

# Gasslekkasjar i Marine Miljø

Masteroppgåve i Anvendt Matematikk

Stig Andre Aase

Matematisk Institutt  
Universitetet i Bergen



1. juni 2012



# Takksemd

Eg vil starte med å takke vegleiarane mine Guttorm Alendal og Gunnar Furnes for all hjelp eg har fått under masterperioden. Alle diskusjonane vi har hatt undervegs har vore svært hjelpsame, og dykkar entusiasme og støtte gjennom dette halvåret har gjort det heile til ei mykje kjekkare oppleving og ein meir interessant og lærerik prosess. Eg vil også takke Hafliði Hafliðason, for anbefaling av relevant litteratur, korrekturlesing og forklaring av sentrale geologiske omgrep og strukturar. At du tok deg tid til dette sat eg veldig stor pris på. Ein stor takk rettast også til Statoil for hjelp med å skaffe gode data for porøsitet for dei betrakta sedimenta. Dette var svært hjelpsam.

Dei neste eg vil takke er foreldra mine, for dei tallause timane dei har brukt til hjelp og oppmuntring heilt sidan barndommen.

Sist, men ikkje minst, vil eg takke venene og medstudentane mine, som med dykkar engasjement og gode humør, har bidrege til å gjere denne studietida til dei kjekkaste åra av livet mitt.

*Stig Andre,  
Juni 2012*



# Innhald

<b>Innhald</b>	<b>v</b>
<b>1 Innleiing</b>	<b>1</b>
1.1 Motivasjon . . . . .	2
<b>2 Modell</b>	<b>7</b>
2.1 Utleiing av modellikningar . . . . .	7
2.2 Transformering av plumelikningane . . . . .	12
<b>3 Tilpassing av modellen og formulering av hypotese</b>	<b>15</b>
3.1 Området for modellering og undersøking . . . . .	15
3.2 Utgangspunkt og mål for modellen . . . . .	18
3.3 Startkrav og val av parametrar . . . . .	21
3.4 Utforming av hypotese . . . . .	26
<b>4 Verktøy</b>	<b>29</b>
4.1 Den Genetiske Algoritme . . . . .	29
4.2 Monte Carlo-metodar . . . . .	35
4.2.1 Historie og innføring av Monte Carlo . . . . .	36
4.2.2 Tilfeldige tal og pseudotilfeldige tal . . . . .	37
4.3 Parallele køyringar . . . . .	39
4.3.1 Parallele berekningar i den Genetisk Algoritme . . . . .	40
4.3.2 Parfor-løkker og parallelle køyringar av Monte Carlo . . . . .	42
4.3.3 Samanlikning og val for vegen vidare . . . . .	44
<b>5 Resultat</b>	<b>47</b>
5.1 Uttesting av hypotese . . . . .	47
5.2 Sensitivitetsanalyse av parametrar . . . . .	48
5.2.1 Medrivningskoeffisient, $\alpha$ . . . . .	50
5.2.2 Startporøsitet, $\phi_0$ . . . . .	51
5.2.3 Utlaufradius, $b_0$ . . . . .	52
5.2.4 Friksjonskoeffisient, $C_D$ . . . . .	52
5.2.5 Granulatdiameter, $D$ , og dynamisk viskositet, $\mu$ . . . . .	55
5.2.6 Gasskonstant, $n$ . . . . .	55
5.2.7 Gasstettleik ved utlaupet, $\rho_g(0)$ . . . . .	56
5.2.8 Konstant radius, $b_c$ . . . . .	57
5.3 Resultat frå Monte Carlo-simuleringar . . . . .	58
5.4 Analytisk uttrykk for den vertikale hastigheita ved konstant plumeradius	63
5.5 Volumrate, hastigheitsprofil og stigetid . . . . .	67

<b>6</b>	<b>Diskusjon av resultat</b>	<b>71</b>
6.1	Stigetid og hastighetsprofil . . . . .	71
6.2	Lineær porøsitetsprofil . . . . .	72
6.3	Porøsitetskoeffisient . . . . .	74
6.4	Svakheiter og feilkjelder . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Oppsummering og vegen vidare</b>	<b>77</b>
	<b>Appendiks</b>	<b>79</b>
A	Tabell over parametrar . . . . .	79
B	“Top hat” og gaussiske plumeprofilar . . . . .	80
C	Runge-Kutta- metoden av 4. og 5. orden . . . . .	82
D	Box-Müller-transformasjonen . . . . .	84
E	Minste kvadraters metode . . . . .	86
F	Tabellar av berekningar . . . . .	88
G	Matlab-skript og -kodar . . . . .	90
	<b>Figurreferansar</b>	<b>99</b>
	<b>Litteratur</b>	<b>101</b>

# Kapittel 1

## Innleiing

Verda over er komplekse krater på havbotnen eit vanleg syn. Desse kratera, som ofte blir kalla “pockmarks”, er observert med stor variasjon innan både plassering, storleik og form. Det desse kratera derimot har til felles, er at dei oftast er danna i område med mykje vertikal strøyming av gass og væsker i sedimenta. Slike område er av særskild interesse i denne masteroppgåva. Det tenkast at desse kratera har blitt danna under kraftige utbrot som følgje av eit stort trykk i gasslommer, der gassen har migrert frå reservoar djupt nede i sedimenta og til slutt akkumulert seg under eit lite gjennomtrengelig lag, like under havbotnen.

I denne masteroppgåva vil det bli studert fluidstrøymingar gjennom slike marine sediment, og målet er å vurdere om ein enkel matematisk modell klarar å beskrive og bevare karakteristiske trekk for prosessen. Denne drøftinga vil baserast på samanlikning med dei få reelle data vi har til rådighet. I denne samanhengen er det valt å ta utgangspunkt i Nyeggaregionen i Norskehavet, der den store tettleiken av pockmark vitnar om mykje vertikal fluidtransport. Det vil i denne oppgåva også bli gjeve ei innføring i den Genetiske Algoritme, Monte Carlo-metodar og parallellisering av Matlab-kodar, som alle er sentrale verkty nytta for å svare på den gjeldande problemstillinga.

Den matematiske modellen som skal nyttast i denne oppgåva er ei forenkla beskriving av korleis ei gassky brer seg vertikalt gjennom eit porøst medium. Drivkreftene for rørsle er den initielle rørslemengda samt oppdrifta gasskya opplev. Den initielle rørslemengda vil derimot raskt forsvinne grunna friksjon, så den resterande delen av stigninga vil vere styrt av forholdet mellom friksjon og oppdrift. Ei gassky som har ei rørsle hovudsakleg styrt av oppdriftskrefter blir ofte kalla ein “plume”, og dette er terminologien som vil bli nytta også i denne oppgåva. Den nemnte modellen er svært enkel, og har mange svakheiter, men har samtidig også styrker som tyngre modellar for same fenomen ikkje har. Sidan modellen ikkje er veldig omfattande er derfor køyretida låg i simuleringar, noko som kan ha store fordelar. Ei låg berekningstid opnar nemleg opp for mogelegheita til å køyre mange gjennomkøyringar av modellen med små endringar i dei viktige parametrane, for så å føre statistikk, noko som er sentralt innan til dømes risikoanalyse.

Før sjølve modellen blir presentert, vil det bli skrive nokre ord om kvifor forskning på fluidstrøymingar i porøse media er så viktig for mange ulike fagfelt. Denne komplekse samansveisinga av fagområde og ekspertisefelt var det som i hovudsak gjorde at dette emnet appellerte spesielt mykje til meg.

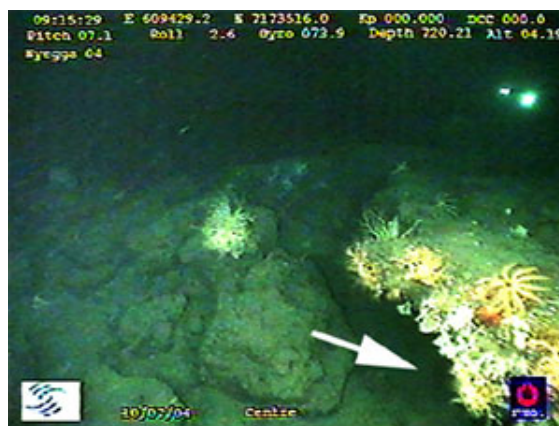
## 1.1 Motivasjon

Det har i dei siste tiåra blitt forska mykje på gass- og væskestrøyming i porøse media, men det er framleis mykje som ikkje er forstått, og mange spørsmål som enda står usvarte. Fokuset i denne masteroppgåva er vertikal fluidstrøyming gjennom marine sediment, eit tema som er, som vi skal sjå, svært viktige på mange område.

Undersjøiske krater og andre utlaup for naturgass på havbotnen viser seg for det første å vere heim til ein unik og allsidig fauna, og dei kan nærmast betraktast som små “oasar” i ein undersjøisk ørken. Store karbonatblokker og bakteriematter er vanlege syn i aktive pockmark langs den norske kontinentalsokkel, der bakteriane livnærer seg på metan og svovel som migrerer frå dei djupare sedimenta. Både desse mattene og karbonatblokkene er viktige i danninga av eit økosystem; blokkene som ly og vern for fiskar og krepsdyr og bakteriane som energiressurs. Ved å nytte ROV<sup>1</sup> og SONAR<sup>2</sup> har ein observert og avdekkja både sjøanemonar, krabber, skjell, reker, sjøstjerner, sniglar, og ulike planktonartar i fleire pockmark langs den norske kontinentalsokkel (Hovland et al., 2005; Hovland og Judd, 2007). Som ein skjønner er forsyninga av naturgass ein nøkkel i danninga av denne faunaen, og er derfor av stor interesse for biologar.



Figur 1.1: Grå og kvite bakteriematter.



