Empirisk testing av ein evolusjonær porteføljestrategi

av

Asgeir Langeland

Masteroppgåve

Masteroppgåva er levert for å fullføra graden

Master i samfunnsøkonomi

Universitetet i Bergen, Institutt for økonomi
Juni 2011

UNIVERSITETET I BERGEN

Føreord

Eg takkar professor Sjur Didrik Flåm for god rettleiing under vegs, og for å få skriva ei oppgåve med relevans for eit forskingsprosjekt. I samband med dette har eg fått stipend frå ”Finansforbundet”. Takk går og til far min Arvid Langeland for å ha gått språkdrakta etter i saumane, og til medstudent Cecilie Rasmussen for å ha lese gjennom og kommentert oppgåva.

Bergen, 1. juni 2011

Asgeir Langeland

Samandrag

Empirisk testing av ein evolusjonær porteføljestrategi

av

Asgeir Langeland, Master i samfunnsøkonomi

Universitetet i Bergen, 2011

Rettleiar: Sjur Didrik Flåm

Denne oppgåva skal med utgangspunkt i ”Portfolio managment without probability or statistics” (Flåm 2008) testa ut ein evolusjonær porteføljestrategi empirisk. Kan ein matematisk formel som ikkje blir oppdatert på bakgrunn av annan informasjon enn avkastning per verdipapir, oppnå så gode resultat for ein brei klasse av investeringsobjekt at han kan brukast som ein porteføljestrategi? Gjennom ei simulering av ulike teoretiske marknader i Microsoft Excel blir dette spørsmålet utforska. I tilfelle som minner om *hesteveddelaup* med *gjensidig utelukkande* utfall blir Kelly-kriteriet verifisert som optimal strategi, og formelen konvergerer mot denne optimumsverdien. Vidare er resultata svært gode for ein *realøkonomisk marknad* med positiv og negativ korrelasjon mellom investeringsobjekta, men for ein *perfekt finansmarknad* er ikkje resultata dei beste. Under simuleringa blir diverse økonomiske poeng som verdien av differensiering og ein langsiktig investeringshorisont illustrert, og det klassiske vurderingskriteriet forventningsverdi blir kritisert og vist som mangelfullt.

Innhaldsliste

Figurar

Kapittel 1: Teoretisk råmeverk

Denne oppgåva skal testa ut tolkingar av ein porteføljeteori som er presentert i ”Portfolio managment without probability or statistics” (Flåm 2008). Som tittelen avslører, går teorien grovt sett ut på at ein ikkje treng avansert statistisk kunnskap eller kjennskap til underliggjande sannsyn for å få solid økonomisk vekst. Alt som skal til er ein enkel, matematisk formel, som garanterer at den som er tru mot han, får høg vekst i formue over tid. Den sentrale ideen bak denne formelen er at prestasjonane til verdipapira er *informasjonsberande*, slik at ein gjennom ein kontinuerleg *læringsprosess* gradvis kan avdekkja korleis det er optimalt å investera. Teorien kan definerast som *evolusjonær* sidan han tek sikte på å tilpassa og forbetra seg over tid på bakgrunn av informasjonen som blir avdekt i marknaden.

I den finansielle verda er det svært mange investeringsalternativ, og desse alternativa tilhøyrer ulike marknader med sine særtrekk og karakteristika. For at det skal gje god meining å bruka omgrepet porteføljestrategi, bør teorien difor femna om *alle* mogelege investeringar. Problemstillinga til oppgåva blir difor som fylgjer: ”Kan ein matematisk formel som ikkje blir oppdatert på bakgrunn av annan informasjon enn avkastning per verdipapir, oppnå så gode resultat for ein brei klasse av investeringsobjekt at han kan brukast som ein porteføljestrategi?”. Metoden som blir nytta for å svara på spørsmålet er simuleringar av tre forskjellige teoretiske marknader i Microsoft Excel. Det blir sett opp konkurrerande strategiar som samanlikningsgrunnlag, og dei *falsifiserer* formelen dersom ein av dei får betre resultat, eller *verifiserer* han dersom formelen gjer det best.

Den fyrste marknaden som blir simulert, er ein *perfekt finansmarknad* der prisen skal reflektera all mogeleg informasjon som finst om det aktuelle verdipapiret. Så blir formelen testa ut på ein *hesteveddelaupsbane*, der det er *gjensidig utelukkande utfall* og berre ein vinnar per laup. Til slutt kjem ein meir *realøkonomisk marknad*. Her er avkastninga til kvart investeringsobjekt avhengig av prestasjonane til dei andre investeringsobjekta. I tillegg fører ein felles årsaksvariabel til at det blir anten positiv eller negativ samvariasjon, eller *korrelasjon*, mellom dei.

Dette kapitlet tek fyrst for seg kva for kriterium som skal nyttast for å vurdera strategiane opp mot kvarandre. Idégrunnlaget bakom dei ulike strategiane blir så kort nemnt, før den evolusjonære strategien frå ”Portfolio managment without probability or statistics” blir presentert. Til slutt blir problem og utfordringar knytte til programmering av simuleringa teke opp, og strategien og formelen tolka i høve til dette.

Oppgåveteksten tek stort sett for seg logikken og resonnementa i ords form. Programmeringa bak blir presentert i appendiks A, medan eit par tekniske referansar blir kort presenterte i appendiks B.

Vurderingskriterium

I finansteori vurderer ein ulike strategiar basert på *forventningsverdi*, som berre er eit anna uttrykk for gjennomsnitt. Med denne målemetoden gjev strategiar ofte blendande resultat med lovnad om høg økonomisk vekst. Problemet er at gjennomsnitt ikkje *vektar* prestasjonar likt, ein ser ikkje på relative prestasjonar, men på absoluttverdiar. Som eit døme på feilaktige empiriske konklusjonar når ein brukar dette kriteriet, kan ein ta ei vurdering av deltaking i lottotrekningar. Dersom ein testar dette ut med å ta eit utval på 5000 trekningar, og ein slumpar til og vinn hovudpremien i eitt av tilfella, vil ein ut frå dette kriteriet feilaktig konkludera med høg forventingsverdi sidan snittverdien blir høg. Eit anna døme er ei simulering som vart gjord i samband med denne oppgåva, der 1 av 2000 simuleringar utgjorde 93 % av den samla verdien. Det er difor tydeleg at det empiriske sannsynet ikkje på nokon måte rettferdiggjer terminologien ”forventning”.
Når strategiar blir vurderte opp mot kvarandre i oppgåva, blir det difor lagt vekt på det logaritmiske gjennomsnittet og medianen.[1] Det logaritmiske snittet vurderer relative prestasjonar likt, slik at eit positivt utfall av ei dobling i formue blir vege opp av eit negativt utfall der formuen blir halvert.[2]

Evolusjonær økonomi

Artikkelen lovar statistiske ignorantar ein veldifferensiert, kløktig strategi som *over tid* overlever dei beinharde krava som kapitalhungrige investorar utset han for. Dette er mogeleg dersom ein nyttar ein *adaptiv, dynamisk* formel, formulert i eit matematiske program som stadig tilpassar seg og syg til seg ny informasjon. Gjennom denne kontinuerlege

[1] Den midtarste observasjonen i eit utval sortert frå minst til størst
[2] Skilnaden mellom logaritmisk og vanleg forventning blir her: (Ln(2) + Ln(0.5)) / 2 = 0 medan (2 + 0.5) / 2 = 1.25. Tre utfall, 2 negative: (Ln(2) + Ln(0.5) + Ln(0.5)) / 3 = -0.23, medan (2 + 0.5 + 0.5) / 3 = 1.

læringsprosessen blir den optimale strategien gradvis avdekt og ein endar opp med solid økonomisk vekst.
Nøkkelen til potensiell suksess for ein slik strategi er at det faktisk finst informasjon som kan avdekkjast, at det finst forbetringspotensial og potensielle utviklingstrinn. Hovudideen er altså at det finst ei investeringssamansetnad som er optimal, og ambisjonen til evolusjonær økonomi er å stadig koma nærmare og til slutt *konvergera* mot denne samansetnaden .
Eg skil heretter mellom evolusjonære strategiar, som er overtydde om at prisutviklinga avslører viktig informasjon, og reine *dynamiske* strategiar, som ser på prisutvikling utelukkande i *relative* termar. Har prisen for verdipapiret vorte dyrare eller billegare i høve til resten av porteføljen? Har prisutviklinga skove verdien ein sit med i kvart verdipapir bort frå den differensieringa ein ynskjer?

Motstykket til begge er *faststrategien*, som, basert på ei vurdering av *realverdiar,* ikkje lèt seg affisera av det som blir tolka som tilfeldige hopp i kursutviklinga, men stødig held aksjeporteføljen uendra gjennom ein vald periode. Av di han er differensiert, tek ein tap i somme verdipapir utan nemneverdig uro, trygg på at aksjeporteføljen samla sett vil få positiv vekst.

Strategien

I evolusjonære strategiar gjev difor verdiauke insentiv til større investeringar, medan verdinedgang er eit teikn på at ein bør redusera investeringsandelen noko. Etter teorien til Flåm er endringane avhengige av *relative prestasjonar* i høve til heile aksjeporteføljen; lik oppgang eller nedgang for alle verdipapira vil gje status quo. Teorien knyter seg opp mot logaritmisk nytteteori[3]og *Kelly-kriteriet*, som seier at investeringsandelen som ein plasserer i eit mogeleg senario, bør tilsvara *sannsynet* for utfallet. Begge desse teoriane gjev eit samanlikningsgrunnlag og ein optimal vekstbane som den evolusjonære strategien har som ambisjon å konvergera mot. Då dette kriteriet berre er gyldig for gjensidig utelukkande utfall, blir det undersøkt i samband med simuleringa av ein slik marknad. Nedanfor fylgjer dei viktigaste trekka ved strategien.[4] Det er *tolkingar* av denne strategien som blir simulert – sjå difor nøye på føresetnadene som er sette opp for kvar simulering.

[3] Sjå appendiks B.1 s.37
[4] For meir utførleg utgreiing, sjå Flåm (2008).

Ein tenkjer seg at ein har ein andel av formuen sin p_{at} investert på tidspunkt *t* i verdipapiret *a*, der

$$\sum_a p_{a,t+1} = 1 .$$

Ein opererer med avgrensa risiko, der ein i verste fall taper midlane investert i verdipapir *a*, dvs

$$X_{a,t+1} \geq 0$$

Samla verdiutvikling for porteføljen blir dermed

$$R_{t+1} := \sum_{a \in A} p_{at} X_{a,t+1}$$

Ein føresetnad her er at ikkje alle verdipapir går konkurs, slik at

$$R_{t+1} > 0$$

For å unngå å kunna gå konkurs, ynskjer difor investoren å vera differensiert, dvs. at han vil han ein andel av formuen sin investert i alle tilgjengelege verdipapir slik at

$$p_{at} > 0$$

Den evolusjonære strategien er som fylgjer:

$$p_{a,t+1} := (1 - s_t) p_{a,t} + s_t p_{at} \frac{X_{a,t+1}}{R_{t+1}}$$

der $s_t \in [0,1)$ er ein endringsparameter som investoren vel. Uttrykket til venstre er det konservative, det til høgre det dynamiske. Ved *s* = 0 blir strategien redusert til ein faststrategi sidan ein då aldri endrar på investeringsandelane.

