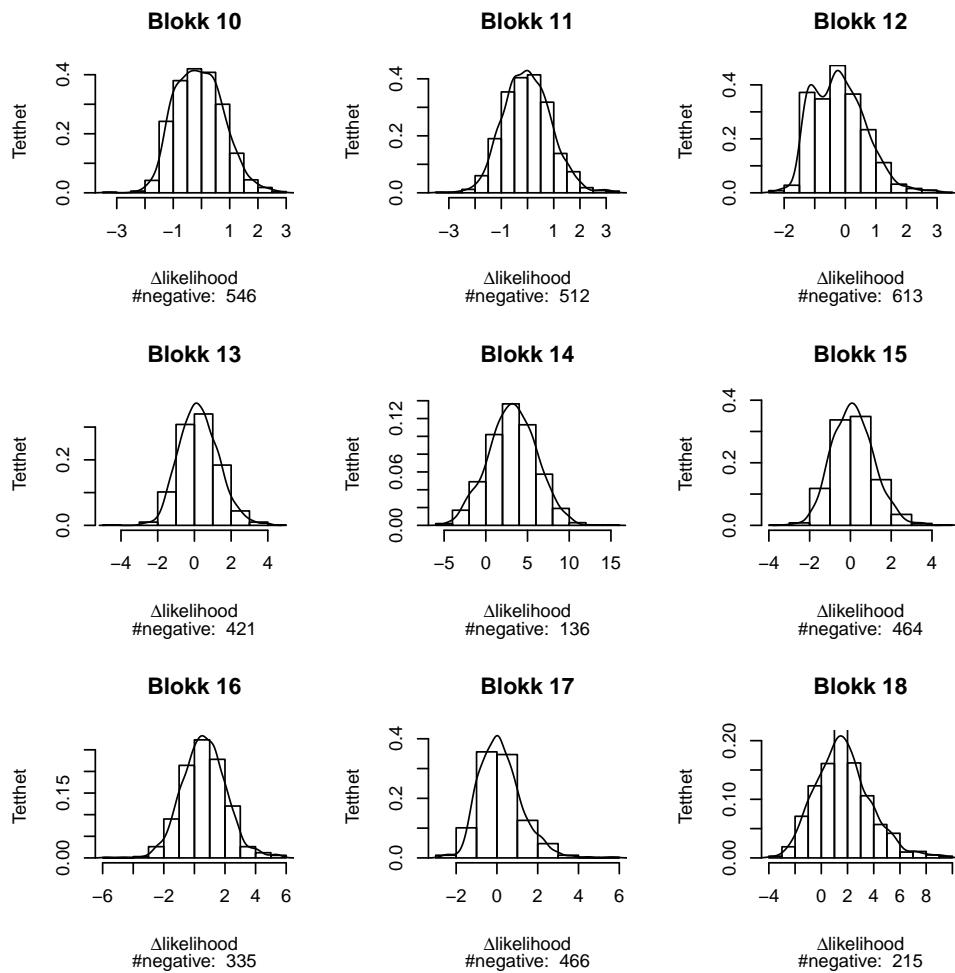
Blokk	Uten variasjon i w					
	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2
1	0,0115	0,5763	0,0459	0,2081	0,0036	0,1807
2	0,0230	0,9395	0,0089	0,1771	0,0070	0,2863
3	0,0409	0,9906	0,0301	0,4845	0,0117	0,2842
4	0,0216	0,6889	0,0191	0,1525	0,0067	0,2125
5	0,0119	0,6865	0,0132	0,0838	0,0036	0,2063
6	0,0129	0,6099	0,0458	0,3035	0,0036	0,1721
7	0,0280	0,6528	0,0125	0,0735	0,0086	0,1999
8	0,0131	0,9472	0,1500	0,7906	0,0040	0,2874
9	0,0175	0,9046	0,0153	0,2854	0,0058	0,3013
10	0,0086	0,1641	0,2125	0,2127	0,0025	0,0470
11	0,0137	0,1799	0,1201	0,1662	0,0041	0,0543
12	0,0135	0,5490	0,0745	0,2027	0,0040	0,1612
13	0,0108	0,3701	0,0688	0,1950	0,0034	0,1171
14	0,0202	0,6094	0,0053	0,0830	0,0060	0,1809
15	0,0066	0,1159	0,2789	0,2064	0,0019	0,0341
16	0,0116	0,5008	0,0191	0,0943	0,0035	0,1487
17	0,0048	0,4194	0,1740	0,3568	0,0014	0,1232
18	0,0243	0,7052	0,0135	0,1093	0,0072	0,2096

Tabell 5.3: Antall negative i hver blokk etter 1000 simuleringer og gjennomsnittelige observasjoner (\bar{n}). Forventning med og uten variasjon i w , og forholdet for overdispersasjon. Tilslutt er det Δ likelihood, fra tabell 4.2 på side 36, beregnet fra vågehvaldataene.

# negative	blokk	\bar{n}	$\mathbb{E}(n)_{med}$	$\mathbb{E}(n)_{uten}$	τ_{med}/τ_{uten}	Δ lik
613	12	9,1230	9,9602	10,6593	0,7911	0,3917
546	10	6,9410	6,5165	6,2799	1,2018	0,1295
512	11	8,0340	7,5404	7,4357	1,0326	-0,6628
466	17	8,4760	7,8211	7,7985	0,7691	0,1006
464	15	8,7090	8,1174	7,9784	1,0256	-1,6746
421	13	11,5800	11,1406	11,4397	0,7213	-1,1960
373	1	12,6520	12,2267	12,4871	0,7433	0,1652
335	6	17,6970	17,0726	17,1961	0,7015	1,3880
335	16	21,3270	20,4936	22,1520	0,6069	0,2240
266	5	25,7030	24,5491	27,0166	0,6468	1,0890
257	7	36,2720	34,6350	36,5611	0,6006	-2,6690
215	18	34,1460	32,6080	33,0945	0,7303	1,2160
180	9	24,9760	18,3854	18,2185	0,8349	1,5424
172	3	45,6600	31,4866	31,2140	0,7368	-2,3020
171	4	32,1730	30,6444	30,8415	0,6810	-3,3770
148	8	32,7480	28,8579	28,2283	0,7030	-0,2830
136	14	58,3170	57,3449	57,5920	0,7382	1,3360
124	2	39,6120	29,8216	29,6642	0,8466	-0,1120



Figur 5.3: Histogram av Δ likelihoodverdier for de 9 siste blokkene. Det er utført 1000 simuleringer per blokk, hvor L , λ og μ er brukt fra tabell 4.2 på side 36. Lengden L er delt inn i to deler på 75% og 15%, med stripebredde på henholdsvis 0,1 og 0,3. Simuleringene er kjørt med både en tidsvarierende stripebredde og en konstant (gjennomsnittelig) stripebredde, hvor Δ likelihood er differansen. Antall negative er hvor mange av 1000 differanser som er mindre enn 0 (best tilpasning med konstant stripebredde). Beregnet tetthetsfunksjon er lagt over.