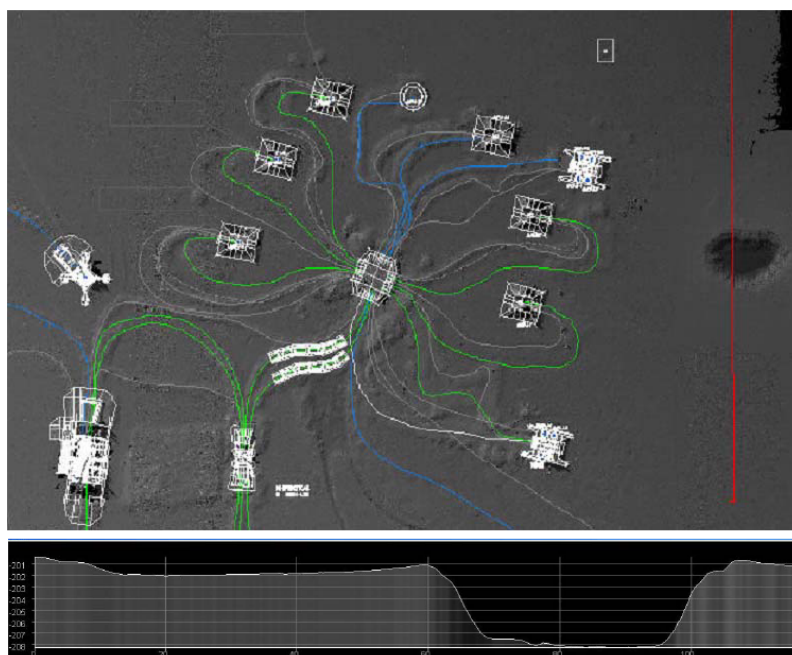
Figur 1.2: Fauna ved karbonatblokkene.

Ved sidan av å vere grunnlaget for komplekse økosystem, blir pockmark dessutan sett på som gode indikasjonar på kva slags område det kan finnast store reservoar av naturgass, noko som er av stor interesse for petroleumsindustrien. Petroleumsindustrien er også oppteken av å finne meir ut om slike marine gasslekkasjar, med tanke på at dei også kan utgjere farar for brønnar, utstyr og røyr som strekkjer seg over utsette område på havbotnen. Potensielle utbrot, som ved dei dramatiske danningane av pockmark, kunne sjølvstapt fått katastrofale følgjer dersom dei førekom i slike uheldige område (Hovland, 1989; Gudmestad og Hovland, 2001). Menneskeskapte gassutblåsingar, grunna mangelfull risikoforståing eller feilvurdering under utvinning av olje og naturgass, er også ein potensiell fare for denne industrien. Kor farlege slike gassutblåsingar faktisk kan vere, vart demonstrert under ulykka ved Tordisfeltet i 2008, der eit stort krater vart blåst ut like ved installasjonane på havbotnen (Holt et al., 2008). Vidare forskning innan dette feltet blir derfor sett på som viktig, både av økonomiske og sikkerheitsmessige årsaker.

<sup>1</sup>Remotely Operated Vehicle

<sup>2</sup>SOund NAvigation and Ranging

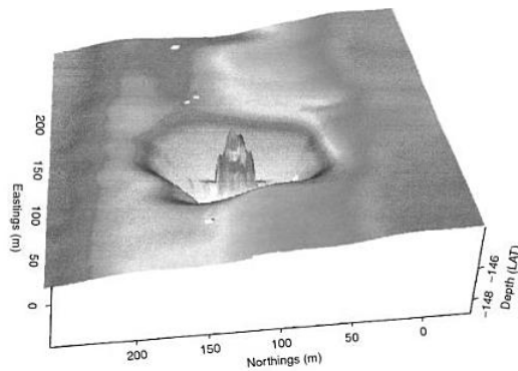




Figur 1.3: *Menneskeskapt krater frå ulykka ved Tordisfeltet, 2008. Krateret var omtrent 40 meter i diameter og 7 meter djupt, og danna like i nærleiken av havbotnutstyret.*

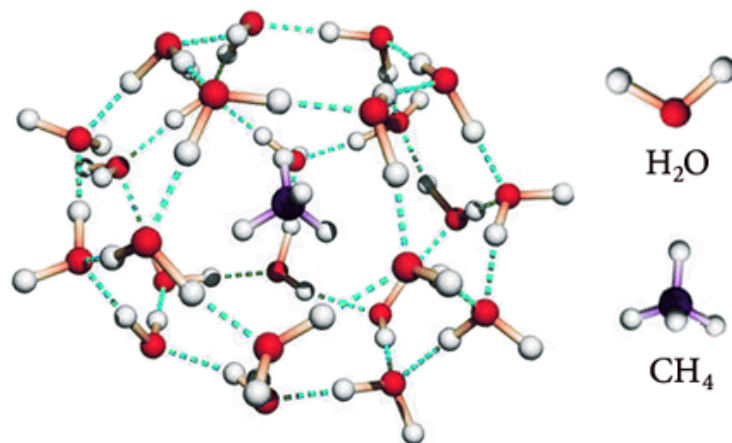
Det har også blitt spekulert i om frigjeringa av store gassbobler metan frå havbotnen kan vere den lenge etterlengta forklaringa på det kjente mysteriet om Bermudatriangelet, eit område der til saman meir enn tusen skip og fly har forlist og styrta dei fem siste århundra (Quasar, 2003). Ei hypotese er at store metanutslepp frå havbotnen kan føre til lågare vassettleik i havoverflata og redusert oppdrift, noko som kan føre til at skip søkk utan forvarsel. Australske forskarar har dessutan testa denne hypotesen ved å sende metanbobler mot eit skalert modellskip, og konklusjonen var at det absolutt var mogeleg for skipet å synke under desse forholda (May og Monaghan, 2003). McIver (1981) med fleire, meiner dessutan at det berykta triangelet ligg delvis over marine sediment med store gasshydratkonsentrasjonar, og at plutslege frigjeringar av desse godt kan føre til at skip misser oppdrift og at den ekstra metanen i atomsfæren kan resultere i motorsvikt for lågtflygande luftfarty.

Dersom denne hypotesen held mål kan det også vere ei god forklaring på det kjente pockmarket “Witch’s Hole” i Nordsjøen, som er eit enormt krater på havbotnen, der skroget av eit skip stikk opp av senteret. Det har dessutan blitt observert to liknande pockmark, som etter alt å døme også omsluttar kvart sitt skipsvrak (Hovland og Judd, 2007). At desse skipa kan ha vore på feil stad til feil tid og blitt offer for naturgassen frigjort frå pockmarka er absolutt eit truverdig scenario. Ei vel så sannsynleg forklaring er nok derimot at skipa har forlist og virka som utløysarmekanismar for kraftige gassutblåsingar når dei treffe havbotnen. Det finnes dessutan mange som meiner at sannsynet for at skip tilfeldigvis skal vere over slike valdsame og relativ sjeldne gassutslepp, er altfor liten til å kunne forklare slike observasjonar, og spesielt til å kunne oppklare mysteriet om Bermudatriangelet. Andre peikar også på at det finnes mange havområde med stor skipstrafikk og tilsvarende sedimentforhold som ikkje har hatt same historikken med forlis som det mytiske triangelet (Beaudoin, 2011). Likevel er gasshypotesen ein svært spanande tanke, og den framleise uvissa gjer igjen at vi er avhengig av meir forskning på området.

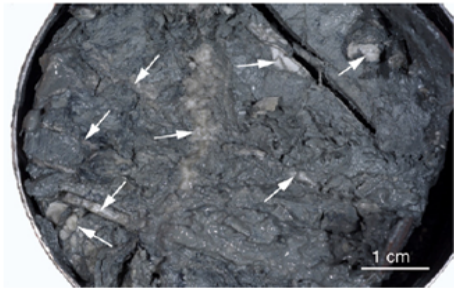


Figur 1.4: Det kjende krateret “Witch’s Hole”, der eit skipsskrog stikk opp av senteret.

Utslepp av metan frå havbotnen er også noko klimaforskarane er svært opptekne av, og i denne samanhengen er såkalla metanhydrat mykje diskutert. Metanhydrat er ein isliknande krystall, som skil seg frå rein is ved at det har eit metanmolekyl fanga innanfor det heksagonale/pentagonale isburet. Desse metanhydrata blir danna i sedimenta ved passende trykk- og temperaturforhold, dersom tilstrekkeleg metangass er tilstades (Lai et al., 2005). Vi veit framleis lite om kor sensitive desse hydrata er for eventuelle temperaturendringar i havet, men vi veit derimot sikkert at mengda metanhydrat under havbotnen er overveldande. Det har blitt estimert at det finnes omtrent 3 000 gantar meir metan i marine sediment enn det totalt er i atmosfæren, noko som både gjer desse hydrata til ein potensiell enorm energiressurs, men også ein potensiell stor fare for global oppvarming (Brewer et al., 2002). Metan er som kjent ein viktig drivhusgass, som i tillegg har den meir kjente drivhusgassen  $\text{CO}_2$  som eit vanleg oksidasjonsprodukt. Det har blitt estimert at dersom 10% av metanen i dei marine reservoara hadde blitt sloppe ut i atmosfæren innan få år, ville dette hatt eit resultat på jordas strålingsbudsjett ekvivalent med ein tidobling av atmosfærisk karbondioksid (Archer, 2007). At så mykje metan skal bli frigjort frå sedimenta over ein kort tidsperiode er truleg eit lite realistisk senario, men samtidig er det også stor uvisse om kor sensitiv slik hydratsmelting vil vere for temperaturendringar i havet. Dersom havtemperaturen held fram med å auke i dei komande tiåra, kan derfor hydratsmelting vise seg å bli ein alvorleg trussel for global oppvarming, som berre vil eskalere ved vidare smelting. Dette gjev eit godt inntrykk av kor viktig kunnskap om framtidige metanutslepp frå havbotnen kan vere for berekningar også innanfor dette fagfeltet.



Figur 1.5: Metanhydrat på molekylært nivå.