Føresetnadene for strategien er:

1) Ingen transaksjonskostnader
2) Vektoren X er sjølvstendig med identisk sannsynsfordeling.[5]

Vektoren X blir definert som ”dividende” eller ”avkastning”[6]. Tolkinga av denne vektoren i simuleringa vil variera etter kva marknadssituasjon ein er i, fordi investeringane er av ulik

[5] Som her vil seia ei at vektoren er uavhengig i ei diskret simultanfordeling
[6] ”Gross dividend” s. 2, ”gross return” s. 4

type. I samband med dette vil og uttrykket for reallokeringa $p_{a,t+1}$ få ulike tolkingar. Dette blir presisert for kvar simulering.

Programmering av strategien

Når ein skal programmera, må ein konstruera heile råmeverket frå botnen av, og detaljar som ein kan sjå bort frå i økonomisk modellering må definerast og fastsetjast. Det kan forsiktig seiast at det har vore utfordrande å freista å simulera ein porteføljestrategi. Den praktiske sida med fyrst å læra seg programmeringskoden skikkeleg, og så testa ut grensene for kor store datamengder maskina klarerer å handsama, har vore svært tidkrevjande. Hovudutfordringa har likevel vore å konstruera ei økonomisk verd som gjev meining og som er oversiktleg. Kor mykje vekst er det naturleg å leggja inn i kvar periode? Kor mykje variasjon skal ein leggja inn for denne verdien? Kva startverdiar skal ein setja opp? Gjev dette ein naturleg utviklingsbane? Slike spørsmål må vurderast og stillast for alle variablar og parametrar ein har med i analysen. Ein må så testa ut desse verdiane og variasjonar rundt dei opp mot alle andre parametrar og variablar, i det som stundom har verka som ein endelaus runddans. Sidan programmeringa skal kunna *etterprøvast* og kontrollerast på ein mest mogeleg effektiv måte, blir det gjort ein del forenklingar for å ta omsyn til dette. Sjølv om det fører til eit noko grovt og unyansert bilete, skal ikkje hovudpoenga lida under dette.

Når ein så har konstruert ei verd som verkar nokolunde plausibel, kjem så det økonomiske hovudproblemet. Korleis skal ein kunne vurdera prestasjonane til ein formel eller teori? Ein får opp talrekkjer og grafar av simuleringa, men korleis skal ein kunne vurdera om dette er dårleg, middels eller bra? I økonomifaget er *alternativkostnad* ein viktig omgrep, og i den tradisjonen blir det her sett opp alternative strategiar. Dette krev ein del kreativ tankekraft og er i høgste grad ei skjønsmessig vurdering. I denne oppgåva er det forsøkt å konstruera fornuftige og plausible marknader og alternative strategiar for å kunna undersøkja problemstillinga, vurdera prestasjonar og illustrera nokre økonomiske poeng. Det er ut ifrå dét råmeverket teorien og formelen blir vurdert. Det kan sjølvsagt finnast betre strategiar enn dei som blir sette opp her, men det er det ikkje mogeleg å ta omsyn til, så råmeverket som blir presentert må vera ein føresetnad for konklusjonane og vurderingane som blir gjorde.

Føresetnadene for teorien som er skissert over er uproblematiske å programmera. Programmet lagar tilfeldige variablar som blir trekte i ei fastsett sannsynsfordeling slik at føresetnadene ovanfor blir oppfylte gjennom ei *sjølvstendig, simultan sannsynsfordeling*. Om det er felles årsaksvariablar, vil dette sjølvsagt føra til samvariasjon eller korrelasjon, utan at det er noko kausaltilhøve mellom dei påverka variablane av den grunn. Problemet er at dersom formelen skal kunne nyttast på ei brei rekkje investeringsobjekt i ulike marknadssituasjonar, så må han ta omsyn til at desse objekta er forskjellige av natur. Ikkje alle investeringsobjekt er *likvide*, slik at ein når som helst kan omsetja dei til kapital. Formuen heng i slike tilfelle difor tett saman med investeringsandelane, slik at andelane ikkje korrekt kan skildrast som ein vektor av parametrar ein avgjer heilt sjølv. Eit anna problem, dersom dei *kan* omformast til kapital, er at prisen per investeringsobjekt typisk varierer, slik at omplassering av andelar òg krev at ein kontrollerer at ein har *budsjett* til det. Av slike omsyn vil difor reallokeringa verta tolka slik at det fyrst blir sett opp eit budsjett av dei verdipapira ein sel seg ned i, som så blir fordelt til oppkjøp av verdipapira ein skal auka andelen i. Dette er ei skjønnsmessig vurdering på lik linje med fastsetjinga av endringsparameteren *s*. Den er tru mot ideen om å reallokera basert på relative prestasjonar, og gjer at formelen kan brukast på alle marknader.

Generelt blir talet på tidsseriar og simuleringar avgrensa av den datakrafta som er tilgjengeleg. Når ein ser på utviklinga over veldig lang tid, blir difor talet på simuleringar vesentleg redusert. Ver difor merksam på at *presisjonsnivået* på lange tidsseriar er mindre. I oppgåva blir lange tidsseriar tekne med for å stadfesta tendensen frå kortare tidsseriar når det er av interesse. Sidan desse korte tidsseriane har svært mange simuleringar, blir denne verifiseringa rekna som tilstrekkeleg her. Talet på tidsseriar og simuleringar er nedteikna under ”t:, s:”.

Kapittel 2: Simulering av ein perfekt finansmarknad

I ein perfekt finansmarknad reflekterer prisen all tilgjengeleg informasjon som finst om det aktuelle verdipapiret, og dermed er ikkje prisutviklinga anna enn tilfeldig drift opp eller ned.[7] Sidan ideen bak evolusjonær teori er at prisutviklinga er eit godt instrument for å avgjera kva ein bør investera i, så vil truleg ikkje teorien gjera det særleg godt i ein slik marknad.
På lengre sikt er ikkje føresetnadene i ein slik marknad truverdige, sidan reelle opplysningar kjem til å påverka prisen etter kvart som kvartals- og årsresultat blir tilgjengelege.
Simuleringa er med for å illustrera potensielle fallgruver med for hyppig reallokering og reallokering basert på prisinformasjon som *ikkje* er informasjonsberande.[8]

Alternative strategiar

Som motsetning til den evolusjonære strategien blir det sett opp ein reint dynamisk strategi, som gjer det *motsette* av den evolusjonære. Her blir prisinformasjonen tolka som tilfeldige hopp, som ikkje røper noko om sannsynet for eit liknande hopp i neste periode. Ideen er difor at verdipapir som nettopp har gått opp, har vortne dyrare, medan dei som har gått ned, har vorte billegare. Målet til denne strategien er i tillegg å halda seg veldifferensiert, så dermed er det frå begge synsvinklar fornuftig å investera meir i dei papira som gjer det dårleg og mindre i dei som gjer det bra, då ein då held om lag same *verdiandel* i kvart verdipapir for ein rimeleg penge.[9] Tanken her er at om verdihoppa er tilfeldige, så gjev dei ingen grunn til nye investeringar sidan det ikkje er større sannsyn for verdiauke i neste periode. Tvert om – investerer ein meir her, vil ein få ei dobbel relativ investering – meirinvestering på toppen av den verdiauken som alt er skapt i marknaden. I så fall vil porteføljen bli *mindre differensiert* sidan han no er meir avhengig av prestasjonen til dette papiret.
I tillegg blir det lagt til ein faststrategi, som har lik verdi plassert i kvart verdipapir, og held dette uendra fram til siste perioden.

Dividende i finansmarknaden er utelukkande ein *positiv* verdi ein kan få dersom ein eig verdipapir i selskap som betaler ut dividende. Ein er aldri forplikta til å betala *inn* meir pengar dersom ein eig ein aksje, så det er ikkje mogeleg med negativ dividende. Utbetaling av utbyte treng ikkje bety at aksjen har gjort det svært godt – det kan vera eit strategisk val av styret.

---

[7] Etter definisjonen av effektiv marknad på s.20 i Campell, Young T. m.f (1997)
[8] Som ofte gjeld ved daytrading
[9] Dette samsvarar med prinsippet bak ”votality pumping” i Luenberger s. 422

For når ein tek ut verdiar av selskapet gjennom utbetaling av dividende, skal i teorien aksjeverdien falla ekvivalent med dividendeutbetaling. Fylgjer ein denne tankerekkja, er dividende meir eit *uttak* enn eit utbyte, og dermed ikkje noko god indikator på at ein bør investera meir.

Vurderinga om ein tener pengar i finansmarknaden kan fyrst bli gjord når ein realiserer verdien, det vil seia når ein sel seg ut. Ein ser då om summen av verdien ein sel seg ut for, og dividende ein har fått utbetalt under eigarskapen, overstig investeringa ein gjorde i utgangspunktet.[10] For å forenkla blir desse summane slegne saman til *verdiutviklinga* representert med vektoren X[11]. Dette er ein type marknad der formuen og verdiandelane heng saman, og der ein reallokerer ein mindre del av formuen per tidsperiode.

Eg set elles opp fylgjande føresetnader i simuleringa. For programkode bakom simuleringa, sjå Appendiks A.1.

1) Kjøper seg fyrst inn med lik verdi investert i kvart verdipapir. Opererer med 5 verdipapir, som gjev eit oversiktleg detaljnivå utan å krevja for mykje datakraft. Startverdien til dei ulike verdipapira er sett opp tilfeldig, som vist i tabellen.

	X_0	p_{a0}	$X_0\ p_{a0}$
VP 1	4	0.0500	0.2
VP 2	8	0.0250	0.2
VP 3	5	0.0400	0.2
VP 4	6	0.0333	0.2
VP 5	7	0.0286	0.2
			1

2) Verdipapira går alltid anten opp eller ned med 5 %[12] – kursen står aldri i ro mellom to periodar
3) Kursoppgang/–nedgang fører til verdinedgang/-oppgang på 5 %, slik at

$$X_{a,t+1} = \begin{cases} X_{a,t} \cdot e^{0.05} & med\ 50\ \%\ sannsyn \\ X_{a,t} \cdot e^{-0.05} & med\ 50\ \%\ sannsyn \end{cases}$$

4) Det er ingen grenser for kor høgt kursen kan gå. Verdipapir som gjer det dårleg, får verdifall i prosent av sin eigen verdi, så dei går aldri heilt i null.

[10] Og vurderer dette mot alternative avkastning

[11] Som høver med fotnoten s. 3 ”Typically, gross return $X_{a,t+1}$ hovers around 1” (Flåm (2008))

[12] Som er ein fastsett verdi som er lett å kontrollera, i tråd med tidlegare utleiing

5) Aktørane i marknaden er pristakarar, og reallokeringa påverkar dermed ikkje prisutviklinga. Det er sett bort ifrå volum, så det blir ikkje sett nokor grense for talet på aksjar. Det er altså ikkje nokor simulering av marknadslikevekter
6) Endringsparameteren s er sett til 0.05
7) Den evolusjonære teorien sel seg opp og ned basert på relative prestasjonar slik det tidlegare er omtala. Sidan den relative utviklinga til verdipapira her er forenkla etter punkt (3), blir føresetnaden for å selja seg ned slik (og vice versa for å kjøpa seg opp):
   a. verdipapiret har kursnedgang
   b. minst eit anna verdipapir har kursoppgang. Om alle verdipapira går opp eller ned, så blir det inga reallokering av verdipapira
8) Den dynamiske strategien gjer det motsette, og nyttar same endringsparameter slik at strategiane enklare kan samanliknast. Føresetnaden for at den dynamiske strategien sel seg ned, blir etter (3) dermed (og vice versa for å kjøpa seg opp):
   a. Verdipapiret har kursoppgang
   b. Minst eit anna verdipapir har kursnedgang. Om alle verdipapira går opp eller ned, så blir det inga reallokering av verdipapira.