Figur 5.4: Histogram av Δ likelihoodverdier for de 9 første blokkene, se figur 5.3.

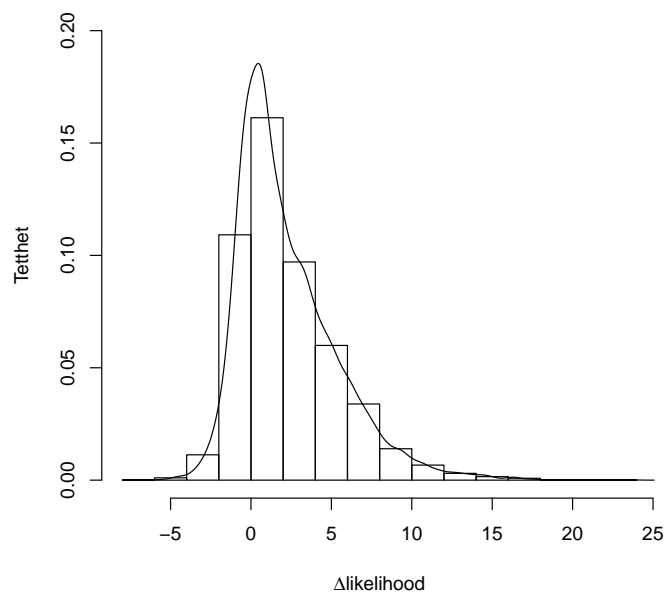
5.2 IPP simuleringer

De samme type simuleringer er også utført for en IPP som ble gjort for MMPP i avsnitt 5.1. Resultatet at likelihooden var større for en modell med konstant stripebredde enn tidsvarierende i noen blokker, opptrådte også for ved en inhomogen Poissonprosess, avsnitt 4.3. Det er kjørt simuleringer for å sjekke om det kan være tilfeldigheter, og om de samme resultatene kommer som under simuleringene til MMPP.

Parameterne brukt i simuleringene er de som ble estimert ved en IPP på hvaldataene som i tabell 4.9 på side 42. En sjekk på simuleringene er satt opp i tabell 5.4, hvor forventet antall observasjoner innenfor hver blokk er sammenlignet med antall trukket observasjoner. Forventningen er regnet ut ved å multiplisere sammen lengden L med verdien λ_{pois} for den blokken.

Tabell 5.4: Simulerte observasjoner og forventninger ved en inhomogen Poissonprosess. Forventningen er $L\lambda$. Verdien \bar{n} er gjennomsnittelig antall simulerte observasjoner i blokkene ved 1000 simuleringer.

Blokk	$\mathbb{E}(n)$	\bar{n}
1	10,9995	11,0780
2	25,0005	25,1760
3	34,0005	34,0250
4	28,9993	29,0860
5	24,0006	24,2170
6	17,9990	18,1390
7	27,9987	28,0400
8	32,0023	31,6720
9	20,9997	20,9750
10	5,0000	5,0050
11	5,9999	6,1010
12	6,0001	6,0230
13	10,0000	10,0190
14	60,0023	60,1650
15	7,0001	7,0020
16	20,9996	21,1590
17	6,9999	6,9520
18	31,9993	31,8370



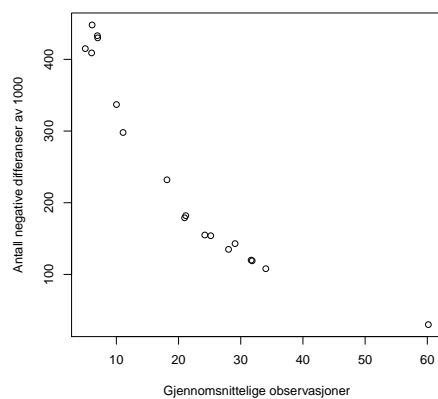
Figur 5.5: Histogram av Δ likelihoodverdier, samlet for alle blokkene, ved en inhomogen Poissonprosess. Differansen er mellom en modell med varierende stripebredde og en modell med konstant stripebredde. 18000 simuleringer med 4327 negative differanser. Beregnet tetthet er lagt over.

Tabell 5.5: Estimerte parametere ved en inhomogen Poissonprosess, gjennomsnitt av 1000 simuleringer. Innputtverdien er λ_{pois} , estimert i avsnitt 4.3. To modeller er estimert, en med tidsvarierende og en med konstant stripebredde, henholdsvis λ_{med} og λ_{uten} . Tidsvarierende stripebredde har w lik 0,1 på 75% av transektlinjen og 0,3 på 25%, mens konstant har tidsvektet gjennomsnitt \hat{w} gjennom hele blokken.

Blokk	λ_{pois}	$\hat{\rho}_{med}$	$\hat{\rho}_{uten}$	\hat{w}	$\hat{\lambda}_{med}$	$\hat{\lambda}_{uten}$
1	0,0130	0,0413	0,0413	0,1525	0,0126	0,0126
2	0,0122	0,0399	0,0399	0,1508	0,0120	0,0120
3	0,0275	0,0903	0,0903	0,1505	0,0272	0,0272
4	0,0146	0,0477	0,0477	0,1506	0,0144	0,0144
5	0,0117	0,0386	0,0386	0,1508	0,0116	0,0116
6	0,0194	0,0630	0,0630	0,1516	0,0191	0,0191
7	0,0210	0,0685	0,0685	0,1512	0,0207	0,0207
8	0,0515	0,1670	0,1670	0,1506	0,0503	0,0503
9	0,0152	0,0495	0,0495	0,1505	0,0149	0,0149
10	0,0039	0,0126	0,0121	0,1625	0,0041	0,0039
11	0,0071	0,0223	0,0219	0,1584	0,0071	0,0069
12	0,0168	0,0518	0,0510	0,1557	0,0161	0,0159
13	0,0132	0,0417	0,0416	0,1530	0,0127	0,0127
14	0,0140	0,0464	0,0464	0,1504	0,0140	0,0140
15	0,0033	0,0104	0,0102	0,1554	0,0032	0,0032
16	0,0123	0,0402	0,0402	0,1510	0,0121	0,0121
17	0,0039	0,0120	0,0119	0,1552	0,0037	0,0037
18	0,0198	0,0646	0,0646	0,1504	0,0194	0,0194

Tabell 5.6: Resultater etter IPP-simuleringen med gjennomsnittelige observasjoner \bar{n} og hvor mange negative likelihooddifferanser som opptrådte etter 1000 simuleringer i hver blokk.