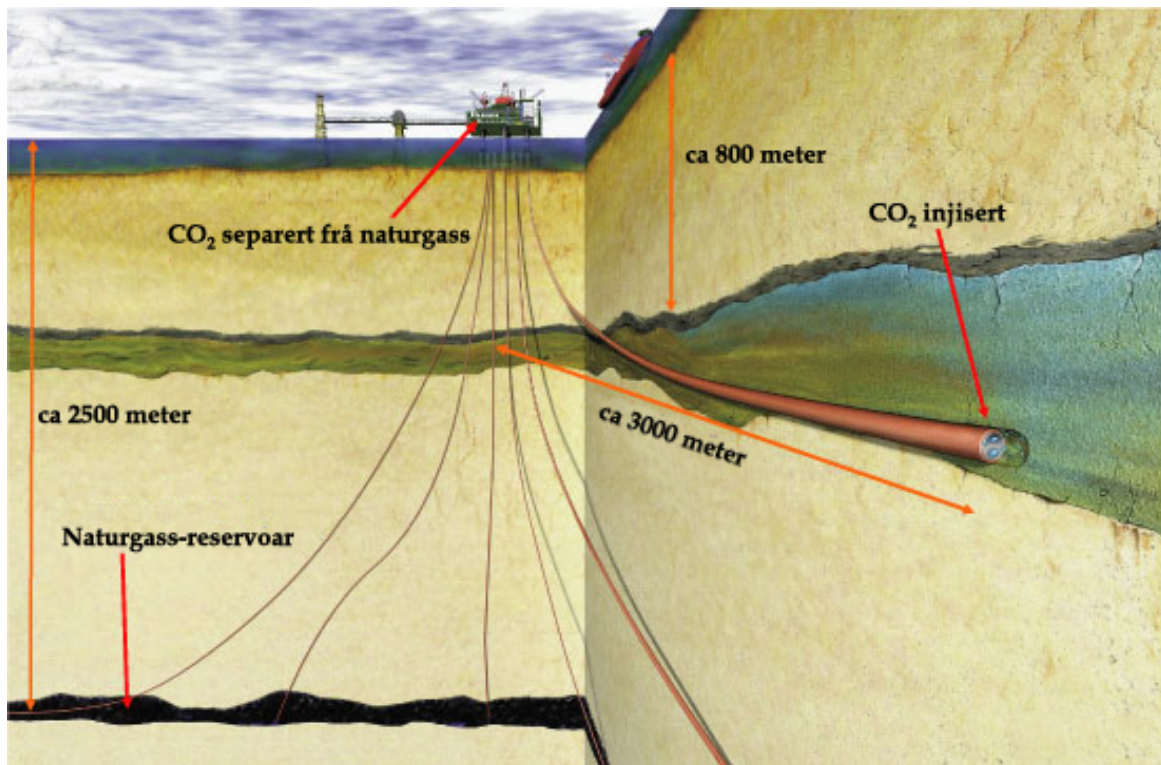


Figur 1.6: *Kjerneprøve frå den norske kontinentalsokkel med metanhydrat.*



Figur 1.7: *Nærbilete av ein klump metanhydrat.*

Kunnskapar om fluidstrøymingar frå djuptliggjande sediment er også viktig i utarbeiding av praktiske tiltak for å motverke nettopp ei slik eventuell klimakrise. Eit sentralt tiltak som er tiltenkt dette formålet, er lagring av CO<sub>2</sub> i djupe undergrunnsformasjonar, såkalla CCS<sup>3</sup>. Metoden går i hovudsak ut på å injisere karbondioksidgass under høgt trykk inn i til dømes djupe vassførande sjikt (“aquifers”) eller tappa petroleumsreservoar, med formål om at gassen skal haldast fanga der over ein geologisk tidsperiode (Broecker, 2008). Dette kan gjerast ved å injisere gassen i sedimenta under steinformasjonar med svært låg permeabilitet slik at gassen ikkje kan migrere vertikalt grunna denne blokaden. Den fysiske barrieren vil vere den klart viktigaste faktoren for å hindre at gassen stig tilbake mot overflata, men det finnes også andre faktorar, som løyselegheit i formasjonsvatn, mineralisering og kapillærkrefter som også spelar inn for å halde gassen fiksert på ønskja stad (IPCC, 2005; Koornneef et al., 2012).



Figur 1.8: *Kommersielt prosjekt med CO<sub>2</sub>-lagring i Sleipnerfeltet.*

<sup>3</sup>Carbon Dioxide Capture and Storage

Metoden om undergrunnslagring av CO<sub>2</sub> blir no testa ut og har blitt mykje diskutert dei siste åra som eit lovande tiltak for framtida. Det er til dømes berekna at CCS kan bidra med så mykje som 20% av utsleppreduksjonen av CO<sub>2</sub> det komande århundret (Benson og Cole, 2008). Sjølv om dette høyrer svært bra ut, må det likevel betraktast at slik undergrunnslagring også fører med seg ein viss risiko, i form av farar for lekkasjar frå formasjonane. Dette kan til dømes skje ved at det blir danna sprekkar i steinformasjonane grunna trykkendingar ved injisering eller at kapasiteten til lagringsreservoaret blir overvurdert (Koornneef et al., 2012). For å kalkulere faren for framtidige lekkasjar frå slike skapte lagringsreservoar, samt estimere eventuelle konsekvensar, treng ein matematiske modellar slik at ein kan køyre risikoanalysar. For å gjennomføre slike analysar treng ein svært mange realiseringar av modellen for å bygge statistikk, noko som igjen krev ei låg køyretid for simuleringane. Ein kan derfor ikkje nytte tunge og tidkrevjande reservoarsimulatorar til dette formålet, men må heller støtte seg på enklare og mindre komplekse modellar. Dersom ein skal køyre risikoanalysar er det også viktig at vi har ei føling på uvissa i modellparametrane, og analysane forutset dessutan gode data som kan nyttast til kalibrering og validering av modellen.

Modellen som vil bli nytta i denne masteroppgåva er svært fleksibel og kan enkelt tilpassast ulike situasjonar, og har i tillegg låg køyretid. Spørsmålet er derimot kor mykje ein misser av det fysiske når ein nyttar slike enkle modellar, i staden for tyngre, dyrare og meir komplekse. Dette er noko av det vi ønskjer å finne svar på i denne oppgåva.

# Kapittel 2

## Modell

I dette kapitlet vil det bli utleia og presentert ein generell modell for vertikal fluidstrøyming i porøse media. Det vil bli gjort mange forenklingar, idealiseringar og tilnærmingar i denne utleiinga, men dette resulterer samtidig i at køyretida for numeriske simuleringar av modellen vil vere låg, noko som vi bli utnytta i dei seinare berekningane. Dei følgjande modellikningane er utarbeida med utgangspunkt i (Furnes, 2012).

### 2.1 Utleiing av modellikningar

For å formulere likningar som kan beskrive strukturen til gassplumen, er det anteke at variablane er aksialt symmetrisk fordelt med omsyn på  $z$ -aksen. Det er også anteke at forholda er stasjonære. Origo for  $z$ -aksen er valt ved utlaupssenteret, med positiv retning opp mot havbotnen og havoverflata, der  $z$  er høvesvis angjeve som  $H_P$  og  $H$ .

Utlauptet er eit punkt, eller eit større sirkulært område, der gass lek ut frå eit reservoar eller ein “gas dome”. Tettleiken av vassmassane i omgivnadane er føreskrive og har ei kontinuerleg fordeling  $\varrho_0(z)$ . Den vertikale hastigheita og tettleiken innanfor plumen er høvesvis angjeve som  $w(r, z)$  og  $\varrho(r, z)$ .

Ved å anta ein radiell fordelingsprofil av  $\varrho(r, z)$  og  $w(r, z)$ , vil det vere naturleg å transformere desse avhengige variablane over til såkalla “top hat”-verdiar. Dette betyr at den interne horisontale strukturen til plumen kan bli beskrive av éin verdi. Dette er ekvivalent med å erstatte volum-, masse- og momentumraten til plumen med verdiar definert ved integral over radiusen til plumen. Dette vil derimot ikkje ha nokon fysiske implikasjonar. Dei ekvivalente tophat-verdiane ( $\bar{\varrho}, \bar{w}, b$ ) vil vere definert ved:

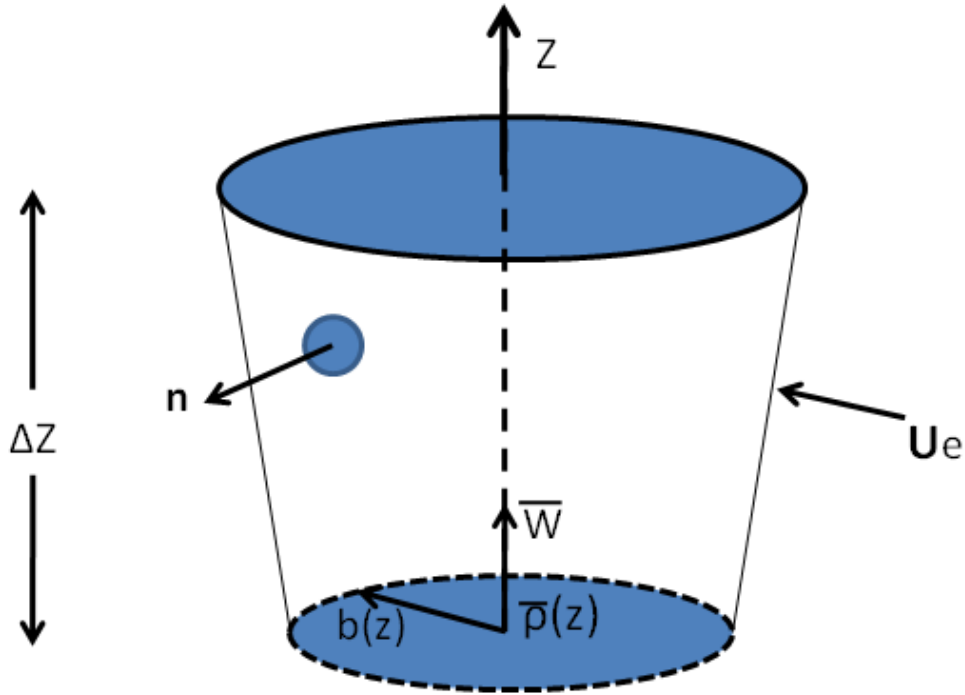
$$\bar{w}(z) [b(z)]^2 = \int_0^\infty w(r, z) r dr \quad (2.1)$$

$$\bar{\varrho}(z) \bar{w}(z) [b(z)]^2 = \int_0^\infty \varrho(r, z) w(r, z) r dr \quad (2.2)$$

$$\bar{\varrho}(z) [\bar{w}(z)]^2 [b(z)]^2 = \int_0^\infty \varrho(r, z) [w(r, z)]^2 r dr \quad (2.3)$$

(Cook, 1998; Furnes, 2012), der  $b(z)$  er den gjennomsnittlige plume-radiusen. For ein meir detaljert diskusjon av “top hat”-verdiar for aksesymmetriske plumar henvisast det til Appendiks B.

Det betraktast no eit volumelement i plumen med høgde  $\Delta z$ , som avbilda i Figur 2.1.



Figur 2.1: Testvolum for utleiing av dei grunnleggande modellikningane.

Det laterale spenningsarbeidet som plumen utøver på det omgivande formasjonsvatnet vil føre til medrivning av eksternt vatn med tettheit  $\varrho_0(z)$ . Dette vatnet blir transportert inn i plumen med hastigheit  $U_e$  som er vinkelrett på sideoverflata.