Simulering: Empiriske resultat

Tabellen nedanfor viser sluttresultatet for dei tre strategiane

Figur 1: Sluttresultat t: 1000, s:4000

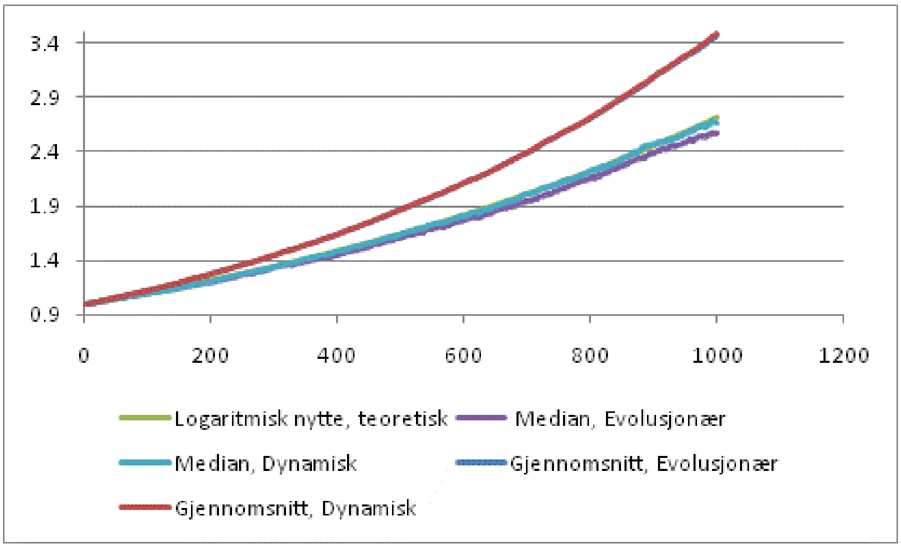
	Forventning	Median	Log-forventning	Positiv avkastning
Faststrategi	3.48	2.18	2.25	82.80%
Evolusjonær	3.48	2.57	2.59	89.60%
Dynamisk	3.49	2.67	2.69	91.88%

Ser ein på forventningsverdien, så kan ein eigentleg vera indifferent til kva strategi ein vel – dei er så godt som like. Ein kan derimot skilja klinten frå kveiten med å sjå på dei andre vurderingskriteria, der ”dynamisk” kjem klårt best ut. Av særleg interesse er sannsynet for positiv avkastning – ein har omtrent dobbel så stor sjanse for tap dersom ein vel faststrategien framfor ”dynamisk”. I begge tilfella gjer dei dynamiske strategiane det langt betre enn faststrategien.

Det ein kan konkludera med ut frå desse resultata, er at ”dynamisk” presterer jamt på eit høgare nivå, medan dei to andre gjer det litt betre når det fyrst går bra. Dette gjeld i særleg grad faststrategien, som har størst differanse mellom forventning og median.

Figuren nedanfor viser verdiutviklinga for ulike parametrar grafisk, og her er forventa utvikling frå logaritmisk nytteteori teken med.

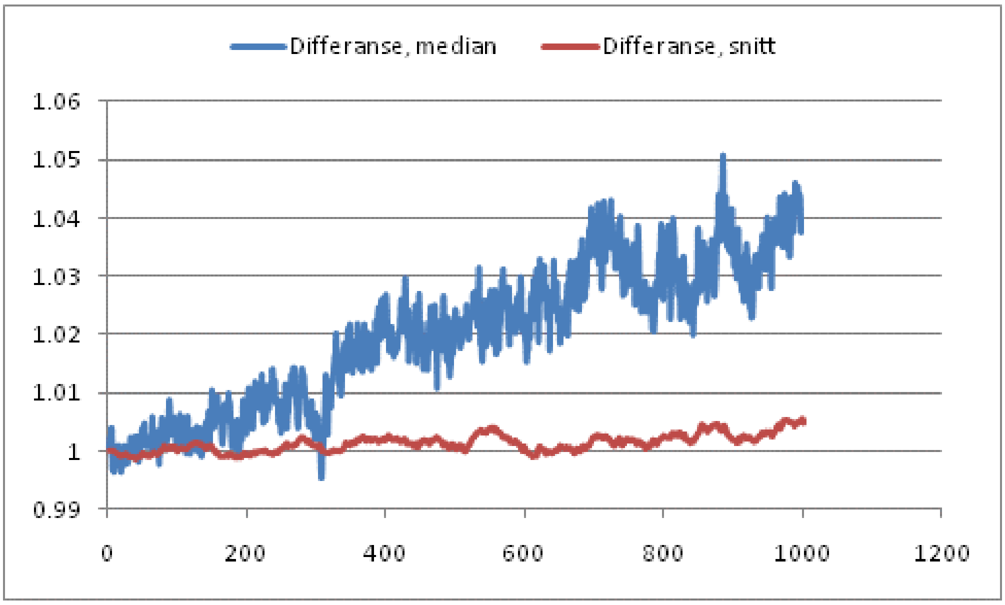
Figur 2: Verdiutvikling t: 1000, s: 4000



Ein ser at den teoretiske utviklinga ligg omtrent likt med medianen til ”dynamisk”. ”Evolusjonær” er heller ikkje langt unna, men ein ser at denne strategien *divergerer frå* den teoretiske verdien, han konvergerer ikkje imot slik ambisjonen er. Logaritmisk nytteteori viser seg som eit godt balansert estimat for den empiriske utviklinga.

Skilnaden i utviklinga mellom ”evolusjonær” og ”dynamisk” blir tydeleg når ein samanliknar desse to periode for periode. Dividerer ”dynamisk” på ”evolusjonær” for å få relativ utvikling av skilnader over tid.

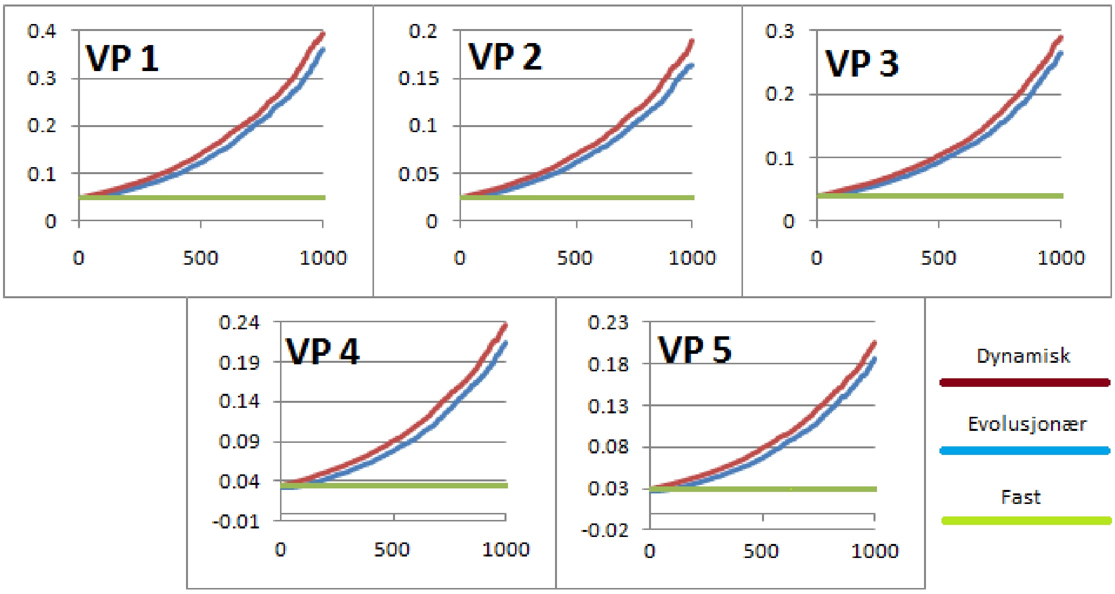
Figur 3: Skilnader mellom ”evolusjonær” og ”dynamisk” t:1000, s:4000



Som forventa er skilnaden liten i snitt, med ein svak tendens til vekst. Differansen i median aukar derimot markant.

Årsaka til dette blir tydeleg når ein ser på utviklinga av aksjeporteføljen til strategiane.

Figur 4: Utvikling av aksjeportefølje t: 1000, s: 4000



Figuren stadfester at ideen om å kjøpa billeg og selja dyrt fungerer, og verifiserer dermed at denne oppfatninga er den korrekte under dei gjeldande føresetnadene. I snitt har aksjeporteføljen til ”dynamisk” større aksjevolum for alle verdipapir. Grunnen til at gjennomsnittsverdien er lik, er tilfeldig drift, dvs. at utviklinga i ein del periodar har vore markant positiv eller negativ for individuelle verdipapir. I slike tilfelle kan det vera freistande å konkludera med at veksten er systematisk, sjølv om han i realiteten berre er *tilsynelatande*.[13]

Med ulikt sannsyn for ulike utfall

Set no opp ulike sjansar for oppgang og nedgang etter tabellen nedanfor.

Figur 5: Sannsyn for kursoppgang neste periode

VP !	VP 2	VP 3	VP 4	VP 5
0.55	0.45	0.52	0.53	0.43

[13] Ein kan hevda ein får ein *informasjonsfordel* av å eiga eit verdipair, slik at ein får informasjon om prestasjonane litt før resten av marknaden. Held meg her til føresetnadene som er vanlege i finans og føreset at alle aksjonærar er rasjonelle og veldifferensierte, og dermed eig ein andel i alle verdipapir, slik at informasjonen er ålmenn og fordelen dermed fell bort.

Ein kan forventa at slike føresetnader favoriserer ”evolusjonær” framfor ”dynamisk”, sidan kursendringa no over tid gjev korrekt informasjon om framtidige prestasjonar. Ser igjen på sluttresultata for dei ulike strategiane.

Figur 6: Sluttresultat

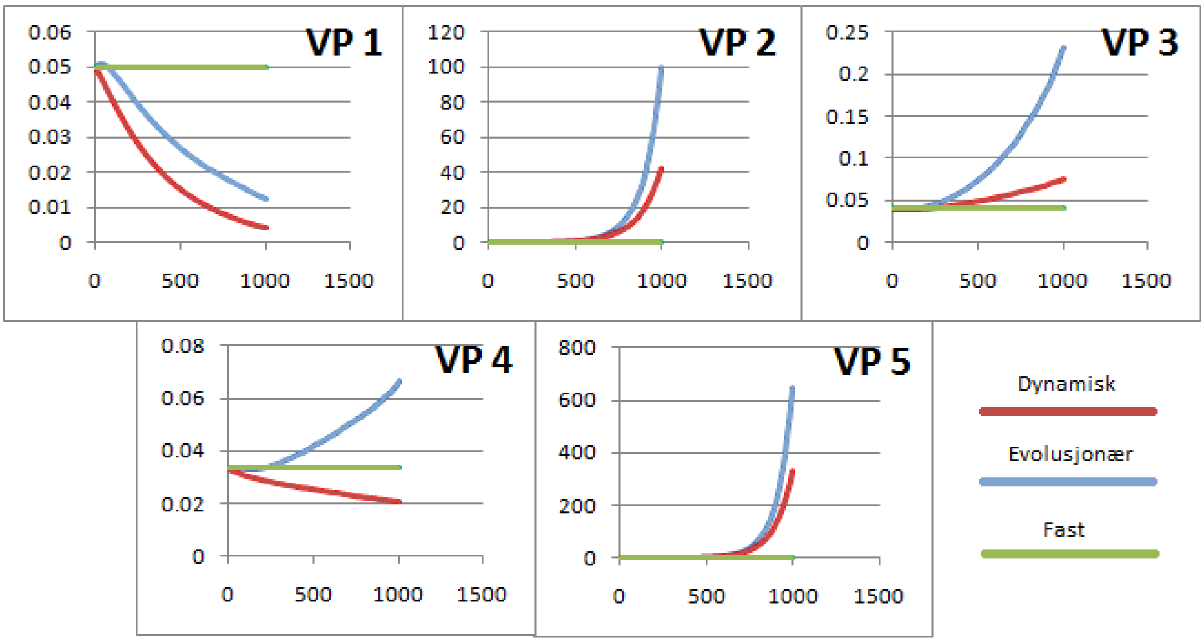
	Forventning	Median	Log-forventning	Positiv avkasting
Faststrategi	124.82	49.13	52.59	99.93%
Evolusjonær	20.58	12.58	12.99	99.68%
Dynamisk	6.02	4.46	4.60	97.58%

Forventninga om at ”dynamisk” gjer det langt dårlegare enn ”evolusjonær”, blir innfridd. Men det som fangar blikket her, er prestasjonane til faststrategien. Medianen er fire gonger høgare, og forventninga seks gonger så stor! Korleis er dette mogeleg, når strategien til ”evolusjonær” er å kjøpa meir av dei som gjer det bra, og mindre av dei som gjer det dårleg?