Blokk	L	λ_{pois}	\bar{n}	# neg.
1	847	0,0130	11,0780	298
2	2055	0,0122	25,1760	154
3	1235	0,0275	34,0250	108
4	1992	0,0146	29,0860	143
5	2045	0,0117	24,2170	155
6	927	0,0194	18,1390	232
7	1331	0,0210	28,0400	135
8	621	0,0515	31,6720	120
9	1372	0,0152	20,9750	179
10	1290	0,0039	5,0050	415
11	841	0,0071	6,1010	448
12	357	0,0168	6,0230	409
13	757	0,0132	10,0190	337
14	4273	0,0140	60,1650	30
15	2115	0,0033	7,0020	430
16	1705	0,0123	21,1590	182
17	1787	0,0039	6,9520	433
18	1614	0,0198	31,8370	119



Figur 5.6: Gjennomsnittelige observasjoner i simuleringene plottet mot antall negative likelihooddifferanser, tilsvarende verdier som i tabell 5.6 på side 65.

6

Diskusjon og konklusjon

Et viktig mål i denne oppgaven har vært å undersøke den overraskende observasjonen at en konstant halvstripebredde gir bedre tilpasning av data enn en tidsvarierende halvstripebredde. Stripebredden vil påvirke dyretettheten og i avsnitt 4.2 viste vi at parameterestimeringen i 8 av 18 blokker gir høyere likelihood med konstant stripebredde. Likelihoodverdiene for begge modellene er satt opp i tabell 4.2 på side 36, og vi så på hva forklaringen kunne være.

En sammenheng er estimatet av overdispersjonskoeffisienten τ , definert som $\text{Var}(n)/\mathbb{E}(n)$, gitt for begge modellene i tabell 4.3 på side 37. Forholdet τ_{med}/τ_{uten} har et samsvar med likelihooddifferansene, vist i figur 4.2, hvor store verdier av dette forholdet tilsvarer store negative differanser i likelihooden, med en synkende tendens ettersom $\Delta\text{likelihood}$ øker. Denne koeffisienten forteller om grad av klynge, og dette samsvaret viser at modellen med lavest klyngetetthet har høyest likelihood.

Tabell 4.7 på side 41 viser en sammenheng mellom likelihooddifferansene og differansene i forventningene, $\mathbb{E}(n)_{med}$ minus $\mathbb{E}(n)_{uten}$. Dette er vist i figur 4.3 på side 40, hvor modellen med lavest forventning gir lavest likelihoodverdi. Ved lik varians, vil høy $\mathbb{E}(n)$ gi liten τ , så blokkene med lavest forventning og i tillegg lavest overdispersjonskoeffisient, har tilsvarende høy varians. Tabellen viser også forskjellen mellom forventningen og antall observasjoner i de to modellene. De tre blokkene hvor konstant w ga markant høyere likelihood, er forventningen til modellen med varierende w overestimert i forhold til antall observasjoner, mens modellen med konstant stripebredde er det liten forskjell. Ved nederste blokk i

tabellen (LOC 06) er dette forholdet motsatt, $\mathbb{E}(n)_{med}$ underestimeres i forhold til antall observasjoner og $\mathbb{E}(n)_{uten}$ nært antall observasjoner. I denne blokken har allikevel modellen med tidsvarierende w den beste tilpasningen. Det er ikke en styrke for de estimerte parameterne når estimert forventning avviker en del fra antall observasjoner. Sum av kvadratavvik mellom estimert forventning og observasjoner, delt på 17, er 7,92 og 2,37 for henholdsvis med variasjon og uten variasjon.

I avsnitt 4.3 estimerte vi en inhomogen Poissonprosess på de samme observasjonene. Tabell 4.11 på side 44 sammenligner deltalikelihoodverdier for både MMPP og IPP, og de er plottet mot hverandre i figur 4.4. Denne seksjonen viser at samme funnet skjer ved en IPP, hvor det ikke er bytteintensiteter og blir kun estimert en λ per blokk. Siden det samme opptrådte for en enklere modell er det ikke grunn til å tro at antagelsen om at vågehvaldata følger en MMPP er feil.

For å undersøke videre så vi på simuleringer i avsnitt 5.1 med genererte data utifra tidligere estimerte parametere. Det er gjort 1000 simuleringer for hver blokk, hvor estimerte verdier er et gjennomsnitt av alle simuleringene. I tabell 5.3 på side 59 er antall negative differanser mellom modellen (av 1000) listet opp, sammen med blant annet gjennomsnittelige observasjoner og Δ lik for vågehvaldata. Det er ikke noe klart samsvar mellom hvilke blokker som har stor andel med antall negative differanser i simuleringene og hvilke som har negativ differanse for vågehvaldata. Det viser at flere gjennomsnittelige observasjoner i simuleringene gir mindre antall negative likelihooddifferanser. Dette er et fornuftig resultatet, ettersom få observasjoner gir større usikkerhet, dette er plottet i figur 5.2 på side 57.

Summen av likelihoodverdiene til alle blokke for begge modellene er -1747,86 og -1743,17 på henholdsvis modellen med variasjon og uten variasjon. I simuleringene, avsnitt 5.1, var det totalt en andel på 0,32 av negative differanser (5734 av 18000), som styrker antagelsen om det skyldes tilfeldigheter.

Tilslutt er samme simuleringer utført i avsnitt 5.2 for en IPP, hvor det gir samme resultat som i avsnitt 5.1, antall negative differanser av 1000 synker fort etter antall gjennomsnittelige genererte observasjoner øker.

Til tross for at konklusjonene ikke er helt entydige, tyder de foregående resultatene her at det kan være tilfeldigheter på grunn av få observasjoner. Selv om de tre blokkene med størst negativ Δ likelihood ikke var de med færrest observasjoner, viser simuleringene til de tre blokkene at mellom 17% og 25% av iterasjonene gir negativ likelihooddifferanse.