Vi ønskjer no å utleie likningar med utgangspunkt i masse-, momentum- og volumtransport. Ved å angje arealet av sideoverflata til “testvolumet” ved  $S$  og volumet ved  $V$ , får vi

$$S = 2\pi \frac{b(z + \Delta z) + b(z)}{2} \sqrt{[\Delta z]^2 + [b(z + \Delta z) - b(z)]^2}$$

og

$$V = \frac{\pi \Delta z}{3} [b(z)]^2 + b(z)b(z + \Delta z) + [b(z + \Delta z)]^2.$$

Konserveringa av masse kan då beskrivast av uttrykket

$$\bar{\varrho}(z + \Delta z)\bar{w}(z + \Delta z)\pi [b(z + \Delta z)]^2 = \bar{\varrho}(z)\bar{w}(z)\pi [b(z)]^2 + \varrho_0(z)U_e S.$$



Dersom vi no set inn for arealet av sideoverflata, delar på  $\Delta z$  på begge sider og omformar, gjev dette oss:

$$\frac{\bar{\rho}\bar{w}b^2(z + \Delta z) - \bar{\rho}\bar{w}b^2(\Delta z)}{\Delta z} = \rho_0(z)U_e[b(z + \Delta z) + b(z)]\sqrt{1 + \left[\frac{[b(z + \Delta z) - b(z)]}{[\Delta z]}\right]^2}.$$

Ved å la  $\Delta z$  gå mot null, oppnår vi då den følgjande differensiallikninga:

$$\frac{d(\bar{\rho}\bar{w}b^2)}{dz} = 2\rho_0bU_e\sqrt{1 + \left[\frac{db}{dz}\right]^2}. \quad (2.4)$$

Momentumteoremet for stasjonær rørsle kan på si side uttrykkast som

$$\vec{F} = \int_S \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} dS,$$

der  $S$  er overflata av kontrollvolumet og  $\vec{F}$  er summen av alle krefter som verkar på massen (Kundu og Cohen, 2008). Momentumtransporten i  $z$ -retning blir derfor

$$F_z = \int_S \rho w \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

eller anvendt på kontrollvolumet i Figur 2.1:

$$F_z = \bar{\rho}(z + \Delta z) [\bar{w}(z + \Delta z)]^2 \pi [b(z + \Delta z)]^2 - \bar{\rho}(z) [\bar{w}(z)]^2 \pi [b(z)]^2 - \rho_0(z)\bar{w}U_eS.$$

Det viktigaste bidraget til  $F_z$  er oppdrifta grunna tettleiksskilnaden,  $\Delta\rho = \rho_0 - \bar{\rho}$ , og friksjonen som er anteke å vere proporsjonal med hastigheita  $\bar{w}$ . Dette er uttrykt ved

$$F_z = \Delta\rho g \phi V - C_D \frac{\mu}{k} \phi V \bar{w}.$$

I denne likninga er  $\phi$  porøsiteten,  $C_D$  er ein friksjonskoeffisient,  $\mu$  er den dynamiske viskositeten og  $k$  er permeabiliteten. Sidan porøsiteten,  $\phi$ , er definert som forholdet mellom porevolumet og totalvolumet, vil derfor  $\phi V$  gje oss volumet av sjølve porene (Pettersen, 1990). Ved igjen, å la  $\Delta z$  gå mot null, får vi at differensiallikninga som beskriv den vertikale momentumtransporten kan skrivast som

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}b^2\bar{w}^2) = \Delta\rho g \phi b^2 - C_D \frac{\mu}{k} \phi b^2 \bar{w} + 2b\rho_0 U_e \bar{w} \sqrt{1 + \left[\frac{db}{dz}\right]^2}. \quad (2.5)$$

I ei likning som uttrykk endringa av volumet med omsyn på djupn, er det naudsynt å inkludere faktumet at ein viss brøkdel av  $\phi V$  består av gass som er kompressibel. Derfor får vi, i følgje Figur 2.1, at

$$\bar{w}(z + \Delta z)\pi b^2(z + \Delta z) = \bar{w}(z)\pi b^2(z) + U_e S + \gamma_{gass},$$

der  $\gamma_{gass}$  er auken av volumrate ved  $z + \Delta z$  som ein konsekvens av utvidinga over  $\Delta z$ . Ved å neglisjere oppløysing av gass i vatn, og ved å angjeve volumraten av gass ved nivået  $z$  som  $\dot{V}_g$ , kan  $\gamma_{gass}$  bli skrive som

$$\gamma_{gass} = \frac{\partial \dot{V}_g}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial \dot{V}_g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z. \quad (2.6)$$

Korleis  $\frac{\partial \dot{V}_g}{\partial p}$  ser ut, er avhengig av om ekspansjonen er adiabatisk eller isoterm. Masseraten av gass ved nivå  $z$  kan på si side skrivast som

$$\dot{m}_g = \rho_g(z) \dot{V}_g,$$

der  $\rho_g$  er gasstettleiken. Vi får derfor

$$\frac{\partial \dot{V}_g}{\partial p} = \dot{m}_g \frac{\partial \rho_g^{-1}}{\partial p} = -\dot{m}_g \rho_g^{-2} \frac{\partial \rho_g}{\partial p}. \quad (2.7)$$

Endringa av gasstettleik med trykket  $p$  er uttrykt ved gasslova

$$\rho_g(z) = \rho_g(0) \left[ \frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (2.8)$$

der  $n$  har ein verdi mellom isoterm og adiabatisk ekspansjon,  $1 \leq n \leq \frac{c_p}{c_v}$  (Fanneløp og Sjøen, 1980; Dahle, 2010). Dersom vi deriverer gasslova 2.8 med omsyn på  $p$  og substituerer dette inn i 2.7, og til slutt set dette inn i 2.6, oppnår vi likninga

$$\gamma_{gass} = - \frac{\dot{m}_g}{n \rho_g(0) p(0) \left[ \frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{n+1}{n}}} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z. \quad (2.9)$$

Ved å betrakte grenseverdien når  $\Delta z$  går mot null, og nytte den hydrostatiske likninga

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g,$$

kan volumlikninga til slutt skrivast som

$$\frac{d}{dz}(\bar{w}b^2) = 2bU_e \sqrt{1 + \left[ \frac{db}{dz} \right]^2} + \frac{g\dot{m}_g \rho_0(z)}{n\pi \rho_g(0) p(0) \left[ \frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{n+1}{n}}}. \quad (2.10)$$



Dei tre grunnleggande likningane som beskriv plumedynamikken er derfor:

Masselikning:

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}b^2) = 2\rho_0 b U_e \sqrt{1 + \left[\frac{db}{dz}\right]^2} \quad (2.11)$$

Momentumlkning:

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}^2 b^2) = \Delta \rho g \phi b^2 - C_D \frac{\mu}{k} \phi b^2 \bar{w} + 2\rho_0 b U_e \bar{w} \sqrt{1 + \left[\frac{db}{dz}\right]^2} \quad (2.12)$$

Volumlikning:

$$\frac{d}{dz}(\bar{w}b^2) = 2b U_e \sqrt{1 + \left[\frac{db}{dz}\right]^2} + \frac{g \dot{m}_g \rho_0(z)}{n \pi \rho_g(0) p(0) \left[\frac{p(z)}{p(0)}\right]^{\frac{n+1}{n}}} \quad (2.13)$$

I tillegg til desse likningane vil det vere naudsynt å angje  $\bar{w}$ ,  $b$  og  $\bar{\rho}$  som startverdiar ved  $z = 0$ , samt tettleiks- og porøsitetsprofil,  $\rho_0$  og  $\phi$ , over heile djupet.

For å lukke problemet må ein dessutan finne eit uttrykk for  $U_e$ . Sidan medrivning er eit resultat av plumen si sjølvgenererte rørsle, vil, i følgje Csanady (1973),

$$U_e = \alpha \bar{w} \quad (2.14)$$

vere ei fornuftig antaking. I denne likninga er  $\alpha$  ein medrivningskoeffisient, som må føreskrivast. Denne parameteren kan anten setjast som ein konstant eller som ein funksjon av djupet.

Utan store gradientar eller diskontinuitetar i  $\rho_0$ , er  $\frac{db}{dz}$  typisk mykje mindre enn 1 for plumar der oppdriftskreftene dominerer (Furnes, 2012). Antakinga  $\left[\frac{db}{dz}\right]^2 \ll 1$  vil derfor vere fornuftig, og gjer at likningane 2.11 – 2.13, med god tilnærming, kan reduserast til:

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}b^2) = 2\alpha \rho_0 b \bar{w} \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}^2 b^2) = \Delta \rho g \phi b^2 - C_D \frac{\mu}{k} \phi b^2 \bar{w} + 2\rho_0 \alpha b \bar{w}^2 \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dz}(\bar{w}b^2) = 2\alpha b \bar{w} + \Gamma \quad (2.17)$$

der  $\Gamma$  representerer det siste leddet i likning 2.13.

## 2.2 Transformering av plumelikningane

For å forenkle numerikken i modellen vår, vil det no vere hensiktsmessig å introdusere nye variablar i likningane 2.15 – 2.17. Vi definerer derfor:

$$y_1 = \bar{\rho}\bar{w}b^2, \quad y_2 = \bar{w}b^2, \quad y_3 = \bar{\rho}\bar{w}^2b^2, \quad z = H\xi \quad (2.18)$$

Ein kjenner raskt igjen variablane  $y_1$ ,  $y_2$  og  $y_3$  som skalerte versjonar av høvesvis masse-, volum- og momentumrate og ser dessutan at høgdeparameteren har blitt normalisert og ikkje-dimensjonalisert. Sistnemnte er, i likskap med transformasjonen, gjort for å forenkle arbeidet med modellen, sidan det vil vere enklare å konsekvent nytte høgdeforhold i intervallet  $[0,1]$  enn sjølve høgdene, dersom modellen skal brukast til mange ulike område. Ei tilsvarande normalisering og ikkje-dimensjonalisering av dei andre variablane har vi derimot ikkje funne naudsynt. Ved å utføre den nemnte transformasjonen oppnår vi til slutt dei endelege likningane:

$$\frac{dy_1}{d\xi} = 2H\alpha\varrho_0y_1^{-\frac{1}{2}}y_2^{\frac{1}{2}}y_3^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} = 2H\alpha y_1^{-\frac{1}{2}}y_2^{\frac{1}{2}}y_3^{\frac{1}{2}} + \Gamma H \quad (2.20)$$

$$\frac{dy_3}{d\xi} = gH\phi(\varrho_0 - \frac{y_1}{y_2})y_1y_2y_3^{-1} - C_D H \frac{\mu}{k} \phi y_2 + 2H\alpha\varrho_0y_1^{-\frac{3}{2}}y_2^{\frac{1}{2}}y_3^{\frac{3}{2}} \quad (2.21)$$

Likningssettet 2.19 - 2.21 med tilhøyrande startkrav er eit eittpunkts startverdiproblem som kan løysast av Runge-Kutta- metoden. For ei utdjuing om denne metoden og om korleis Matlab nyttar den i numeriske berekningar, henvisast det til Appendiks C.