Eg ser på porteføljeutviklinga, og oppdagar her eit paradoks: Trass i strategien om å kjøpa meir av verdipapir som gjer det bra, endar ein i snitt opp med langt *mindre* andel i det verdipapiret som gjer det best. Berre i 3,3 % av simuleringane endar ein opp med høgare aksjeandel enn det ein startar med. Verdipapira som gjer det dårleg, blir billegare og billegare, og ein endra opp med eit svært høgt tal på aksjar.

Figur 7: Utvikling av aksjeportefølje

t: 1000, s: 4000



Sidan ein kan forventa positiv vekst i verdipapir 1 og verdipapir 4, løner det seg aldri å selja seg ned i dei, og stadig reallokering blir dermed ein kostnad sidan ein må kjøpa dei tilbake til ein høgare pris. Grunnen til at ein aukar andelen av verdipapiret 4, er at sjølv om ein taper på å selja seg ned her, så blir det meir enn kompensert av verdien som blir overførd frå sal av verdipapir 1.

Det optimale i ein slik situasjon, er å investera alt i det verdipapiret som har høgast forventning, altså verdipapir 1.[14] Det er fornuftig i denne situasjonen sidan risikoen for tap i praksis er null. Berre i 1 av 4000 tilfelle endar ein opp med verdi marginalt under startverdien med denne strategien

Figur 8: Faststrategi, verdipapir 1 t: 1000, s:4000

Verdipapir	Forventning	Median	Log-forventning	Positiv avkastning
1	2128.10	593.65	611.7321	99.98%

[14] Ein tilsvarande situasjon er skildra i teksten til Kelly. Situasjonen der er at ein set inn ein ny sum på 1 per tidsperiode. Over tid vil ein dermed få utbetalt forventningsverdien. Kelly, J.L jr. (1956)

Kapittel 3: Gjensidig utelukkande utfall på hesteveddelaupsbanen

Førre kapitlet viste at "evolusjonær" ikkje er optimal strategi i ein perfekt finansmarknad. I dette kapitlet flytter analysen seg bort frå føresetnader som kan skildra børsen, til *gjensidig utelukkande utfall* der hesteveddelaupsbanen er ein meir passande metafor. Her blir Kelly-kriteriet simulert med ei rekkje faststrategiar for å verifisera at dette kriteriet er eit gyldig referansepunkt for ein evolusjonær strategi. I prosessen blir verdien av *differensiering* poengtert og prova empirisk.

I neste omgang blir det testa ut om den evolusjonære formelen konvergerer mot den optimale Kelly-allokeringa. Endringsparameteren *s* blir så analysert for å finna optimal verdi og om parameteren bør gradvis reduserast eller ei. For programkode bak simuleringa, sjå Appendiks A.2.

Gjensidig utelukkande utfall og Kelly-kriteriet

Skal no testa om Kelly-kriteriet gjev optimal vekst eller ikkje. Kelly-kriteriet seier at innsatsen per hest skal tilsvara *vinnarsjansen* hesten har. I tabellen under er kolonnen med Kelly difor korrekt vinnarsjanse. Avkastninga per hest er her sett til 1.05, så uansett kva hest ein satsar på, så vil ein over tid får ei avkastning på 5 %. Med slike gunstige vilkår er det vel umogeleg å gå med tap? Problemet her er å satsa riktig. Ein har berre ein formue – dersom ein satsar alt på ein hest som ikkje vinn, så er ein konkurs, uavhengig av det potensielle utbytet dersom hesten hadde vunne. Dermed er det fornuftig å lytta til visdomen som ligg i uttrykket "å satsa alt på ein hest" og difor differensiera og satsa litt på kvar.

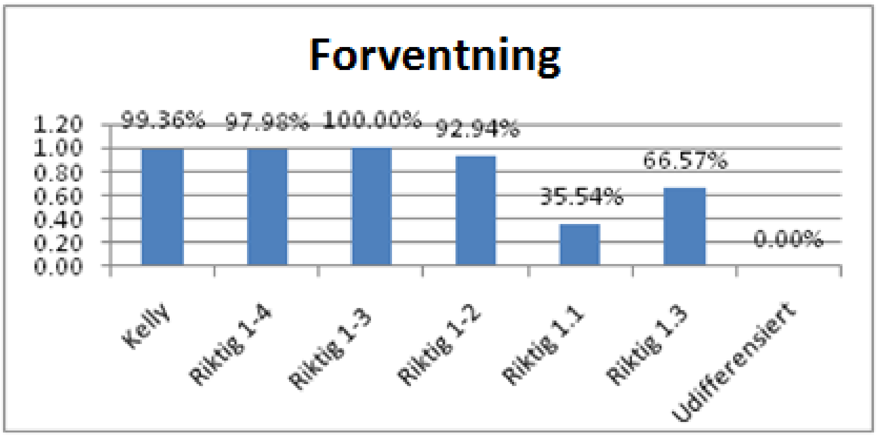
Figur 9: Oversikt over prosentfordeling av innsats for diverse faststrategiar

	Odds	Kelly	Riktig 1-4	Riktig 1-3	Riktig 1-2	Riktig 1.1	Riktig 1.3	Udifferensiert
Hest 1	4.77	22.00%	22.12%	22.41%	23.45%	25.71%	20.95%	24.50%
Hest 2	6.18	17.00%	17.12%	17.41%	18.45%	16.19%	16.19%	19.50%
Hest 3	3.00	35.00%	35.12%	35.41%	33.33%	33.33%	38.10%	37.50%
Hest 4	6.56	16.00%	16.12%	15.24%	15.24%	15.24%	15.24%	18.50%
Hest 5	10.50	10.00%	9.52%	9.52%	9.52%	9.52%	9.52%	0.00%

Dersom ein har avkastning på 5 %, så vil det seia at ein har ein *feilmargin* på 5 %. Feilmarginen seier kor mykje mindre enn korrekt sannsyn ein kan satsa utan å gå i tap. I tabellen over, har strategien "Riktig 1-4" satsa relativt mindre på hest 5, og har fjerna *profittmarginen* slik at utbetalinga blir 1 *om* han vinn. Dei overskytande midlane er fordelte på dei andre 4 hestane. Dermed *spekulerer* strategien på at hest 5 ikkje vinn, og ein tener meir enn Kelly om dette slår til, mindre når han vinn. Tilsvarande tankegang ligg bak ”Riktig 1-3” og ”Riktig 1-2”, der profittmarginen er fjerna frå 2 og 3 hestar. Riktig ”1.1” satsar heile marginen på hest 1, og ”Riktig 1.3” gjer det same på hest 3. ”Udifferensiert” har ikkje tru på hest 5 i det heile, og går konkurs om han skulle vinna.

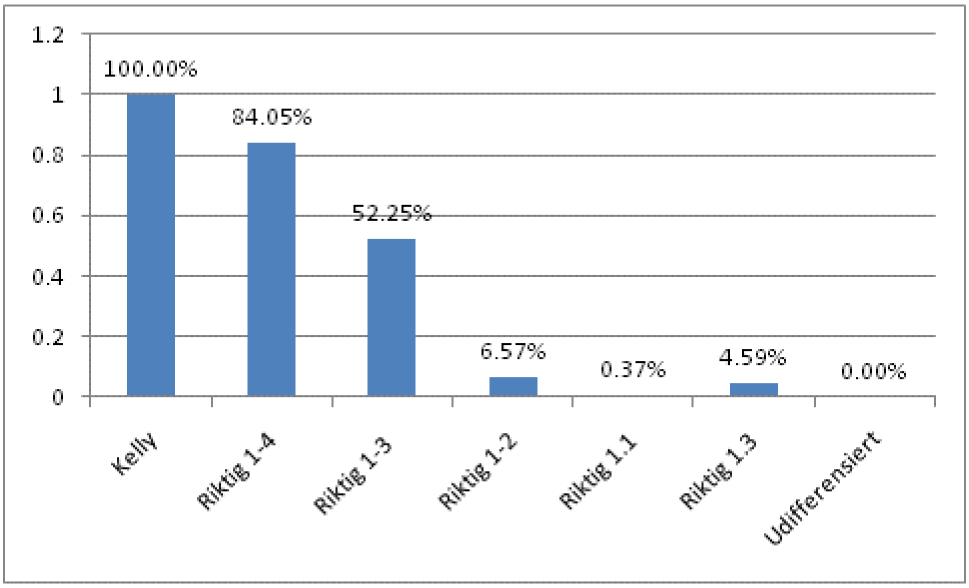
Korleis presterer så dei ulike strategiane over tid?

Figur 10: Forventning relativ til største verdi t: 1500, s: 1000



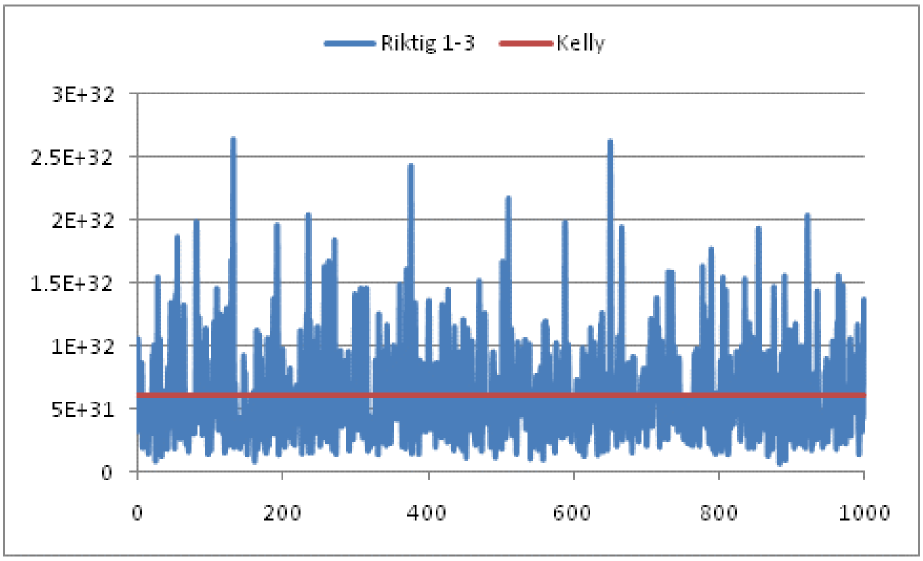
Igjen får ein eit litt inkjeseiande resultat av å sjå på forventningsverdien, der det ikkje rom for solide konklusjonar om kva strategi som er best. Det som er sikkert, er at det er katastrofalt å vera udifferensiert over tid. Maksimumslevetida til denne strategien var 69 periodar for 4000 simuleringar, etter dette har alltid strategien gått konkurs.