Et annet mål for denne oppgaven har vært å estimere tilstandene til en MMPP ved å lage en diskret skjult Markovmodell, utført i avsnitt 4.5. Dette ble gjort ved å dele opp transektlinjen i små biter og estimere tilstanden til hver av bitene.

Et simuleringseksempel ble gitt avsnitt 3.3 med gode estimeringsresultater. Resultatene til de estimerte tilstanden for alle blokkene er gitt i figur 4.9, 4.10 og 4.11. Tre av blokkene ble estimert til kun å oppholde seg i tilstand 1, blokk 10 (NC1 04), 11 (NC1 06) og 15 (NS 04). Disse tre blokkene har også en τ -verdi nesten lik 1, som indikerer en Poissonprosess. Likelihoodverdiene for disse blokkene, både for MMPP og IPP, er gitt i tabell 4.10 på side 43. Her er likelihoodverdien et hakk høyere for Poissonmodellen, noe som ikke skal inntreffe siden en Poissonprosess er inneholdt i MMPP, hvilket kan tyde på at det er en liten estimeringsfeil eller liten feil i programmet som blir brukt i optimeringen. Differansen er uansett veldig liten. Disse resultatene gjør at observasjonene i de tre blokkene like gjerne kan følge en Poissonprosess som en MMPP.



Utledninger

A.1 Overgangssannsynligheter.

Overgangssannsynlighetene $P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$ utledes her, hvor $X(t)$ er en kontinuerlig Markovprosess med stasjonære overgangssannsynligheter og N diskrete tilstander. Utledningen kommer ved å se på framover Kolmogorov differensialligningene (Taylor og Karlin, 1998, side 361)

$$\begin{aligned}P'_{i0}(t) &= -\lambda_0 P_{i0}(t) + \mu_1 P_{i1}(t) \\P'_{ij}(t) &= \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) \\P_{ij}(0) &= \delta_{ij},\end{aligned}$$

hvor λ_i og μ_i er fra den infinitesimale generatoren for en fødsels- og dødsprosess gitt ved formel 2.7 på side 11. For en MMPP med to tilstander $1 \leq i, j \leq 2$, blir de

$$\begin{aligned}P'_{i1}(t) &= -\mu_1 P_{i1}(t) + \mu_2 P_{i2}(t), \\P'_{i2}(t) &= \mu_1 P_{i1}(t) - \mu_2 P_{i2}(t), \\P_{ij}(0) &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Eller slått sammen

$$\begin{aligned} P'_{ij}(t) &= (-1)^j \mu_1 P_{i1}(t) + (-1)^{j-1} \mu_2 P_{i2}(t) \\ &= \sum_{k=1}^2 (-1)^{kj} \mu_k P_{ik}(t), \\ P_{ij}(0) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Skrevet ut

$$\begin{aligned} P'_{11}(t) &= -\mu_1 P_{11}(t) + \mu_2 P_{12}(t), \\ P'_{12}(t) &= \mu_1 P_{11}(t) - \mu_2 P_{12}(t), \\ P'_{21}(t) &= -\mu_1 P_{21}(t) + \mu_2 P_{22}(t), \\ P'_{22}(t) &= \mu_1 P_{21}(t) - \mu_2 P_{22}(t). \end{aligned}$$

De kan settes opp på matriseform $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$. For å finne et eksplisitt uttrykk brukes det at løsningen av denne er $\exp[\mathbf{Q}t] = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n t^n}{n!}$ (avsnitt A.4), og ved å ta i bruk relasjonen $\mathbf{Q}^n = \{-(\mu_1 + \mu_2)\}^{n-1} \mathbf{Q}$ (Taylor og Karlin, 1998, side 397).

Viser først denne relasjonen ved induksjon. Første steg, for $n = 2$ gir det:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} * \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 & -\mu_1^2 - \mu_1 \mu_2 \\ -\mu_1 \mu_2 - \mu_2^2 & \mu_1 \mu_2 + \mu_2^2 \end{bmatrix} \\ &= -(\mu_1 + \mu_2) \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} = -(\mu_1 + \mu_2) \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Antar videre at $\mathbf{Q}^{n-1} = (-(\mu_1 + \mu_2))^{n-2} \mathbf{Q}$ gjelder og viser neste steg.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^n &= \mathbf{Q}^{n-1} \mathbf{Q} = \{-(\mu_1 + \mu_2)\}^{n-2} \mathbf{Q} \mathbf{Q} = \{-(\mu_1 + \mu_2)\}^{n-2} \{-(\mu_1 + \mu_2)\} \mathbf{Q} \\ &= \{-(\mu_1 + \mu_2)\}^{n-1} \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

hvilket fullfører induksjonen.

Innsatt i løsningen for $\mathbf{P}(t)$ gir følgende uttrykk.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(t) &= \exp[\mathbf{Q}t] \\
 &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n t^n}{n!} \\
 &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-(\mu_1 + \mu_2)\}^{n-1} \mathbf{Q} t^n}{n!} \\
 &= I + \frac{1}{-(\mu_1 + \mu_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{-(\mu_1 + \mu_2)t\}^n \mathbf{Q}}{n!}
 \end{aligned}$$

hvor leddet i summen opphøyd i n 'te er en skalar og bruk av

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= e^x - 1 \text{ gir} \\
 &= I - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} [e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} - 1] \mathbf{Q} \\
 &= I + \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{Q} e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}.
 \end{aligned}$$

Løsningen slått sammen til én matrise vil da gi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_2 + \mu_1 e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_1 (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})}{\mu_2 + \mu_1} \\ \frac{\mu_2 (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t})}{\mu_2 + \mu_1} & \frac{\mu_2 + \mu_1 e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}}{\mu_2 + \mu_1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A.2 Derivasjon og integrasjon av matriseeksponential.