Dersom vi har berekna  $y_1$ ,  $y_2$ , og  $y_3$  for ønskja  $\xi$ -verdiar, kan vi seinare enkelt bestemme  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{w}$  og  $b$  ved å invertere 2.18:

$$\bar{\rho} = y_1y_2^{-1}, \quad \bar{w} = y_1^{-1}y_3, \quad b = y_1^{\frac{1}{2}}y_2^{\frac{1}{2}}y_3^{-\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

Den gjennomsnittlege stigehastigheita over det totale djupet kan no bli funne som

$$\bar{W} = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{w} dz = \int_0^1 \bar{w} d\xi.$$

Den korresponderande stigetida kan då bereknast frå uttrykket

$$T = \frac{H}{\bar{W}}. \quad (2.23)$$

Laboratorie- og feltobservasjonar av ikkje-porøse media, som luft og vatn, viser at hastigheits- og tettleiksfordelinga i ein plume ofte er gaussiske (Turner, 2001). Vi antek at dette også vil vere ei rimeleg fordeling for ein plume i porøse media. Skalaen til

$w$ -fordelinga er valt og definert slik at  $w$  er redusert med ein faktor på  $e^{-1}$  ved den radielle avstanden  $b$  frå senteret av plumen. Vi vil derfor ha

$$w = w_m e^{-\frac{r^2}{b^2}}. \quad (2.24)$$

Ved å kombinere 2.24 og 2.1 får vi no

$$w_m = 2\bar{w}, \quad (2.25)$$

som derfor gjev oss uttrykket

$$w = 2\bar{w} e^{-\frac{r^2}{b^2}}. \quad (2.26)$$

Det skal nemnast at likning 2.25 kun vil vere ein approksimasjon, sidan vi her har forenkla noko ved å setje inn  $r = \infty$  som den øvre grensa i evalueringa av det bestemte integralet. Ei noko betre tilnærming kan oppnåast ved å heller nytte integrasjonsgrensene  $r = 0$  og  $r = b$ , sidan hastigheita vil falle til 0 utanfor plumen. Dette ville då i staden gjeve oss  $w = 2(1 - e^{-1})\bar{w}e^{-\frac{r^2}{b^2}}$ . Kven av desse uttrykka som skal nyttast bør vurderast ut frå nøyaktigheita som er naudsyn for hastigheitsberekningane.

Dersom ein også ønskjer å studere tettleiksprofilen til plumen i detalj, kan ein innføre ein skaleringsfaktor  $\lambda$ , og betrakte uttrykket

$$\varrho = \varrho_0 - (\varrho_0 - \varrho_m) e^{-\frac{r^2}{(\lambda b)^2}}. \quad (2.27)$$

Ved å substituere for  $w$  og  $\varrho$  i 2.2 gjev dette oss

$$\varrho_0 - \varrho_m = (\varrho_0 - \bar{\varrho}) \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}. \quad (2.28)$$

Dette vil også vere ei forenkling, funne ved å nytte  $r = \infty$  som øvre integrasjonsgrense. Dersom ein i staden integrerer frå  $r = 0$  til  $r = b$ , og nyttar at hastigheita og tettleiken høvesvis vil vere 0 og  $\varrho_0$  utanfor plumen, vil vi i staden få det meir komplekse uttrykket

$$\varrho_0 - \varrho_m = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 \left(1 - e^{-\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}}\right)} \left[ \varrho_0 (1 - e^{-1}) - \frac{\bar{\varrho}}{1 - e^{-1}} \right]. \quad (2.29)$$

Kven av dei to føregåande likningane som skal nyttast må igjen vurderast ut frå nøyaktigheita som er naudsyn for dei aktuelle berekningane. I denne oppgåva vil vi i hovudsak nytte "top hat"-verdiane i dei viktige berekningane, så dette valet er ikkje eit stort problem for oss. Vi vil likevel betrakte hastigheitsprofilar for ulike forhold, men sidan det hovudsakleg er forma og ikkje sjølve verdiane som er av størst interesse i desse berekningane, gjer det ikkje noko om vi nyttar tilnærminga 2.26 til dette formålet.



# Kapittel 3

## Tilpassing av modellen og formulering av hypotese

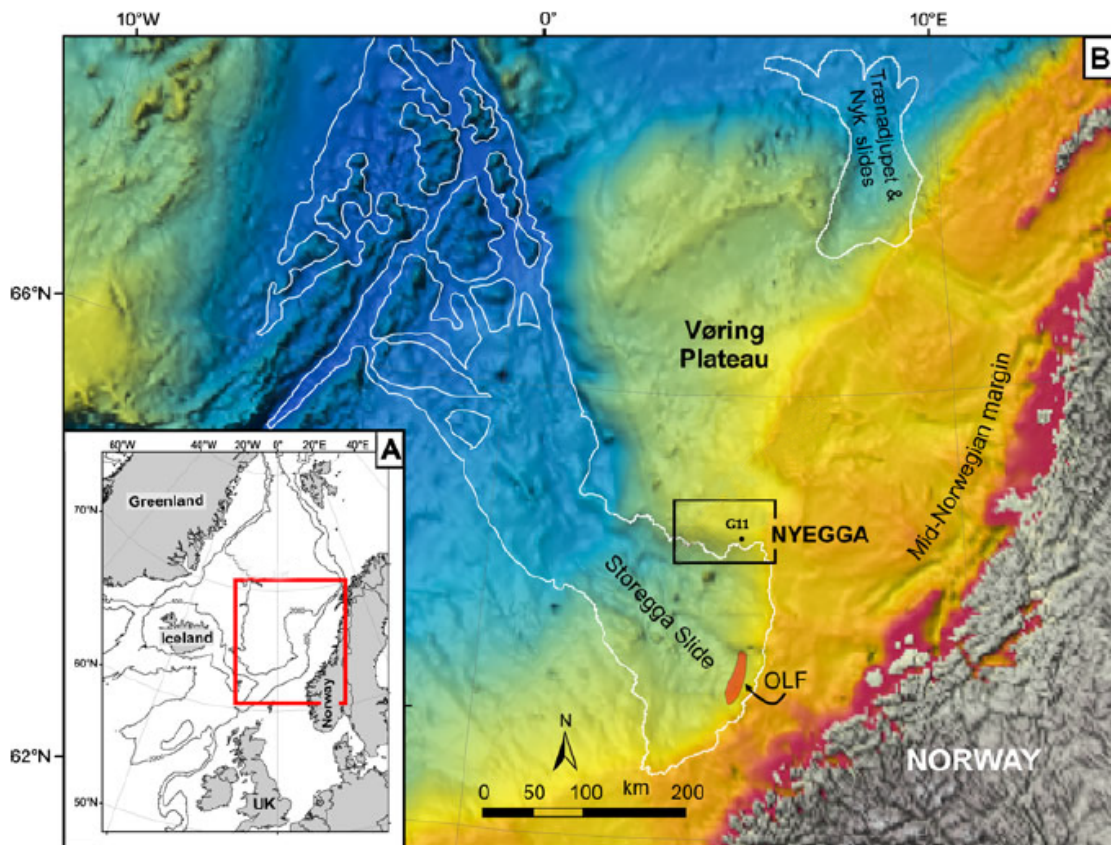
No når dei sentrale likningane er på plass, gjenstår det å føreskrive startvilkår og verdiar for dei fysiske parametrane i modellen, for å lukke systemet. Modellen vår er svært fleksibel, så startvilkåra og parameterverdiane vil vere heilt avhengig av kva slags problem vi vel å betrakte. Dette kapittelet har derfor som formål å formulere eit problem som modellen vår kan nyttast på, samt å tileigne parametrane realistiske verdiar tilpassa dette gjeldane problemet.

Vi syntes det ville vere eit interessant val å studere den vertikale strøyminga av naturgass frå djupe gassreservoar opp mot havbotnen ved den norske kontinentalsokkel. I denne samanhengen vil det vere naturleg å betrakte Nyeggaregionen i Norskehavet, der store krater på havbotnen indikerer mykje vertikal fluidrørsle. Vi har valt oss ut eitt av desse kratera, med namn G11, og ønskjer å modellere fluidstrøyminga i sedimenta under dette, for spesifikke forhold. Kapittelet vil derfor starte med ein kort presentasjon av Nyeggaregionen og det kjende krateret, før det etter beste evne er forsøkt å tilpasse modellen etter dette problemet.

### 3.1 Området for modellering og undersøking

#### Nyeggaregionen

Nyeggaregionen ligg ved kanten av den norske kontinentalsokkel og grensar til Møre-bassenget i sør og Vøringbassenget i nord (Brekke, 2000). Området ligg like nord for det kjente undersjøiske raset ved Storegga, som fann stad for omtrent 8100 år sidan (Haflidason et al., 2005) Nyeggaregionen er prega av mykje vertikal strøyming av væsker og gass i sedimenta, noko som blant anna viser seg i form av gasspiper ("gas chimneys") og pockmark over store delar av området. Så mykje som 400 pockmark er observert på den nordre flanke av Storeggaraset, på vassdjupner mellom 500 og 1500 meter (Mienert et al., 2010).



Figur 3.1: Nyeggaregionen i Norskehavet.