Figur 11: Median relativ til størst verdi t: 1500, s: 1000



Ser ein på median, er derimot resultata klåre. Det som er Kelly sin store styrke, er *stabiliteten*. Med lik avkastning for alle hestar, stadfester simuleringa påstanden til Kelly om at utviklinga til strategien er ein rein eksponentialfunksjon av avkastningsraten.[15] Dermed er det ikkje nokon skilnad i resultata mellom simuleringane, og forventninga og medianen har same verdien. Figuren nedanfor viser ei samanlikning av sluttverdiane til Kelly og "Riktig 1.3", som fekk størst forventingsverdi.

Figur 12: Sluttresultat, Kelly & "Riktig 1-3" t: 1500, s: 1000



Ein ser her at ein ganske ofte får verdiar som er godt over Kelly, men oftare verdiar som er lågare.

Tabellen nedanfor viser den relative prestasjonen i snitt i høve til Kelly for kvar strategi, og kor mange gonger strategien får høgare verdi enn Kelly.[16]

Figur 13: Relative prestasjonar til Kelly t:1500, s:1000

	Riktig 1-4	Riktig 1-3	Riktig 1-2	Riktig 1.1	Riktig 1.3
Prosent av Kelly	82.59%	54.23%	6.97%	0.38%	4.84%
Gonger større	38.70%	29.20%	12.30%	4.40%	10.80%

Ein kan argumentera for at valet av strategi er snakk om preferansar ei stund, men over veldig lang tid så er Kelly å føretrekkja uavhengig av preferansar.

Ved å samanlikna vekstbanen til dei ulike strategiane mot Kelly, er det tydeleg at Kelly vil gjera det betre over tid.

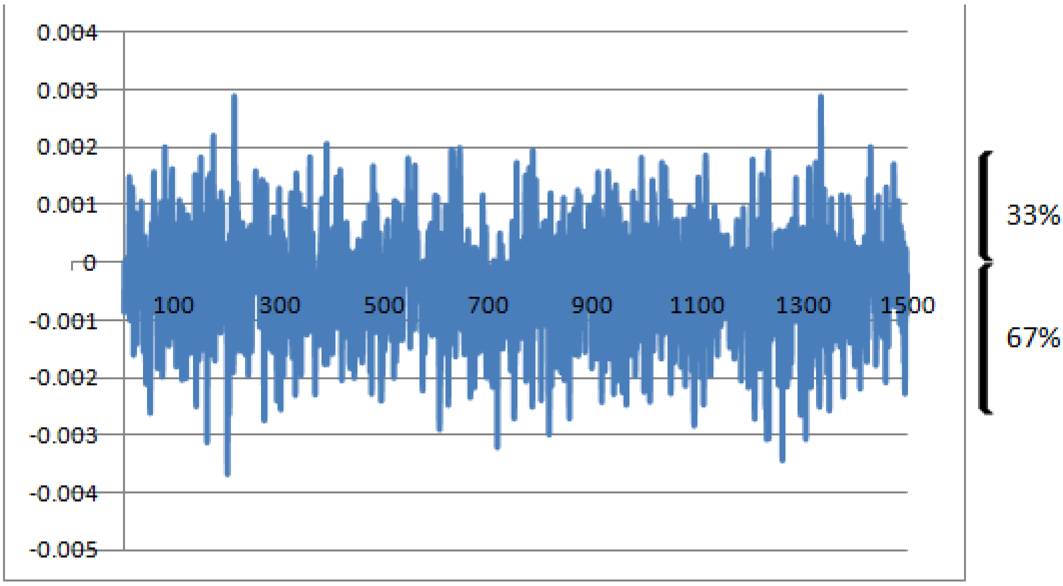
[15] Kelly, J.L jr. (1956)
[16] Rekna ut med den naturlege logaritmen av strategien dividert på Kelly, Ln(strategi / Kelly)

Figur 14: Relativ vekstbane til Kelly t: 1500, s:1000

Relativ til Kelly	Riktig 1-4	Riktig 1-3	Riktig 1-2	Riktig 1.1	Riktig 1.3	Udifferensiert
Større vekst	40.87%	33.00%	16.93%	7.33%	14.40%	0.67%
Vekstdifferanse, snitt	-0.000128	-0.000409	-0.001778	-0.003718	-0.002019	-0.047928

Figuren under viser samanlikning av vekstbanen med strategien ”Riktig 1-3” grafisk.

Figur 15: Vekstbane ”Riktig 1-3” relativ til Kelly[17] t: 1500, s:1000



Simulering av hesteveddelaup

Kelly er no etablert som optimal strategi. Neste steg blir dermed å testa ut om strategien ”evolusjonær” faktisk konvergerer mot sann verdi. Deretter blir endringsparameteren kontrollert grundig, med å avdekkja optimalverdien som mål.

Konvergering

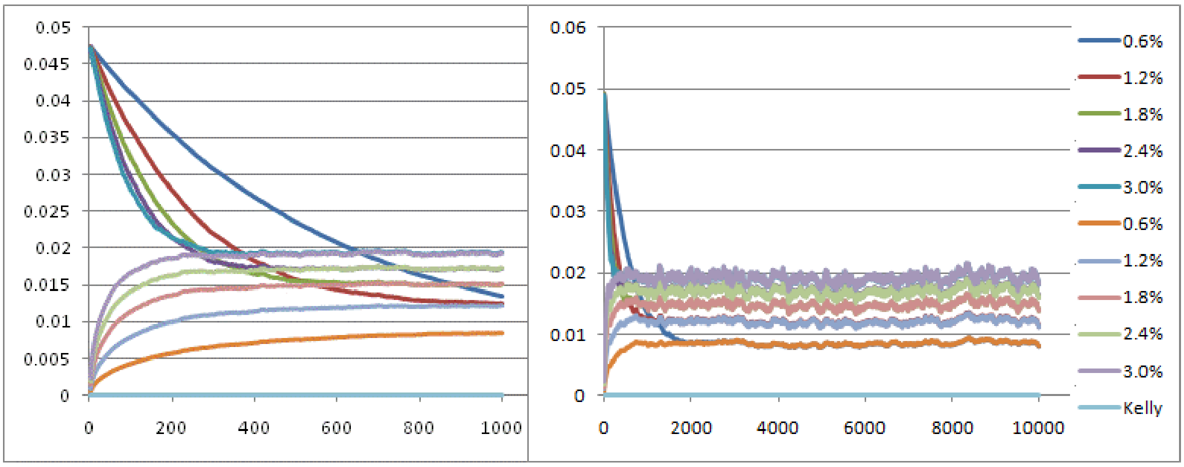
Me skal no sjå om den evolusjonære strategien faktisk konvergerer mot Kelly og dermed klarer å avdekkja sann verdi. Simuleringa undersøkjer samstundes skilnaden på ulike endringsparametrar. Lagar 5 strategiar som har endringsparameter frå 0.6 % - 3 %, med steg på 0.6 %. Desse strategiane har ingen kunnskapar om hestane, så det rasjonelle er då å investera like mykje på kvar hest. Dersom desse strategiane konvergerer mot Kelly, så er *konvergeringstesen* verifisert. For å kontrollera om det er nokon kostnad med den

[17] Formel: logaritmiske veksttal, Strategi - Kelly

evolusjonære strategien *etter* at ein har nådd Kelly, startar 5 ekvivalente strategiar frå dette utgangspunktet.

Figurane nedanfor viser gjennomsnittleg utvikling for strategiane. Grafane viser samla feilallokering i høve til korrekt odds. Vinnarsjansen til hestane er randomisert per simulering, med minimum vinnarsjanse på 10 %.

Figur 16: Evolusjonære strategiar og konvergering (y-akse: differanse frå Kelly, x-akse: tid) t: 10000, s: 100

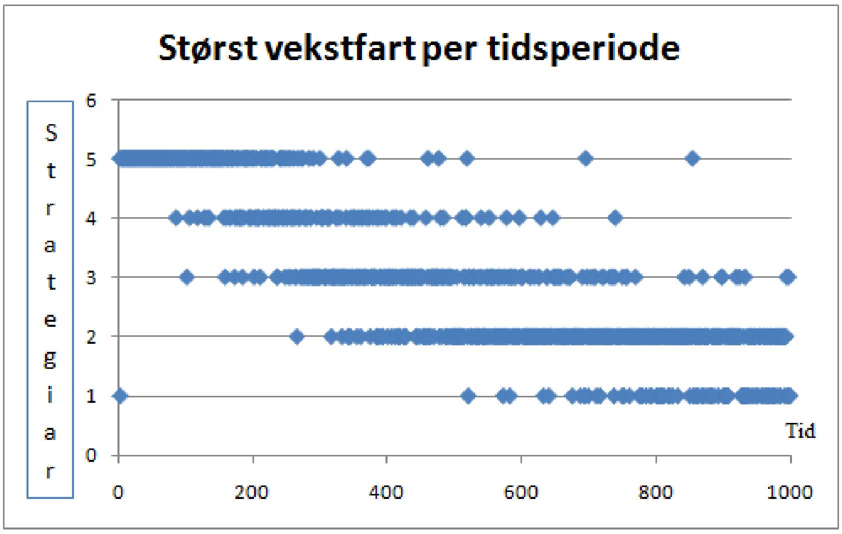


Grafane viser at alle strategiar med feil startpunkt konvergerer, men di lågare endringsparameteren er, di lengre tid tek det. Samstundes *divergerer* strategiane som startar ved Kelly. Etter ei viss tid konvergerer dei ekvivalente strategiane og stabiliserer seg eit stykke frå Kelly. Denne stabiliseringslina, som her blir definert som *endringskostnaden* til strategien, er lengre frå Kelly di større endringsparameteren er. Dersom ein gjennomfører *for* store endringar per ny realisering, så skyv ein vinnarhesten for langt fram og taparhestane for langt tilbake, slik at snittavstanden aldri blir kortare.

Me har dermed to motstridande omsyn. På den ein sida, så er det bra med ein høgt endringsparameter, slik at ein fort kjem seg bort frå den feilallokeringa ein har frå starten av. Men samstundes stabilierser ein seg då lenger borte frå Kelly. Det synest difor fornuftig å ha ein *minkande* endringsparameter.

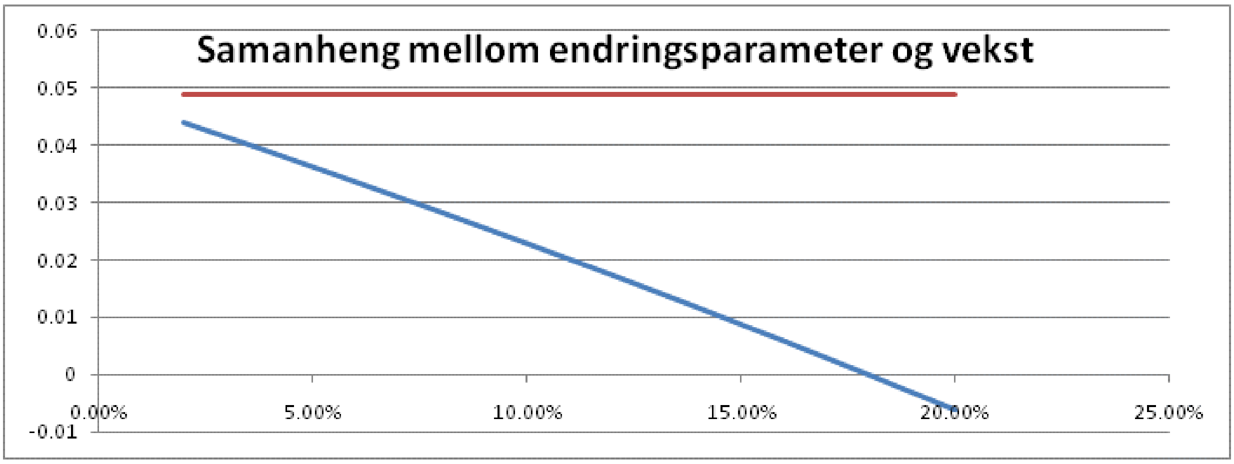
Grafen nedanfor viser kva strategi som har høgast *vekstfart* for kvar tidsperiode.