Matriseeksponentialen er definert som

$$\exp(Ax) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i x^i}{i!} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i x^i}{i!}.$$

Derivasjon

Derivasjon av denne matriseeksponentialen gir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \exp(Ax) &= 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iA^i x^{(i-1)}}{i!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i x^{(i-1)}}{(i-1)!} \\ &= A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{(i-1)} x^{(i-1)}}{(i-1)!} \\ &= A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^{(i)} x^{(i)}}{i!} = A \exp(Ax).\end{aligned}$$

Integrasjon

Skal beregne det bestemte integralet av matriseeksponentialen

$$\int_0^x \exp[Au] du.$$

Ser først på det ubestemte integralet.

$$\begin{aligned}\int \exp(Au) du &= \int \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i u^i}{i!} du \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int \frac{A^i u^i}{i!} du \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i u^{(i+1)}}{i!(i+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^{-1} A A^i u^{(i+1)}}{(i+1)!} \\ &= A^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^{(i+1)} u^{(i+1)}}{(i+1)!} \\ &= A^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j u^j}{j!} \\ &= A^{-1} (\exp(Au) - I).\end{aligned}$$

Dette gir at det bestemte integralet blir lik

$$\int_0^x \exp[Au] du = A^{-1}(\exp(Ax) - I) - A^{-1}(I - I) = A^{-1}(\exp(Ax) - I),$$

siden $\exp(A0) = I$.

A.3 Utledning av differensialligningen $H'(t) = H(t)C$.

Utledningen av matrisen $F(x)$, definert i formel 2.27 på side 20, er gjort for en MMPP med to tilstander. Dette gjøres ved å bestemme $F'(x)$ ved Chapman-Komogorov ligninger og løse disse. Første steg er å definere en H_{ij} variabel for å betegne MMPP i tidsrommet $(0, t]$. La $N(t)$ være en telleprosess for antall hendelser i intervallet $(0, t]$ og $J(t)$ tilstanden ved tid t , da er H_{ij} definert som (Meier-Hellstern, 1987)

$$H_{ij}(t) = P(J(t) = j, N(t) = 0 | J(0) = i). \quad (\text{A.2})$$

Dette er sannsynligheten for en overgang fra tilstand i ved tid 0 til tilstand j ved tid t , samt for at det ikke har opptrådt noen hendelser i tidsrommet. Argumentet for $N(t) = 0$, er at i definisjonen av $F(x)$ skal det ikke være noen observasjoner i intervallet S_k , hvor dette intervallet er mindre enn eller lik x . Ligningene for den deriverte er

$$H'_{ij}(t) = -H_{ij}(\mu_j + \lambda_j) + \sum_{k=1, k \neq j}^2 H_{ij}(t) \mu_{kj}(t), \quad (\text{A.3})$$

for $t > 0$, og $H'_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Verdien til δ_{ij} er definert til 1 hvis $i = j$ og 0 hvis $i \neq j$.

Utledningen av disse ligningene følger av Chapman-Kolmogorov ligningene som er definert som er definert ved (Taylor og Karlin, 1998, side 356)

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(h). \quad (\text{A.4})$$

Denne sier at en overgang i en prosess fra tilstand i til j i tiden $t+h$, kan uttrykkes først ved overgang fra i til en tilstand k i løpet av tiden t , og videre fra k til j ved resterende tiden h .

Beregner videre $H_{ij}(t+h)$ for en to-tilstands MMPP som gir $1 \leq i, j \leq 2$. For $i = j = 1$ vil $H_{11}(t+h) = P(J(t+h) = 1, N(t+h) = 0 | J(0) = 1)$, det vil

si at prosessen skal være i tilstand 1 ved begge tidspunktene, men ved tid t kan den fortsatt være i tilstand 1 eller innom tilstand 2. Det betyr at $k = 1, 2$ i Chapman-kolmogorov ligningene som gir

$$\begin{aligned} H_{ij}(t+h) &= \sum_{k=1}^{k=2} H_{ik}(t)H_{kj}(h) \\ &= \sum_{k=1}^{k=2} P(J(t) = k, N(t) = 0 | J(0) = i) P(J(h) = j, N(h) = 0 | J(0) = k). \end{aligned}$$

Skrevet ut gir dette

$$H_{ij}(t+h) = H_{11}(t)(1 - \mu_1 h)(1 - \lambda_1 h) + H_{12}(t)(\mu_2 h)(1 - \lambda_2 h).$$

Det første leddet på høyre side er muligheten for at prosessen er i tilstand 1 ved tid t , og de to parentesene gir hva som skjer i tiden h . Den første er at prosessen skal fremdeles oppholde seg i tilstand 1, og den andre er ingen observasjoner. Det andre leddet gir tilsvarende, ved at prosessen er innom tilstand 2 ved tid t for videre å gå ned til tilstand 1 igjen, samt ingen observasjoner i denne perioden. Variabelen μ_1 er en overgang fra tilstand 1 til 2, mens μ_2 er fra 2 til 1, og λ_i er observasjonsintensiteten til den tilhørende tilstanden, som indikert i figur 2.2 på side 12 i avsnitt 2.2. Høyresiden av forrige ligning ganges ut og gir

$$H_{11}(t) - (\lambda_1 + \mu_1)hH_{11}(t) + o(h^2) + H_{12}(t)\mu_2 h + o(h^2),$$

hvor $o(h^2)$ er restledd av orden h^2 , og $o(h)/h = o(h^2)/h = 0$, når h går mot null (Taylor og Karlin, 1998, side 334).

Flytter $H_{11}(t)$ over på venstre sider og deler på h som gir

$$\frac{H_{11}(t+h) - H_{11}(t)}{h} = \frac{-H_{11}(t)(\lambda_1 + \mu_1)h + H_{12}(t)\mu_2 h + o(h^2)}{h}.$$

Ved å la h gå mot null gir dette

$$H'_{11}(t) = -H_{11}(t)(\lambda_1 + \mu_1) + H_{12}(t)\mu_2.$$

Lignende argumenter er brukt for de neste tre kombinasjonene.