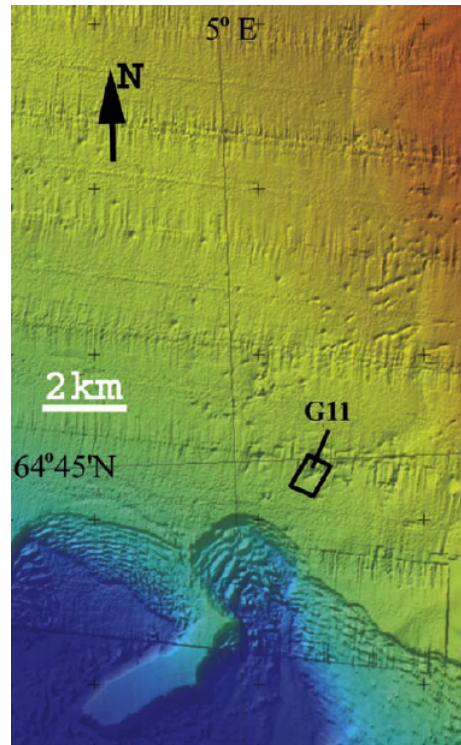
Pockmarka i dette området er opp til 15 meter djupe og har ein diameter som strekkjer seg frå omtrent 30 meter til så mykje som 600 meter (Hjelstuen et al., 2009). Dei fleste av pockmarka er nær sirkulære, men det finnes likevel meir morfologisk<sup>1</sup> komplekse pockmark i området, som har svært irregulær form (Judd og Hovland, 1988). Det mest distinkte med desse pockmarka er likevel førekomsten av kaotiske haugar av karbonatblokker, som stikk opp frå sedimenta inne i kratera (Hovland og Svensen, 2006).

### G11-pockmarket

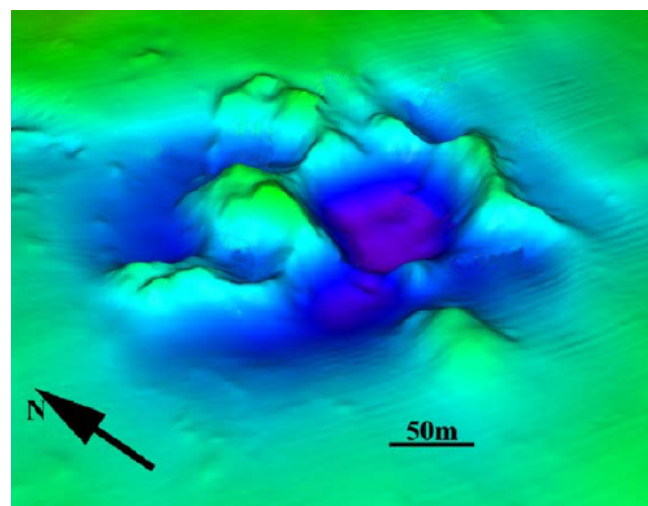
Pockmarket som skal studerast i denne oppgåva blir kalla G11, og er av dei mest diskuterte kratera i Nyeggaregionen. Dette pockmarket, som ei stor fordjuping frå dei omgivande sedimenta på omtrent  $H_s = 730\text{m}$  djupn, har vore undersøkt med både SONAR og ROV ved fleire anledningar, og er derfor også eit av dei pockmarka i området ein har mest kunnskap om. Forma er tilnærma sirkulær, og har to karakteristiske kantar som innesluttar eit sentralt basseng. Diameteren til pockmarket strekkjer seg over omtrent 260 meter, mens djupna er målt til rundt 12 meter, noko som gjer at G11-pockmarket hamnar i den mellomstore klassen (Mazzini et al., 2006). Plasseringa av det aktuelle pockmarket kan sjåast i Figur 3.1 og Figur 3.2, mens forma og djupna til krateret er demonstrert i Figur 3.3.

<sup>1</sup>Morfologi: Læra om former

G11-pockmarket inneheld dessutan 12 synlege karbonatblokker, der den største er heile  $24\text{m}^3$ . Karbonatblokkene, og områda rundt desse, er delvis koloniserte av ein variert fauna, med blant anna bakteriematter, sjøstjerner og sjøedderkoppar (Hovland et al., 2005). Figur 1.1 og Figur 1.2 vist i kapittel 1, er bilete teke med hjelp av ROV, i senteret av nettopp dette krateret.



Figur 3.2: Plassering for pockmark G11, like nord for Storeggaraset.

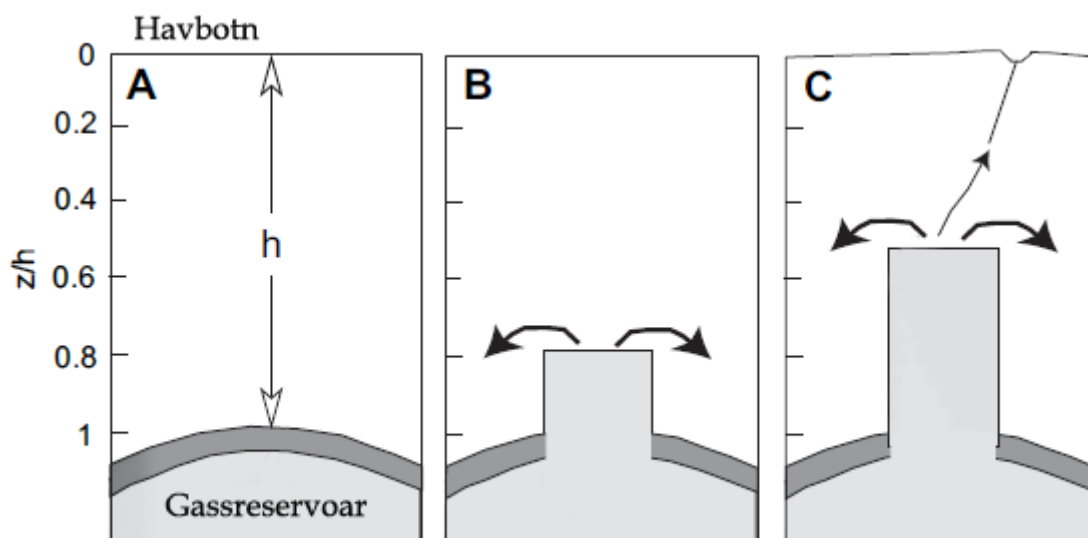


Figur 3.3: Form og djupn til pockmark G11.

## 3.2 Utgangspunkt og mål for modellen

Før vi kan tilpasse parametrane i modellen etter fluidstrøyminga i det aktuelle området, blir det også viktig å presisere under kva slags forhold denne fluidstrøyminga skal finne stad. Pockmarka går nemleg gjennom mange ulike fasar, både før og etter dei blir danna, så det blir naudsynt å få fram akkurat kven av desse fasane som skal under lupa. For å forklare dette på ein best mogeleg måte, vil det vere naudsynt med også ein kort introduksjon til korleis ein anser at desse kratera blir danna. Denne introduksjonen tek utgangspunkt i (Hovland og Judd, 2007) og (Cathles et al., 2010).

Vilkåret for danninga av eit krater på havbotnen er at det er vertikal transport av gass og væske i sedimenta under. Naturgassen har oftast opphav i eit gassreservoar djupt nede i sedimenta, der denne gassen anten har eit biogent<sup>2</sup> eller termogent<sup>3</sup> opphav, eller begge delar. Ettersom trykket i gassreservoaret stig, kan det dannast sprekkar eller svakheiter i sedimenta over, som vil frigjere gassen. Grunna trykkforskjellar og oppdriftskrefter vil denne gassen etterkvart stige oppover mot havbotnen. Denne stigninga er ein svært langsam prosess og kan ta så mykje som fleire tusen år, men etter kvart vil det omsider bli danna gasslommer like under havbotnen. Sidan det øvste laget med sediment ofte består av finkorna granulat, som sand og leire, vil dette vere vanskeleg for gassen å trenge gjennom. Sidan desse sedimenttypane heller ikkje er så massive, vil det etterkvart som trykket i gasslomma blir stort nok, kunne skje ei valdsam gassutblåsing, og danninga av eit einingspockmark. Desse første stega er skissert i Figur 3.4. Sjølve danninga av eit einingspockmark nær havbotnen er også demonstrert i Figur 3.5.

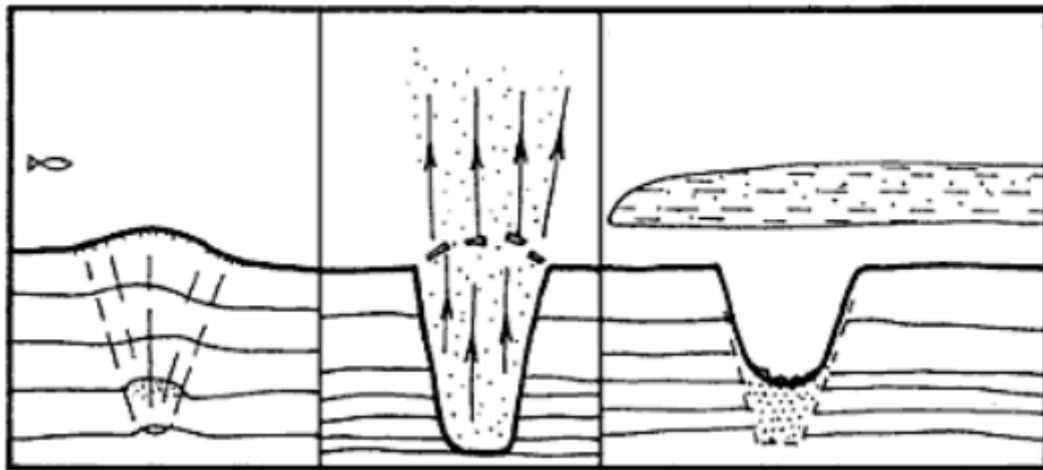


Figur 3.4: *Fase I: Ei gassøyle stig opp mot havbotnen frå eit gassreservoar, og det dannast etterkvart eit einingspockmark.*

<sup>2</sup>Biogen gass er produsert av levande organismar.