Figur 17: Størst vekstfart i ulike tidsperiodar t: 1000, s: 1000



Grafen stadfester her at det ideelle er ein minkande endringsparameter dersom ein kontinuerleg ynskjer høgast mogeleg vekst.

Figur 18: Samanheng mellom endringsparameter og vekst t: 1000-3000, s: 300



Her ser ein samanhengen mellom endringsparameteren og vekstfart over tid. Figuren viser at endringskostnaden i snitt etter 1000 periodar er aukande di lenger borte ein er frå Kelly.

Det er viktig å hugsa på at ein i realiteten aldri kjenner korrekt sannsyn, og at det typisk er skiftande. I så måte kan ein høgare endringsparameter enn det absolutte minimum vera fornuftig, sidan ein då er meir fleksibel for endringar.

Eit anna poeng er at ein som rasjonell investor bør starta læringsprosessen *før* ein investerer, sidan veksten i starten ofte er negativ.[18]

[18] For figur over vekstbanen til ein evolusjonær strategi, sjå Appendiks B.3

Kapittel 4: Realøkonomiske investeringsobjekt med korrelasjon

Skal no undersøka korleis formelen gjer det når det er *samvariasjon* eller *korrelasjon* mellom dei ulike investeringnsobjekta. Fyrst blir den evolusjonære strategien testa ut mot den klassiske minimum-variansporteføljen ein får av å løysa Markowitz-problemet[19], i tillegg til ein faststrategi. Deretter så blir avkastninga til nokre investeringsobjekt variert for å sjå på kva verknad dette får på investeringsallokeringa til desse strategiane. Den evolusjonære formelen vil venteleg konvergera mot ei andelsallokering som i hesteveddelaupseksempelet. Den blir så sett inn som faststrategi i konkurranse med dei som tidlegare er sette opp pluss andelsallokeringa som "problemløysar"[20]-programmet i Excel kjem fram til for å maksimera forventninga.

Alternative strategiar

Set opp Markowitz-problemet slik det er omtala i Luenberger som alternativ.[21] Denne teorien gjev to porteføljar som dannar grunnlag for alle *effektive porteføljar*, definert som porteføljar som har lågast varians for ei gjeven forventning. Konstruksjonen av ei brei rekkje med slike porteføljar er avhengig av at *kortsal* er tillate, men det er det ikkje her. Løysinga på problemet gjev oss likevel den porteføljen som *minimerer variansen*, og den blir brukt i analysen. Føresetnadene denne teorien er konstruert for, er det ikkje teke omsyn til. Modellen er kasta ut på djupt vatn og brukt fordi han er ein vanleg standard i porteføljeteori, som *skal* ta omsyn til korrelasjon og forventning. Dermed blir prestasjonen til modellen interessant i seg sjølv.
I tillegg blir det igjen lagt til ein faststrategi med lik, fast andel i kvart investeringsobjekt. Denne allokeringa er òg utgangspunktet for den evolusjonære strategien.

Simuleringa

Ein tenkjer seg ein situasjon innan skipsfart der skipa går i ulike konvoiar i ein krigssituasjon.[22]I kvar overfart kan konvoiane bli utsette for torpedoangrep, men det er alltid minst eit skip som overlever. For å forenkla analysen finst det berre ei standardisert vare som blir transportert. I denne situasjonen er investeringa annleis enn i ein finansiell marknad,

[19] Luenberger(1998), kap. 6 & 15, sjå Appendiks B.2 for problemformulering
[20] Kanskje betre kjent som "Solver"
[21] Det blir ikkje vidare utleitt her – dette ein vanleg standard i finansiell teori.
[22] Det kunne òg vore ein situasjon med åkrar forskjellige stader i verda som blir utsette for randomiserte klimatiske tilhøve.

fordi risikoen er større per investering samstundes som ein får utbetaling av eventuelt vinst på kvart tidspunkt.

I simuleringa blir avkastninga for heile marknaden sett til 1 % per overfart. Di færre skip som kjem seg vel i hamn, di større er vinsten for dei som klarer seg. Dermed er det i utgangspunktet *negativ korrelasjon* mellom avkastninga til dei ulike investeringane.

$$X_{a,t+1} = \begin{cases} \left(\dfrac{avkastning}{andel, skip\ vel\ i\ hamn}\right) & dersom\ framkome \\ 0 & dersom\ torpedert \end{cases}$$

Men dei fleste skipa går saman i konvoiar, anten for å redusera risikoen eller av andre praktiske årsaker. Dermed får dei positiv korrelasjon sidan dei som oftast kjem vel i hamn samstundes.

Konstruerer fyrst ei kovariansmatrise ved å køyra nokre simuleringar. Kovariansen mellom investeringsobjekta frå kvar periode til den neste[23] blir registrert og nytta til å løysa Markowitz-problemet.[24]

Nedanfor står føresetnadene for simuleringa. For programkoden bakom, sjå Appendiks A.3

- Set opp lik avkastning på 1.01 per periode slik det er vist tidlegare
- Simulerer 10 ulike skip som er organiserte som konvoiar vist i figuren nedanfor.
- 3 ubåtar kan råka dei 4 ulike konvoiane. Ein konvoi kjem seg dermed alltid gjennom. Det er mogeleg at alle ubåtar går etter same konvoien, då trekninga er frå ei tilfeldig og uavhengig simultanfordeling.
- Sannsynet for at ein ubåt råkar 2 av skipa i ein konvoi er 75 %, alle saman 24 %, og berre 1 er 1 %. Dermed gjev deltaking i konvoiar med meir enn 1 skip investeringsobjekta større sannsyn for suksess (sjølv om det er marginalt for konvoiar på 2). På den andre sida er sannsynet for å stå igjen aleine og få heile potten òg mindre.

---

[23] Periode t til t +1
[24] Som dermed har ein informasjonsfordel i høve til den evolusjonære. NB! Løysinga på dette problemet er identisk med den andelsfordelinga ein får dersom ein køyrer minimumsproblemet i ”problemløysar” i Excel.

	Skip 1	Skip 2	Skip 3	Skip 3	Skip 4	Skip 5	Skip 6	Skip 8	Skip 9	Skip 10
Konvoi 1	1	1	1							
Konvoi 2				1	1					
Konvoi 3						1	1	1	1	
Konvoi 4										1

I denne simuleringa gjeld det dermed, som i hesteveddelaupseksempelet, å vera differensiert for å unngå å tapa heile formuen.

Sjølv om somme investeringsobjekt har forventa negativ avkastning, så fungerer dei som *forsikringsobjekt*. Forventningsverdiane for skipa er presenterte nedanfor.

Figur 19: Forventningsverdiar S: 500000

Skip 1	Skip 2	Skip 3	Skip 4	Skip 5	Skip 6	Skip 7	Skip 8	Skip 9	Skip 10
1.029	1.058	1.028	0.821	0.810	1.127	1.074	1.087	1.114	0.955

Simulering: Resultat

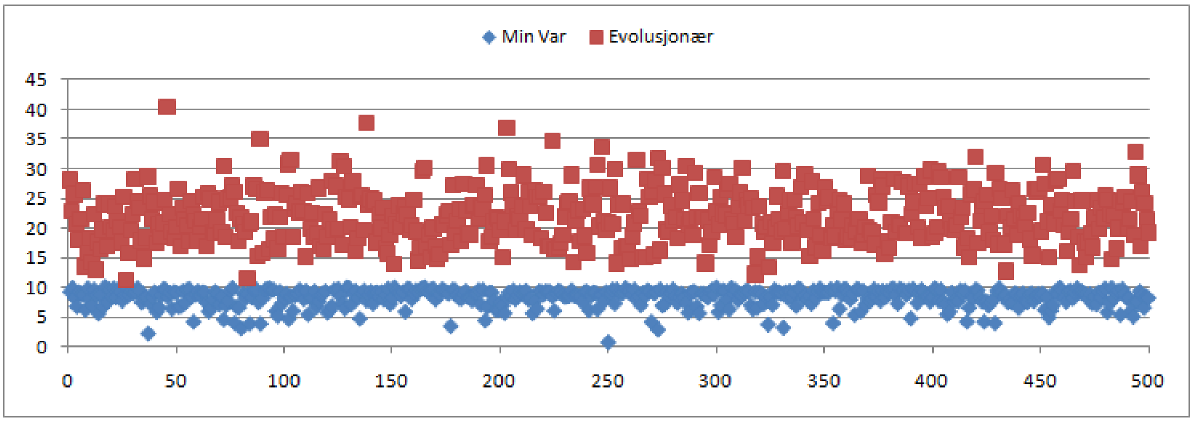
Tabellen nedanfor viser sluttformuen til dei ulike strategiane etter 1000 periodar. Den fyrste rekkja er absoluttverdiar, den andre er den naturlege logaritmen av sluttformuen dividert på startformuen som er 1. Ein ser her at den evolusjonære strategien gjer det svært godt. Men det som er mest overraskande, er at det *relative standardavviket*, dvs. standardavviket delt på forventninga, ikkje er markant høgare enn det ein får i minimum-variansporteføljen for dei logaritmiske tala.

Figur 20: Sluttformue t: 1000, s: 500

	Fast	Evolusjonær	Min Var	Fast	Evolusjonær	Min Var
Forventning	6945.21982	7.5105E+14	7352.29804	8.256	21.990	8.310
Varians	29905795.9	2.2844E+32	32884117.4	2.106	19.956	2.136
StndAvvik	5468.61919	1.5114E+16	5734.46749	1.451	4.467	1.461
StAv/Forv	0.7874	20.1243	0.7800	0.1758	0.2031	0.1759

Den store skilnaden mellom ”Stnd/Forv” på vanlege og logaritmiske tal er nokre ekstremverdiar. Ein kan konkludera med at reduksjonen på ”StAv/Forv” til minimum-variansporteføljen ikkje forsvarar den markante ulikskapen i forventning. Dette blir tydeleg når ein ser på prestasjonane grafisk – investorar takkar nok gladeleg ja til litt høgare variasjon dersom det utelukkande er på oppsida.

Figur 21: Sluttformue, ulike simuleringar t: 1000, s: 500



Med variasjon i avkastning

Legg så til variasjon i avkastninga for skip 2, 4, 6 og 8, slik at verdien på investeringa har likt sannsyn per overfart til å auka eller bli redusert med 15 %. Korleis reagerer strategiane på dette? Lagar fyrst ei ny kovariansmatrise og løyser Markowitz-problemet. Køyrer så simuleringa, og får andelsfordelinga i snitt. Ser på ulikskapen frå førre simulering.