$$\begin{aligned}
H_{12}(t+h) &= H_{11}(t)(\mu_1 h)(1-\lambda_1 h) + H_{12}(t)(1-\mu_2 h)(1-\lambda_2 h) \\
&= H_{11}(t)\mu_1 h + H_{12}(t) - (\lambda_2 + \mu_2)hH_{12}(t) + o(h^2) \\
\frac{H_{11}(t+h) - H_{11}(t)}{h} &= \frac{H_{11}(t)\mu_1 h - H_{12}(t)(\lambda_2 + \mu_2)h}{h} \\
h \rightarrow 0 &\Rightarrow \\
H'_{12}(t) &= -H_{12}(t)(\lambda_2 + \mu_2) + H_{11}(t)\mu_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{21}(t+h) &= H_{22}(t)(\mu_2 h)(1-\lambda_2 h) + H_{21}(t)(1-\mu_1 h)(1-\lambda_1 h) \\
&= H_{22}(t)\mu_2 h + H_{21}(t) - H_{21}(t)(\lambda_1 + \mu_1)h + o(h^2) \\
\frac{H_{21}(t+h) - H_{21}(t)}{h} &= \frac{H_{22}(t)\mu_2 h - H_{21}(t)(\lambda_1 + \mu_1)h}{h} \\
h \rightarrow 0 &\Rightarrow \\
H'_{21}(t) &= -H_{21}(t)(\lambda_1 + \mu_1) + H_{22}(t)\mu_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{22}(t+h) &= H_{21}(t)(\mu_1 h)(1-\lambda_1 h) + H_{22}(t)(1-\mu_2 h)(1-\lambda_2 h) \\
&= H_{21}(t)\mu_1 h + H_{22}(t) - H_{22}(t)(\lambda_2 + \mu_2)h + o(h^2) \\
\frac{H_{22}(t+h) - H_{22}(t)}{h} &= \frac{H_{21}(t)\mu_1 h - H_{22}(t)(\lambda_2 + \mu_2)h}{h} \\
h \rightarrow 0 &\Rightarrow \\
H'_{22}(t) &= -H_{22}(t)(\lambda_2 + \mu_2) + H_{21}(t)\mu_1.
\end{aligned}$$

Ligningene for H'_{ij} kan settes opp på samme form (formel A.3 på side 73) som hos Meier-Hellstern (1987). I artikkelens oppsett, er det brukt betegnelse $\mu_{kj}(t)$ i summen (notasjonen σ er brukt for μ), mens de foregående utledningene her gir μ_k på samme sted. En dobbelindeksert μ som også er avhengig av variabelen t , passer ikke inn i utledningene og er heller ikke definert eller nevnt ellers i artikkelen.

Disse fire ligningene kan settes opp i en matrise $H'(t)$.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H'_{11}(t) & H'_{12}(t) \\ H'_{21}(t) & H'_{22}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -H_{11}(t)(\lambda_1 + \mu_1) + H_{12}(t)\mu_2 & -H_{12}(t)(\lambda_2 + \mu_2) + H_{11}(t)\mu_1 \\ -H_{21}(t)(\lambda_1 + \mu_1) + H_{22}(t)\mu_2 & -H_{22}(t)(\lambda_2 + \mu_2) + H_{21}(t)\mu_1 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} H_{11}(t)(\lambda_1 + \mu_1) & H_{12}(t)(\lambda_2 + \mu_2) \\ H_{21}(t)(\lambda_1 + \mu_1) & H_{22}(t)(\lambda_2 + \mu_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{12}(t)\mu_2 & H_{11}(t)\mu_1 \\ H_{22}(t)\mu_2 & H_{21}(t)\mu_1 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \mu_1) & 0 \\ 0 & (\lambda_2 + \mu_2) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \mu_1) & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + \mu_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \mu_1) & \mu_1 \\ \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dette gir $H'(t) = H(t)(Q - \Lambda) = H(t)C$, som er en første ordens homogen differensialligning. Initialkravet ved t lik null fåes ved innsetting i definisjonen $H_{ij}(t)$. Det gir $H_{ij}(0) = P(J(0) = j, N(0) = 0 | J(0) = i)$, som er sannsynligheten for at tilstanden til prosessen er j ved $t = 0$, gitt at tilstanden er i ved samme tid. Denne vil være lik 1 når $i = j$, og 0 ved i ulik j , som gir $H_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Dette gir at matrisen $H(0)$ er lik identitetsmatrisen I . Meier-Hellstern (1987) oppgir at initialkravet til differensialligningen skal være $H'_{ij}(0)$ lik δ_{ij} og da $H'(0)$ lik I . De har ikke forklaring eller utledning på at de har satt opp $H'(0)$. Ved å se på definisjonen til $H'_{ij}(t)$ ved formel A.3 på side 73 og muligheten $i = j = 1$, gir dette med $t = 0$ $H'_{11}(0) = -H_{11}(0)(\lambda_1 + \mu_1) + H_{12}(0)\mu_2$. Den foregående argumentasjonen om at $H_{ij} = \delta_{ij}(0)$ gir at

$$H'_{11}(0) = -1 * (\lambda_1 + \mu_1) + 0 * \mu_2 = -(\lambda_1 + \mu_1).$$

Lignende for de andre verdiene av i og j gir $H'_{ij}(0)$ lik matrisen $(Q - \Lambda)$ og ikke identitetsmatrisen I .

A.4 Løsning av differensialligningen $\mathbf{H}'(t)=\mathbf{H}(t)\mathbf{C}$.

Ligningen løses ved å regne ut fundamentalmatrisen

$$\Phi(t) = \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t C\Phi(s)ds,$$

med startkravet $\Phi(0) = \mathbf{x}^{(0)} = I$, forklart i avsnitt 2.6.

Løsningen søkes iterativt med startpunktet som $\Phi(0) = \mathbf{x}^{(0)}$, og første steg blir

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(t) &= \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t f[s, \Phi^{(0)}(s)]ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t C\mathbf{x}^{(0)}ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + C\mathbf{x}^{(0)}t = \mathbf{x}^{(0)}(I + Ct).\end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}(t) &= \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t f[s, \Phi^{(1)}(s)]ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t C\Phi^{(1)}(s)ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t C\mathbf{x}^{(0)}(I + Cs)ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + C\mathbf{x}^{(0)}t + \mathbf{x}^{(0)}\frac{C^2s^2}{2} \\ &= \mathbf{x}^{(0)}\left(I + Ct + \frac{C^2t^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Dette fører til for en generell n ,

$$\Phi^{(n)} = \mathbf{x}^{(0)}\left(I + Ct + \frac{C^2t^2}{2} + \dots + \frac{C^nt^n}{n!}\right).$$