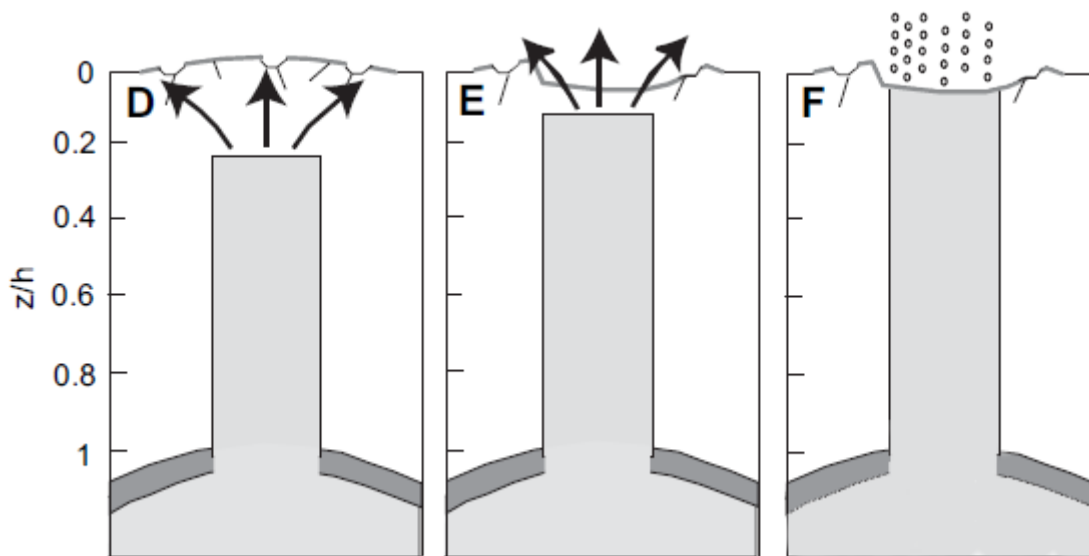
<sup>3</sup>Termogen gass er produsert ved at organisk materiale blir utsett for høg temperatur og høgt trykk over millionar år, djupt nede i sedimenta.





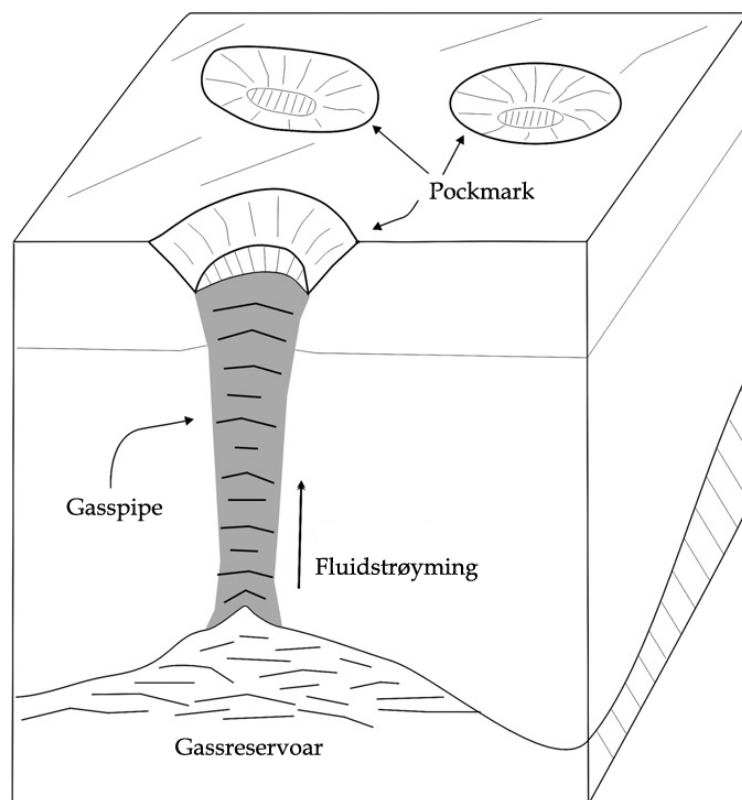
Figur 3.5: Trykket i gasslomma under det lite gjennomtrengelige laget blir etterkvart så stort at eit einingspockmark blir danna i ei plutselig gassutblåsing.

Etter dette ser ein for seg at det vil bli danna mange små einingspockmark i området over gassøyla, og at desse etterkvart vil slå seg saman til eitt stort krater. Desse siste stega er skissert i Figur 3.6.



Figur 3.6: Fase II: Fleire små einingspockmark blir etterkvart til eitt stort krater.

I tida etter at krateret er danna, kan restane av gassen frå det djupe reservoaret stige til havbotnen gjennom dei allereie etablerte kanalane, og frigjerast ut i havet. Denne prosessen kan gjerne gå over fleire år, før det ikkje lenger vil vere signifikante mengder av naturgass igjen i reservoaret. Ei skisse over strøyminga av naturgass frå det djupe reservoaret og ut i havet, gjennom det nyleg etablerte pockmarket, er demonstrert i Figur 3.7.

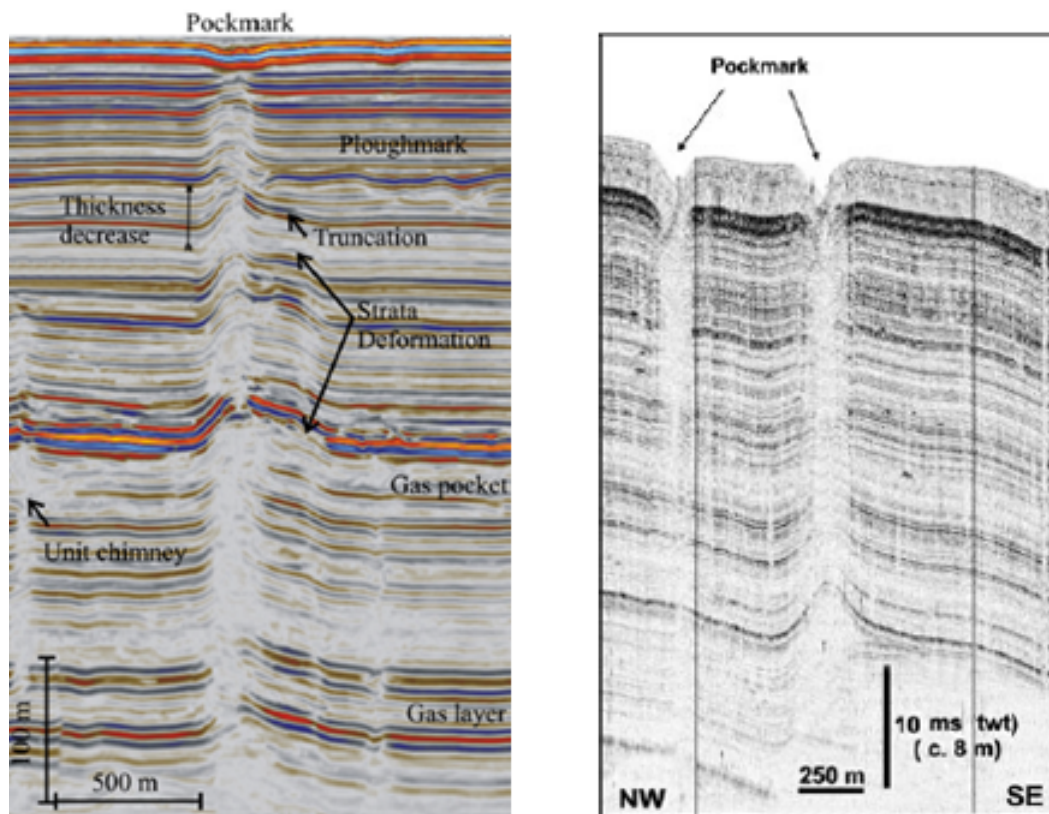


Figur 3.7: Profil over fluidstrømminga frå gassreservoaret opp til krateret.

Etter gassreservoaret er tomt for gass, vil krateret liggje tilnærma dødt igjen, som eit teikn for ettertida på dei valdsame naturkreftene som har vore i sving. Danninga av G11- krateret kan til dømes daterast tilbake til så mykje som for 13 000 - 15 000 år sidan (Reiche et al., 2011), som tyder på at kratera blir godt bevarte etter dei først er danna. Dersom nye gassmengder blir produsert eller frakta inn lateralt frå områda i nærleiken, vil denne gassen følgje dei allereie etablerte kanalane, så danninga av store krater innanfor eit lite området vil truleg kun vere episodiske og ikkje periodiske. Smeltinga av gasshydrat og nytt produsert biogent og termogent materiale, fører til at ein også kan observere såkalla “microseepage” frå gamle pockmark den dag i dag, som dei utbreitte bakteriemattene inne i kratera er eit tydeleg teikn på.

I denne masteroppgåva er det fasen etter at krateret er danna og det framleis er betydelege mengder gass igjen i reservoaret, som skal betraktast.

For å ha noko å samanlikne resultatane frå modellen med, vil det vere av interesse å finne ut korleis ein slik plumeprofil faktisk ser ut i røynda. Akustiske målingar gjort av sedimenta under krater i Nyeggarregionen, kan gje oss eit bilete på nettopp dette. Desse målingane viser spor av meir eller mindre heilt loddrette gasspiper, med så og seie konstant diameter med omsyn på høgda. To dømer på slike djupneprofilar kan sjåast i Figur 3.8. Grunnen til at vi kan sjå områda som er fylde med gass ut frå slike seismiske målingar, er at gass spreier lydbølgjene i mykje større grad enn sedimenta rundt. Desse lydbølgjene når derfor ikkje tilbake til SONAR-skannaren i like stor grad. Denne effekten blir ofte kalla “acoustic blanking” og er svært viktig i forskingsarbeidet med fluidstrømming under havbotnen.



Figur 3.8: *Plumeprofil observert frå seismiske målingar, i sedimenta under tre ulike pockmark i Nyegga-området.*

Den tilnærma konstante radiusen for gasspipa er anslått til å vere omtrent 75 meter for pockmark G11 (Haflidason, 2012). Vi kan merke oss at denne radiusen er ein del mindre enn sjølve pockmarkradiusen observert frå over havbotnen, noko som verkar å vere eit vanleg fenomen for pockmark i området (Haflidason, 2012). Som ein ser frå seismikkbileta er denne plumeradiusen sjølvstgt ikkje eksakt lik for alle høgder, men dette vil vere ei naturleg forenkling av problemet. Kor djupt denne gasspipa går ned i sedimenta, vil variere frå krater til krater, og kan vere vanskeleg å fastslå presist. I denne masteroppgåva vel vi å betrakte eit utlaup som er plassert  $H_p = 250$  m under havbotnen, der havbotnen her refererer til dei øvre kantane av krateret. Utlaupe vi ser på vil derfor vere ei total høgde på  $H = 980$  m under havoverflata.

### 3.3 Startkrav og val av parametrar

No når problemet som skal modellerast er definert, gjenstår det kun å lukke liknings-systemet presentert i delkapittel 2.2, noko som krev at vi må føreskrive startkrav for variablane  $y_1$ ,  $y_2$  og  $y_3$  ved  $\xi = 0$ . Vi treng derfor å bestemme verdiar for “top hat”-tettleik, “top hat”-hastigheit og plumeradius ved utlauptet. Vi må dessutan talfeste dei andre parametrane som skal nyttast i modellen, tilpassa området og det bestemte problemet som skal modellerast. Då dette er gjort kan vi implementere metoden numerisk, og løyse likningane 2.19 – 2.21 frå  $\xi = 0$  til  $\xi = (H_p - 12)/H$ , noko som tilsvarar at vi løysar likningane frå utlauptet opp til botnen av krateret. Dei naudsyne modellparametrane og startkrava vil bli valt og grunngjeve i dette delkapittelet.