Figur 22: Endring i investeringsandelar

Volatilitet	Vanleg	Endring	V	Evol. Vol	Evol.	Endring
0.10236	0.09999	2.37%		0.10197	0.10184	-0.12%
0.09429	0.09998	-5.69%	*	0.10085	0.10178	0.91%
0.10392	0.09999	3.93%		0.10089	0.10212	1.20%
0.01504	0.09992	-84.95%	*	0.06874	0.06752	-1.81%
0.18692	0.10001	86.91%		0.06883	0.06766	-1.73%
0.09186	0.10003	-8.16%	*	0.11857	0.11886	0.24%
0.10357	0.10003	3.54%		0.11859	0.11800	-0.50%
0.10246	0.10003	2.42%		0.11854	0.11902	0.40%
0.10270	0.10004	2.67%		0.11734	0.11770	0.31%
0.09687	0.09998	-3.11%	*	0.08568	0.08550	-0.21%

Ein ser at minimum-variansporteføljen reduserer investeringane i verdipapir med variasjon vesentleg, men den evolusjonære teorien ikkje har nokor endring, berre tilfeldig variasjon.

Korleis får dette utslag på prestasjonane?

Figur 23: Sluttformue

	Fast	Evolusjonær	Min Var	Fast	Evolusjonær	Min Var
Forventning	1628014.08	9.4197E+17	568594.021	13.478	25.223	12.557
Varians	1.0582E+13	4.3863E+38	6.858E+11	1.694	23.588	1.453
StndAvvik	3253045.27	2.0943E+19	828132.525	1.301	4.857	1.206
StAv/Forv	1.9982	22.2336	1.4565	0.0966	0.1926	0.0960

Ein ser her at begge har større forventningsverdi, men standardavviket er omtrent uendra, for minium-variansporteføljen går det faktisk vesentleg ned. Det mest interessante her er likevel den relative forbetringa. Den evolusjonære strategien har ei forventningsforbetring på 14.7 %, medan minimum-variansporteføljen forbetrar seg med heile 51.11 %! Det kan dermed verka fornuftig å fylgja dette eksempelet og redusera investeringa noko i verdipapir med varierande avkastning[25]

Testing av funna til den evolusjonære teorien

Den førre simuleringa gav i snitt den evolusjonære strategien andelsfordelinga vist nedanfor.

Figur 24: Andelsfordeling etter 1000 periodar, evolusjonær t: 1000, s: 500

Skip 1	Skip 2	Skip 3	Skip 4	Skip 5	Skip 6	Skip 7	Skip 8	Skip 9	Skip 10
0.1020	0.1009	0.1009	0.0687	0.0688	0.1186	0.1186	0.1185	0.1173	0.0857

Testar no korleis denne allokeringa gjer det som faststrategi, for å sjå om denne fordelinga er optimal. For å få eit breiare samanlikningsgrunnlag, legg eg kovariansmatrisa frå simuleringa med varierande avkastningsrate inn i Excel og løyser maksimeringsproblemet i tilleggsprogrammet "problemløysar"[26]. Dette gjev andelsallokeringa som er vist nedanfor. Det er verdt å merka seg at ingenting er investert i "Skip 5".

Figur 25: Andelsallokering frå "problemløysar"

Skip 1	Skip 2	Skip 3	Skip 4	Skip 5	Skip 6	Skip 7	Skip 8	Skip 9	Skip 10
0.0747	0.1502	0.1249	0.0637	0.0000	0.2026	0.1706	0.0414	0.1086	0.0633

Dette fører til at strategien endar med å gå konkurs i 7 av 500 tilfelle. Sidan logaritmar av talet 0 ikkje gjev meining, blir det veldig problematisk å samanlikna denne strategien med dei andre for logaritmiske verdiar. Logaritmen av tal som er nær null, gjev høge, negative tal. Når snittet og variansen for den logaritmiske verdien skal reknast ut for "Max Solv", har eg sett inn verdien -228 når formuen har vore null, altså ved konkurs. Dette er det fyrste heile, negative talet som gjev verdien null i likninga e^X [27]. Dette er ikkje korrekt matematisk, men eg set det opp slik her for å visa at variansen for ein slik strategi blir enorm i logaritmiske termar. Resultata blir viste nedanfor.

---

[25] Men dette blir ikkje testa vidare ut her.

[26] Omtala som "Max Solv" i figurane nedanfor

[27] $e^{-227} \approx 2.6x10^{-99}$, $e^{-228} \approx \mathbf{0}$. Alle negative tal mindre enn -228 gjev og 0.

Figur 26: Sluttformue t: 1000, s: 500

	Evol. Fast	Evol	Max Solv	Min Varians	Evol. Fast	Evol	Max Solv	Min Varians
Forventning	1.5149E+12	2.9513E+14	4.265E+17	23202.4529	24.882	21.940	24.408	9.980
Varians	6.0923E+25	1.8692E+31	2.8544E+37	80773948.6	6.952	20.612	946.232	0.147
StndAvvik	7.8053E+12	4.3235E+15	5.3427E+18	8987.43281	2.637	4.540	30.761	0.383
StAv/Forv	5.1522	14.6492	12.5266	0.3873	0.1060	0.2069	1.2603	0.0384

Ein ser her at den evolusjonære faststrategien får den høgaste forventningsverdien i logaritmiske termar. Dermed kan ein konkludera med at den evolusjonære strategien konvergerer mot den strategien som er optimal for *jamn*[28] maksimering av formue av dei som er simulerte her.

Figuren nedanfor viser sluttformuen til dei ulike strategiane grafisk.

Figur 27: Sluttformue, ulike simuleirngar t: 1000, s: 500

[28] Ikkje ved vanleg forventningsverdi, men logaritmisk.

Konklusjon

Denne empiriske analysen har vist veikskapane og styrken til ein evolusjonær porteføljestrategi. I fyrste omgang kom han dårleg ut i ein perfekt finansmarknad, men føresetnaden her var at prisutviklinga konsekvent var heilt tilfeldig. Det er ikkje realistisk på lengre sikt at prisen aldri fortel noko om prestasjonane til verdipapiret. Det som er viktig, er å vurdera nøye *validiteten* i prisutviklinga og ikkje reallokera for ofte, av di analysen viste at det i visse tilfelle gjev vesentlege tap. Konklusjonen på problemstillinga blir difor at strategien ikkje kan brukast sjølvstendig som porteføljeteori – ein må vurdera marknadssituasjonen nøye og sjå på informasjonen ein får med kritiske augo. Resultata var likevel lovande nok til at det er interessant å testa ei slik tilnærming nærmare ut med historisk børshistorikk, der ein òg kanskje utvidar modellen slik at han tek omsyn til statistikk.[29]

[29] For sjølv om ikkje investoren har kjennskap til dette, kan programmet leggja det inn.

Appendiks A: Programkode

Mykje av kodinga er infrastruktur som ikkje er av særleg interesse. Limer difor berre inn og forklarer koden som er vesentleg for simuleringsresultata, i hovudsak allokeringa og utviklinga av formuen.

A.1

Kode: Perfekt finansmarknad, kapittel 2

Fyrste del av koden er ei *randomisering* av utfall for neste tidsperiode. I tråd med føresetnaden om at verdipapira er uavhengige og har same sannsynfordeling, blir denne prosedyren gjennomførd i tur for kvart verdipapir. VinnarSjanse(Verdipapir) er her felles og har verdien 0.5 , slik at sannsynet for oppgang og nedgang i kursen er lik. Her er det og mogeleg å definera individuelle vinnarsjansar, som blir gjort seinare i kapittel 2, sjå figur 5 side 15. Koden "Rnd" lagar eit tilfeldig nummer mellom 0 og 1.[30] Verdipapira aukar med basen til den naturlege logaritmen opphøgd i endringsparameteret.

```
Dim terningKast As Single
terningKast = Rnd
If terningKast > (1 - VinnarSjanse(VerdiPapir)) Then
    VU(VerdiPapir) = VU(VerdiPapir) * Exp(VerdiVotalitet)
    Tap(VerdiPapir) = False
ElseIf terningKast < (1 - VinnarSjanse(VerdiPapir)) Then
    VU(VerdiPapir) = VU(VerdiPapir) * Exp(-VerdiVotalitet)
    Tap(VerdiPapir) = True
    AlleTap = AlleTap + 1
End If
```

Variabelen "AlleTap" held styr på kor mange variablar som går ned og opp. Dersom alle går anten ned eller opp, så blir det inga reallokering, som koden under viser. Ein hoppar då til slutten av koden, definert som "SluTT".

```
If AlleTap = 5 Then
    GoTo SluTT
ElseIf AlleTap = 0 Then
    GoTo SluTT
End If
```

I uttrykket "For i = 1 to 5" ... "Next i" går koden gjennom alle 5 verdipapira, uttrykket tilsvarar dermed summeringsteiknet $\sum_{i=1}^{5} x_i$.

[30] Formelt sett er det berre kvasi-randomisert, sidan datamaskina trekkjer frå ei talrekkje som er definert på førehand.

Under er kodinga for reallokering per periode.

```
Dim i As Single, c As Single
For i = 1 To 5
    Formue(1) = Formue(1) + Strategi(1, i) * VU(i)
    Formue(2) = Formue(2) + Strategi(2, i) * VU(i)
    If Tap(i) = True Then
        Bank(1, i) = VU(i) * Strategi(1, i) * (1 - Exp(-EndringsParameter))
        Budsjett(1) = Budsjett(1) + Bank(1, i)
        Strategi(1, i) = Strategi(1, i) * Exp(-EndringsParameter)
        VinnarBrøk(2, i) = Log((Strategi(2, i) * Exp(EndringsParameter)) / Strategi(2, i))
        VinnarTotal(2) = VinnarTotal(2) + VinnarBrøk(2, i)
    ElseIf Tap(i) = False Then
        Bank(2, i) = VU(i) * Strategi(2, i) * (1 - Exp(-EndringsParameter))
        Strategi(2, i) = Strategi(2, i) * Exp(-EndringsParameter)
        Budsjett(2) = Budsjett(2) + Bank(2, i)
        VinnarBrøk(1, i) = Log((Strategi(1, i) * Exp(EndringsParameter)) / Strategi(1, i))
        VinnarTotal(1) = VinnarTotal(1) + VinnarBrøk(1, i)
    End If
Next i
```

I tråd med føresetnadene i kapittel 2, er det motsett allokering for evolusjonær(1) og dynamisk(2). Evolusjonær sel seg ned dersom verdipapiret gjer det dårleg, altså dersom "Tap(i) = True". Strategien blir då redusert med basen til den naturlege logaritmen opphøgd i endringsparameteret som er definert til 0.05, "Strategi(1, i) * Exp(-EndringsParameter) ". Verdien av denne reduksjonen blir lagra i variabelen "Bank(1,i) = VU(i) * Strategi(1,i) * (1-Exp(-Endringsparameter))" . VU(i) er verdien til verdipapiret på dette tidspunktet. Alle summane av sal av verdipapira som går med tap, blir vidare samla opp i variabelen "Budsjett(1) = Budsjett(1) + Bank(1,i)".