Viser ved induksjon at denne stemmer, ser at $\Phi^{(0)}$ gir $\mathbf{x}^{(0)}(I+0) = \mathbf{x}^{(0)}$, som er riktig. Antar videre at den stemmer for n og neste steg $n+1$ blir da

$$\begin{aligned}\Phi^{(n+1)}(t) &= \mathbf{x}^{(0)} + \int_0^t C\Phi^{(n)} ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{x}^{(0)} \int_0^t C(I + Cs + \frac{C^2s^2}{2} + \dots + \frac{C^ns^n}{n!}) ds \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{x}^{(0)} C(t + \frac{Ct^2}{2} + \dots + \frac{C^nt^{(n+1)}}{(n+1)n!}) \\ &= \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{x}^{(0)} (Ct + \frac{C^2t^2}{2} + \dots + \frac{C^{n+1}t^{(n+1)}}{(n+1)!}) \\ &= \mathbf{x}^{(0)} (I + Ct + \frac{C^2t^2}{2} + \dots + \frac{C^{n+1}t^{(n+1)}}{(n+1)!}),\end{aligned}$$

som fullfører induksjonsbeviset. Løsningen $\Phi(t)$ oppnås ved å la n gå mot uendelig. For at grensen skal eksistere, må den konvergere, dette kan sjekkes med forholdstesten, på leddet $\sum_{n=1}^{\infty} (C^nt^n)/(n!)$. Forholdstesten er at forholdet mellom to ledd av en følge eller sekvens, ledd $(n+1)$ delt på ledd n i absoluttverdi, skal gå mot null når n går mot uendelig. Dette gir

$$\begin{aligned}\left| \frac{\frac{C^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{C^nt^n}{n!}} \right| &= \left| \frac{C^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{C^nt^n} \right| \\ &= \left| \frac{C^{n+1}t^{n+1}n!}{C^nt^n(n+1)!} \right| = \left| \frac{C^{n+1}t}{C^n(n+1)} \right| = \left| \frac{C^n(Ct)}{C^n(n+1)} \right|,\end{aligned}$$

hvor det siste leddet går mot null når n går mot uendelig.

Dette medfører at løsningen blir

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(0)} (I + Ct + \frac{C^2t^2}{2} + \dots + \frac{C^nt^n}{n!}) \\ &= \mathbf{x}^{(0)} \exp(Ct) = \exp(Ct).\end{aligned}$$

Den aktuelle differensialligningen er $H'(t) = H(t)C, H(0) = I$, som da gir løsning $H(t) = \exp(Ct)$. Denne løsningen gjelder selv om det er $H(t)C$, og ikke $CH(t)$, fordi i de foregående integralene, ville C -matrisen blitt multiplisert inn fra høyre side og gitt CsC og ikke direkte C^2s , men siden s er en konstant blir dette det samme.

A.5 Eksplisitt løøsning av matriseeksponentialen for en MMPP.

Skal her utlede følgende ligning fra Skaug (2006),

$$H(x) = \exp\{(Q - \Lambda)x\} = U^{-1} \left[e^{-\theta_2 x} \begin{bmatrix} S_2 - \theta_2 & \mu_1 \\ \mu_2 & S_1 - \theta_2 \end{bmatrix} - e^{-\theta_1 x} \begin{bmatrix} S_2 - \theta_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & S_1 - \theta_1 \end{bmatrix} \right],$$

med notasjon

$$\begin{aligned} S_i &= \lambda_i + \mu_i, i = 1, 2, \\ K &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2, \\ U &= \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4K}, \\ \theta_1 &= (S_1 + S_2 + U)/2, \\ \theta_2 &= (S_1 + S_2 - U)/2. \end{aligned}$$

Ser først på første rad i $H(x)$ over, som kan skrives på formen:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \end{bmatrix} \\ &= U^{-1} \left[\left(-(S_2 - \theta_1)e^{-\theta_1 x} + (S_2 - \theta_2)e^{-\theta_2 x} \right) \left(\mu_1 e^{-\theta_1 x} + \mu_1 e^{-\theta_2 x} \right) \right] \\ & \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-(S_2 - \theta_1)e^{-\theta_1 x} + (S_2 - \theta_2)e^{-\theta_2 x} \right) / U \\ \left(-\mu_1 e^{-\theta_1 x} + \mu_1 e^{-\theta_2 x} \right) / U \end{bmatrix} \quad (\text{A.5}) \\ & \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(S_2 - \theta_1)/U \\ -\mu_1/U \end{bmatrix} e^{-\theta_1 x} + \begin{bmatrix} (S_2 - \theta_2)/U \\ \mu_1/U \end{bmatrix} e^{-\theta_2 x}. \end{aligned}$$

Har tidligere vist at $H(x) = \exp[(Q - \Lambda)x]$ (avsnitt A.4), hvor det var utledet fra ligningene

$$\begin{aligned} H'_{11}(t) &= -H_{11}(t)S_1 + H_{12}(t)\mu_2 \\ H'_{12}(t) &= -H_{12}(t)S_2 + H_{11}(t)\mu_1 \\ H'_{21}(t) &= -H_{21}(t)S_1 + H_{22}(t)\mu_2 \\ H'_{22}(t) &= -H_{22}(t)S_2 + H_{21}(t)\mu_1. \end{aligned}$$

De to første ligningene settes opp på matrisform,

$$\begin{bmatrix} H'_{11} \\ H'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & -S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{bmatrix},$$

og skal vise at løsningen av denne differensialligningen blir H_{11} og H_{12} gitt ved formel A.5 på forrige side. For notasjonens del skrives denne som $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Dette er et system av differensialligninger og løses ved å se på egenverdiene og egenvektorene til \mathbf{A} , hvor en løsning søkes på formen $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$ (Boyce og R.C., 2005, side 391). Ved å sette inn denne løsningen i differensialligningen blir det $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, som vil gi:

$$\begin{pmatrix} (-S_1 - r) & \mu_2 \\ \mu_1 & (-S_2 - r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

som har en ikke-triviell løsning hvis determinanten er lik null (Boyce og R.C., 2005, side 392).

$$\begin{vmatrix} (-S_1 - r) & \mu_2 \\ \mu_1 & (-S_2 - r) \end{vmatrix} = (S_1 + r)(S_2 + r) - \mu_1\mu_2 = 0,$$

som er en annengradslikning med løsninger $-(S_1 + S_2 \pm U)/2$, med røtter lik $r_i = -\theta_i$.