Sidan "dynamisk" gjer det motsette, skal han kjøpa seg opp i dette tilfellet. Oppkjøp blir ikkje gjort før endeleg budsjett er klart, dvs. før prestasjonane til alle verdipapir er registrerte. Det som blir gjort her, er å registrera kor mykje investeringa skal aukast med i kvart verdipapir gjennom "VinnarBrøk(2,i) = Log((Strategi(2,i) * Exp(EndringParameter)) / Strategi(2,i))". Dette blir så samla saman i ein totalbrøk "VinnarTotalt(2) = VinnarTotal(2) + VinnarBrøk(2,i)". Den *relative* investeringsauken for kvart verdipapir kan no korrekt registrerast gjennom å endra brøken til kvart verdipapir med omsyn til totalbrøken over slik: "VinnarBrøk(1, i) = VinnarBrøk (1,i) / VinnarTotal(1)".

```
For i = 1 To 5
    If Tap(i) = False Then
        If Not Budsjett(1) = 0 Then
            VinnarBrøk(1, i) = VinnarBrøk(1, i) / VinnarTotal(1)
            Strategi(1, i) = Strategi(1, i) + (Budsjett(1) * VinnarBrøk(1, i)) / VU(i)
        End If
    End If
    If Tap(i) = True Then
        If Not Budsjett(2) = 0 Then
            VinnarBrøk(2, i) = VinnarBrøk(2, i) / VinnarTotal(2)
            Strategi(2, i) = Strategi(2, i) + (Budsjett(2) * VinnarBrøk(2, i)) / VU(i)
        End If
    End If
Next i
```

Så kan strategiane endrast korrekt i samsvar med brøken over, tilgjengeleg budsjett og prisen på det spesifikke verdipapiret slik: ”Strategi(2,i) = Strategi(2,i) + (Budsjett(2) * VinnarBrøk(2,i)) / VU(i)”.

A.2

Kode: Gjensidig utelukkande utfall på hesteveddelaupsbanen, kapittel 3

Fyrst blir vinnaren trekt i ein randomisert prosess

```
Function Randomiser(tiD, senaRio)
Dim telJar
telJar = (senaRio - 1) * Reps + tiD - 1
Select Case Rnd
    Case 0 To vnrSjanse(1)
        vnrHest = 1
    Case vnrSjanse(1) To (vnrSjanse(1) + vnrSjanse(2))
        vnrHest = 2
    Case (vnrSjanse(1) + vnrSjanse(2)) To (vnrSjanse(1) + vnrSjanse(2) + vnrSjanse(3))
        vnrHest = 3
    Case (vnrSjanse(1) + vnrSjanse(2) + vnrSjanse(3)) To (vnrSjanse(1) + vnrSjanse(2) + vnrSjanse(3) + vnrSjanse(4))
        vnrHest = 4
    Case Is > (vnrSjanse(1) + vnrSjanse(2) + vnrSjanse(3) + vnrSjanse(4))
        vnrHest = 5
End Select
VinnarHistorie(telJar) = vnrHest
End Function
```

Definisjonen av ”vnrSjanse” varierer i dette kapittelet. I fyrste omgang er det definert i figur 9 på s. 18. Når konvergeringa skal testast ut blir ”vnrSjanse” trekt tilfeldig med minimumsverdi på 0.1, sjå ”RandomiserVinnarsjanse” under.

Endring av formue

```
StrategiFormue(kundeId, telJar(1)) = StrategiFormue(kundeId, telJar(2)) * StrategiProsess(kundeId, vnrHest, telJar(2))
                                     * HestOdds(vnrHest, kundeId)
```

Når ”vnrHesten” er funnen, så reknar ein ut kor stor formuen har vorte. Ein tek formuen ein hadde i førre periode (”StrategiFormue”) multiplisert med andelen investert på vinnarhesten (”StrategiProsess”) multipliert med oddsen for denne hesten. (”HestOdds”)

Kode for reallokering

Koden ”StratDynStat (kundeId)” avgjer om strategien reallokerer eller ikkje. Den er sett til ”= True” for evolusjonære strategiar, og ”=False” for faststrategien Kelly. Fyrste del av koden reduserer andelen for dei hestane som ikkje vinn, ”i <> vnrHest”. Reduksjonen er definert som endringsparameteren dividert på 4, som er talet på taperhestar, slik: ”StrategiProsess(KundeId, i, telJar(2)) * Exp(-endringsVar / 4)”. Summen for kvar hest blir samla inn under variabelen ”budsjett”, som så blir lagd til vinnarhesten under. Summen av andelar lik 1, og ein satsar heile formua kvar periode.

```
If StratDynStat(kundeId) = True Then
    For i = 1 To 5
        If i <> vnrHest Then
            budSjett = budSjett + StrategiProsess(kundeId, i, telJar(2)) * (1 - Exp(-endringsVar / 4))
            StrategiProsess(kundeId, i, telJar(1)) = StrategiProsess(kundeId, i, telJar(2)) * Exp(-endringsVar / 4)
        End If
    Next i
    StrategiProsess(kundeId, vnrHest, telJar(1)) = StrategiProsess(kundeId, vnrHest, telJar(2)) + budSjett
Else
    For i = 1 To 5
        StrategiProsess(kundeId, i, telJar(1)) = StrategiProsess(kundeId, i, telJar(2))
    Next i
End If
```

Faststrategien blir sett lik førre periode.

Slik går runddansen om og om igjen. Vinnarhesten blir trekt, formuen utbetalt, fordelinga av innsats omplassert. Nedanfor er òg koding for randomisering av vinnarsjansen

```
Sub RandomiserVinnarsjanse(senaRio)

Randomize
Strategiar = Sheets(1).Range("f6").Value
Dim i As Single, a As Single, samLa
For i = 1 To 5
    vnrSjanse(i) = Rnd
    samLa = samLa + vnrSjanse(i)
Next i
For i = 1 To 5
    vnrSjanse(i) = vnrSjanse(i) / samLa
    vnrSjanse(i) = vnrSjanse(i) * (1 - 5 * MinSannsyn) + MinSannsyn
    For a = 1 To Strategiar
        HestOdds(i, a) = (AvKastning(i) + (a - 1) * StigandeUtbytte) / vnrSjanse(i)
    Next a
Next i

End Sub
```

Her er variabelen MinSannsyn sett til 0.1, slik at minimum vinnarsjanse er 10 % per hest. Dermed er 50 % bestemt på førehand, medan dei resterande 50 % blir randomisert.

A.3

Kode : Realøkonomiske investeringsobjekt med korrelasjon, kapittel 4

Koden under trekkjer tilfeldige (II) ruter for dei tre ubåtane (I).

```
     I
For i = 1 To 3
    Select Case Rnd  II
        Rute(1) = True
        telMeg(1) = True
    Case 0 To 0.2
        Rute(2) = True
        telMeg(2) = True
    Case 0.2 To 0.4
        Rute(3) = True
        telMeg(3) = True
    Case 0.4 To 0.6
        Rute(4) = True
        telMeg(4) = True
    Case 0.6 To 0.8
        Rute(5) = True
        telMeg(5) = True
    Case Else
        Rute(6) = True
        telMeg(6) = True
    End Select
Next i
```

```
Select Case Rnd
Case 0 To 0.75
    TreffSkip = 2
Case 0.75 To 0.99  dvs. alle
    TreffSkip = Konvoi(i)
Case Else
    TreffSkip = 1
End Select
```

Dersom ein konvoi blir utsett for eit ubåtangrep, så blir talet på skip som blir treft trekt ut etter sannsyna til høgre over. *Sannsynet for å bli treft aukar ikkje dersom fleire ubåtar trekkjer same ruta ovanfor då dette blir rekna som ein ubåtpatrulje.*

Avkastninga varierer etter talet på overlevande, som blir registrert gjennom prosessen over. Avkastninga sett til 1.01.

```
Select Case OverLevande
Case 1
    Pris = Avkastning / 0.1
Case 2
    Pris = Avkastning / 0.2
Case 3
    Pris = Avkastning / 0.3
Case 4
    Pris = Avkastning / 0.4
Case 5
    Pris = Avkastning / 0.5
Case 6
    Pris = Avkastning / 0.6
Case 7
    Pris = Avkastning / 0.7
Case 8
    Pris = Avkastning / 0.8
Case 9
    Pris = Avkastning / 0.9
Case 10
    Pris = Avkastning
End Select
```

Formuen utviklar seg som nedanfor, der ”Reknskip(i) = 1” dersom skipet ikkje vart treft av torpedo og 0 dersom skipet vart treft.[31] ”Pris” er avgjort over.

```
For i = 1 To 10
    Formue = Formue + ReknSkip(i) * AndelsPlassering(b, i) * Formue * Pris
Next i
```

Reallokeringa blir som før med fyrst å rekna ut budsjett av dei investeringsobjekta som gjorde det dårleg, dvs. dei skipa som vart torpederte.

```
For i = 1 To 10
    If ReknSkip(i) = 0 Then
            Budsjett = Budsjett + AndelsPlassering(b, i) * (1 - Exp(-EndringsParameter))
            AndelsPlassering(b, i) = AndelsPlassering(b, i) * Exp(-EndringsParameter)
    End If
Next i
```

Deretter blir budsjettet fordelt på vinnarbåtane, som er oppsummert i variabelen ”overlevande”.

```
For i = 1 To 10
    If ReknSkip(i) > 0 Then
        AndelsPlassering(b, i) = AndelsPlassering(b, i) + (Budsjett / OverLevande)
    End If
Next
```

[31] Kan sjå bort ifrå variabelen *b*, som fortel kva strategi det gjeld

Appendiks B

B.1

Logaritmisk nytte[32]

$X_n = R_n R_{n-1} \dots R_2 R_1 X_0$

Logaritmen av begge sider gjev

$$\ln X_n = \ln X_0 + \sum_{k=1}^{n} \ln R_k$$

$$\ln \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln R_k$$

I kraft av at forventninga er like for alle *k* kan ein bruka *store tals lov*:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln R_k \to E(\ln R_1)$$

Dersom ein har *randomisert* kapitalutvikling frå prosessen $X_k = R_k X_{k-1}$

så får ein $\ln \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{\frac{1}{n}} \to m$ når $n \to \infty$, der $m = E(\ln R_1)$

Ved å ta logaritmen av dette får ein $\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{\frac{1}{n}} \to e^m \implies X_n \to X_0 e^{mn}$

B.2

Markowitz-problemet

Markowitz problem:

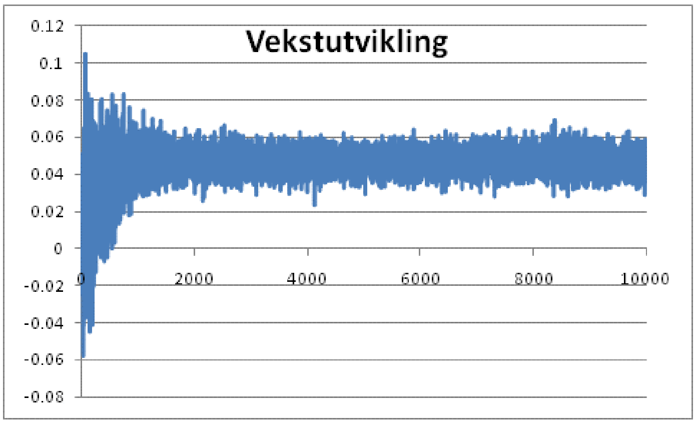
$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} w_i w_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i w_i = \bar{r} \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Henta direkte frå s.158, Luenberger(1998). "w" = andelar, "r" = avkastningsrater, σ= kovarians

[32] Henta direkte frå Luenberger (1998) kapittel 15.2, s. 419-421.

B.3

Figur 28: Vekstuvikling, evolusjonær strategi med endringsparameter 0.6% t. 10000, s:100



Referansar

Flåm, Sjur Didrik. (2008). "Portfolio management without probabilities or statistics.", Springer-Verlag.

Kelly, J.L jr. (1956), ”A new interpretation of Information Rate”

Luenberger, David G. (1998),. "Investment Science", Oxford Univerity Press

Campbell, John Y. m.f (1997), ”The Econometrics of Financial Markets”, Princeton University Press