Generell løsningen på differensialligningen er $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$, med $\mathbf{x}^{(i)} = \boldsymbol{\xi}^{(i)}e^{r_i t}$. Ved å sette inn røttene, r_i , i formel A.6 og løser ut vil det gi følgende egenvektorer

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_2} \end{pmatrix}.$$

For å bestemme koeffisientene c , brukes initialbetingelsene $H_{11}(0) = 1, H_{12}(0) = 0$, og innsatt i den generelle løsningen med $t = 0$ gir ligningene:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_2} \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Første ligning innsatt i den andre vil gi

$$\begin{aligned}
 c_1 \left(\frac{\mu_1}{S_2 - \theta_1} - \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_2} \right) &= -\frac{\mu_1}{S_2 - \theta_2} \\
 \Rightarrow c_1 &= \frac{-(S_2 - \theta_1)}{\theta_1 - \theta_2} = -\frac{S_2 - \theta_1}{U} \\
 \Rightarrow c_2 &= 1 - \frac{-(S_2 - \theta_1)}{U} = \frac{U + S_2 - \theta_1}{U} = \frac{S_2 - \theta_2}{U}.
 \end{aligned}$$

Slåes dette sammen gies løsningen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= c_1 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 t} \\
 &= -\frac{S_2 - \theta_1}{U} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_1} \end{pmatrix} e^{-\theta_1 t} + -\frac{S_2 - \theta_2}{U} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu_1}{S_2 - \theta_2} \end{pmatrix} e^{-\theta_2 t} \\
 &= - \begin{pmatrix} -(S_2 - \theta_1)/U \\ \mu_1/U \end{pmatrix} e^{-\theta_1 t} + \begin{pmatrix} (S_2 - \theta_2)/U \\ \mu_1/U \end{pmatrix} e^{-\theta_2 t},
 \end{aligned}$$

som er likt som formel A.5 på side 79. For andre rad av matriseeksponentialen, følges lignende argument og utledning.

B

Generering av en MMPP

Generering av observasjoner fra en MMPP er utført i programmet R og baserer seg på inputparameterne λ , μ og lengden L . Utifra stasjonærfordelingen

$$\boldsymbol{\pi} = \left[\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right]$$

trekkes det om det startes i et lavt eller høyt område.

Videre er lengden L delt opp i lav- og høyintensitetsområder, henholdsvis tilstand 1 og 2. Oppholdstiden i en tilstand er trukket fra eksponentialfordelingen med parameter μ_i , hvor μ_1 indikerer en overgang fra lavt område til høyt, og μ_2 fra høyt til lavt. Innenfor hvert intensitetsområde, L_i , trekkes det antall observasjoner ved poissonfordelingen med parameter $\lambda_i L_i$, hvor λ_1 og λ_2 tilhører henholdsvis tilstand 1 og 2. Observasjonene blir uniformt fordelt innenfor det lengdeintervallet. Når bitene L_i settes sammen, gir dette et intervall $[0, L]$ med tilhørende observasjoner.

Litteratur

- Bebbington M. (2007). «Identifying volcanic regimes using Hidden Markov Models». *Geophysical Journal International*, **volum 171**, nummer 2, side 921–942. Referert til på side 12, 23 og 24.
- Boyce W. og R.C. D. (2005). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc. Referert til på side 21 og 80.
- Buckland S., Anderson D., Burnham K., Laake J., Borchers D. og Thomas L. (2001). *Introduction to distance sampling: estimating abundance of biological populations*. Oxford University Press, USA. Referert til på side 1, 2 og 15.
- Burnham K., Anderson D. og Laake J. (1985). «Efficiency and bias in strip and line transect sampling». *The Journal of Wildlife Management*, **volum 49**, nummer 4, side 1012–1018. Referert til på side 2.
- Cowling A. (1998). «Spatial methods for line transect surveys». *Biometrics*, **volum 54**, nummer 3, side 828–839. Referert til på side 3 og 4.
- Cox D. og Isham V. (1980). *Point processes*. Chapman & Hall/CRC. Referert til på side 3 og 4.
- Fischer W. og Meier-Hellstern K. (1993). «The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook». *Performance Evaluation*, **volum 18**, nummer 2, side 149–171. Referert til på side 18, 19 og 20.
- Hagen G. og Schweder T. (1994). «Point Clustering of Minke Whales in the Northeastern Atlantic». I Blix A.S., Walløe L. og Ulltang Ø. (red.), «Whales, Seals, Fish and Man», volum 4 av *Developments in Marine Biology*, side 27–34. Elsevier. Referert til på side 3.
- Hedley S. (2000). «Modelling heterogeneity in cetacean surveys». *PhD thesis*. Referert til på side 3.
- Högmander H. (1991). «A random field approach to transect counts of wildlife populations». *Biometrical Journal*, **volum 33**, nummer 8, side 1013–1023. Referert til på side 3.

- Meier-Hellstern K. (1987). «A fitting algorithm for Markov-modulated Poisson processes having two arrival rates.» *European Journal of Operational Research*, **volum 29**, nummer 3, side 370–377. Referert til på side 73, 75 og 76.
- Rabiner L. og Juang B. (1986). «Introduction to hidden Markov models.» *IEEE ASSP MAG.*, **volum 3**, nummer 1, side 4–16. Referert til på side 23 og 24.
- Ryden T. (1994). «Parameter estimation for Markov modulated Poisson processes». *Communications in statistics. Stochastic models*, **volum 10**, nummer 4, side 795–829. Referert til på side 18.
- Schweder T. (1974). «Transformation of Point Processes: Application to Animal Sighting and Catch Problems, with special Emphasis on Whales.» *Unpublished PhD thesis*. Referert til på side 2.
- Schweder T. (1977). «Point process models for line transect experiments». *Recent Developments in Statistics*, eds. J. R. Barra, B. Van Cutsem, F. Brodeau, and G. Romier, Amsterdam: North Holland, side 221–242. Referert til på side 2.
- Schweder T. (2003). «Point process models in line transect studies». Referert til på side 3.
- Skaug H. (2006). «Markov Modulated Poisson Processes for Clustered Line Transect Data». *Environmental and Ecological Statistics*, **volum 13**, nummer 2, side 199–211. Referert til på side 2, 4, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 35 og 79.
- Skaug H. (2009). «Inferring spatial cluster structure from line transect data». *Teknisk rapport*, SC/61/RMP5. Referert til på side 34 og 35.
- Skaug H., Oeien N., Schweder T. og Boethun G. (2004). «Abundance of minke whales (*Balaenoptera acutorostrata*) in the Northeast Atlantic: variability in time and space». *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, **volum 61**, nummer 6, side 870–886. Referert til på side 14.
- Taylor H. og Karlin S. (1998). *An introduction to stochastic modeling*. Academic Press. Referert til på side 6, 7, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 69, 70, 73 og 74.
- Waagepetersen R. og Schweder T. (2006). «Likelihood-based inference for clustered line transect data». *Journal of agricultural, biological, and environmental statistics*, **volum 11**, nummer 3, side 264–279. Referert til på side 1, 3 og 4.