## Modellparametrar

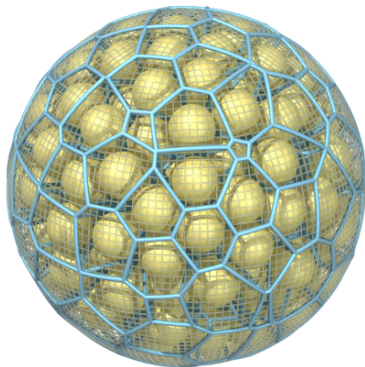
Den første parameteren som vil bli vurdert er ein av dei mest usikre, nemleg medrivningskoeffisienten,  $\alpha$ . I følgje eksperiment gjort for sjøvatn er det forventat at  $\alpha$  er større for reint oppdriftsdriven strøyming enn for i ein momentumdriven jet (Turner, 2001). Ved utlaupet er det den initielle rørslemengda som er den dominerande faktoren, noko som fører til ein jetstruktur, men oppdriftskreftene vil derimot raskt ta over. Det er derfor forventat at  $\alpha$  skal auke med distansen frå utlaupet. Som vi skal sjå seinare, vil ein eventuell jetstråle derimot kun dominere i umiddelbar nærleik av utlaupet for sedimenta vi skal studere i denne oppgåva. Vi kan derfor med god tilnærming betrakte medrivningskoeffisienten som ein konstant over heile djupet.

Sjølve verdien på medrivningskoeffisienten,  $\alpha$ , kan dessverre ikkje bereknast teoretisk, så denne må finnast empirisk (Turner, 2001), noko som er ei svært krevjande og vanskeleg oppgåve. I litteraturen varierer verdiane for  $\alpha$  i sjøvatn frå 0.06 – 0.14. Det er derimot lite informasjon om kva denne medrivningskoeffisienten er i sedimenta, men det vil vere fornuftig å anta at den ligg noko under verdien i reint sjøvatn (Furnes, 2012). I denne oppgåva vil det derfor bli antek at medrivningskoeffisienten ligg ein stad mellom 0.001 og 0.03 i sedimenta. I første omgang er denne koeffisienten valt til å liggje omtrent midt mellom desse yttergrensene, nemleg  $\alpha = 0.015$ .

Permeabiliteten,  $k$ , er ein parameter som også må bestemast empirisk, og er svært avhengig av kva type porøst medium vi betraktar. Sidan evna eit medium har til å transportere fluid er sterkt avhengig av porennettverket, kan denne parameteren ofte relaterast til, og uttrykkast ved, porøsiteten til sedimenta,  $\phi$  (Aarnes et al., 2007). Mange empiriske og teoretiske likningar har derfor blitt utvikla for å uttrykke ein samanheng mellom  $k$  og  $\phi$ . Spesielt er Kozeny-Carman-likninga ei god beskriving av denne samanhengen og er likninga som vil bli nytta i denne oppgåva. Denne likninga kan uttrykkast som

$$k = \frac{\phi^3}{C_0 \tau S_0^2 (1 - \phi)^2}, \quad (3.1)$$

der  $S_0$  er den indre overflata til materialet per einingsvolum,  $\tau$  er eit relativt mål på tortuositeten og  $C_0$  er ein “form”-faktor (Wyllie og Gregory, 1955). Vi antek no at det porøse materialet kan beskrivast som ei såkalla “packed bed” av  $N$  heilt sfæriske granulat per einingsvolum, alle med diameter  $D$ , som skissert i Figur 3.9.



Figur 3.9:  $N$  sfæriske tettpakka granulat innanfor eit tilfeldig valt einingsvolum.

Denne antakinga gjev derfor at

$$S_0 = \frac{N\pi D^2}{N\frac{\pi D^3}{6}} = \frac{6}{D}.$$

Omgrepet tortuositet,  $\tau$ , vart først innført i hydrodynamikken av Bruce og Rose (1949), og er her definert som kvadratet av forholdet mellom den faktiske effektive lengda til fluidstrøyminga i eit porøst medium,  $L_e$ , og den geometriske lengda til mediet i retninga av den makroskopiske strøyminga,  $L$ , altså  $\tau = (\frac{L_e}{L})^2$ .

For tilfellet med ei “packed bed” av sfæriske granulat er tortuositeten ofte føreslått til  $\tau = 2$ . “Form”-faktoren, som hovudsakleg beskriv meir detaljerte karakteristika til mediumet, er på si side generelt estimert til å ha ein verdi mellom 2 og 3 (Wyllie og Gregory, 1955; Kaviany, 1991). I denne oppgåva er det derfor antekke at  $C_0 = 2.5$ , noko som også vart antyda av Carman som eit sannsynleg gjennomsnitt. Produktet,  $\tau C_0$  blir ofte referert til som Kozeny-Carman-konstanten, og ein verdi  $\tau C_0 = 5$ , stemmer dessutan godt overens med forsøk utført av Carman (Xu og Yu, 2008).

Forholdet mellom  $k$  og  $\phi$  kan derfor, etter desse antakingane, uttrykkast som

$$k = 5.55 \cdot 10^{-3} \frac{\phi^3 D^2}{(1 - \phi)^2}. \quad (3.2)$$

I gasslova er gasskonstanten,  $n$ , også ein parameter det kan vere vanskeleg å bestemme. Vi veit likevel etter drøftinga i førre kapittel at den må liggje i intervallet  $[1, \frac{c_p}{c_v}]$ . Forholdet  $\frac{c_p}{c_v}$  vil derimot vere avhengig av både trykk og temperatur, så kva den øvre intervallgrensa for  $n$  faktisk vil vere, er også noko usikkert. Med utgangspunkt i metankalkulatoren på [www.peacesoftware.de/einigewerte/methan\\_e.html](http://www.peacesoftware.de/einigewerte/methan_e.html) kan ein derimot finne dette forholdet for rein metangass ved ulike kombinasjonar av desse to tilstandsvariablane. Ved senteret av krateret, på rundt 742 m djupn, vil det hydrostatiske trykket vere omtrent 74.6 atm, mens temperaturen på si side er målt til å liggje rundt  $-0.7$  °C ved overflata av pockmark G11 (Hovland et al., 2005; Chen et al., 2010). Desse verdiane gjev oss til saman forholdet  $\frac{c_p}{c_v} \approx 1.71$ , ved botnen av krateret. Ved hjelp av regionale termiske gradientar (Sundvor et al., 2000) er temperaturen ved utlaupet estimert til 13 °C, og med eit hydrostatisk trykk på omtrent 98.2 atm, gjev dette oss forholdet  $\frac{c_p}{c_v} \approx 1.75$  ved utlaupet. Sidan naturgass består i all hovudsak av metan, kan derfor det å anta  $1 \leq n \leq 1.8$ , vere fornuftig. I første omgang er derfor gasskonstanten valt til gjennomsnittet av intervallgrensene, nemleg  $n = 1.4$ .

Å fastslå kornstorleiken på sedimentmaterialet vil i vårt tilfelle også vere krevjande, sidan vi betraktar eit såpass stort sedimentvolum, og det er naturleg å forvente at det vil førekome variasjonar innanfor dette. Vi har derimot fått tilgang til ein rapport om Ormen Lange-prosjektet utarbeida av Norsk Hydro, med svært utfyllande data på akkurat dette området, og ut frå tabellane om kornstorleik og sedimentdjupn, verkar  $2 \cdot 10^{-6}$  m som ein fornuftig verdi å bruke (Otter og Knudsen, 2000). Det er viktig å presisere at dette kun er eit slags gjennomsnitt sidan sedimentmaterialet langt frå er homogent i volumet plumen strekkjer seg over. Ut frå tabellane endrar likevel ikkje dette gjennomsnittet seg nemneverdig i djupneintervallet vi skal undersøkje, så det å bruke same verdi for alle djupner er ei forenkling som kan forsvarast.

Porøsiteten,  $\phi$ , er på si side i første omgang antekt å vere homogen over det utforska sedimentlaget, og sjølve verdien er sett til 0.35. Den vertikale tettleikssjiktninga (“density stratification”) til sjøvatnet er også valt til å vere konstant over djupet, med  $\rho_0 = 1025 \text{ kg/m}^3$ , som ei vidare forenkling av problemet. Den dynamiske viskositeten,  $\mu$ , har blitt estimert til  $1.8 \cdot 10^{-5}$  som er den dynamiske viskositeten for rein metangass og derfor også ei naturleg forenkling. Friksjonskoeffisienten,  $C_D$ , er gjerne parameteren vi veit minst om for det porøse mediet vi betraktar, sidan det står lite om denne i litteraturen og den er vanskeleg å måle empirisk, men som ei kvalifisert gjetting er denne parameteren i første omgang sett til verdien  $1.5 \cdot 10^{-5}$ . Dei fire parametrane i dette avsnittet er alle valt med utgangspunkt i (Furnes, 2012).

## Startkrav

Det første startkravet som skal bestemast er “top hat”-tettleiken til naturgassen ved utlaupet,  $\xi = 0$ . Denne tettleiken har blitt estimert til  $85 \text{ kg/m}^3$  med utgangspunkt i metankalkulatoren nemnt tidlegare. Ved å nytte verdiane som nyleg vart berekna for temperatur og trykk ved utlaupet, gjer kalkulatoren ut ein tettleik på  $81.1 \text{ kg/m}^3$ . Sidan naturgassen vi betraktar ikkje kun består av metan, men også omtrent 5% tyngre hydrokarbon (Taylor, 2006), med større tettleik, kan vi vente at tettleiken er noko høgere enn dette. Eit estimat for naturgassen på  $85 \text{ kg/m}^3$  ved utlaupet, kan derfor verke fornuftig.

Dei to siste startkrava ved  $\xi = 0$ , utlaupsradius,  $b_0$ , og “top hat”-hastigheita ved utlaupet,  $\bar{w}_0$ , er dessverre ikkje like enkle å estimere for problemet vi har sett oss. På dette tidspunktet vil det derfor vere naturleg å implementere metoden numerisk, for så å teste ut korleis desse to startkrava må setjast for at modellen skal vere best mogeleg tilpassa problemet vårt.

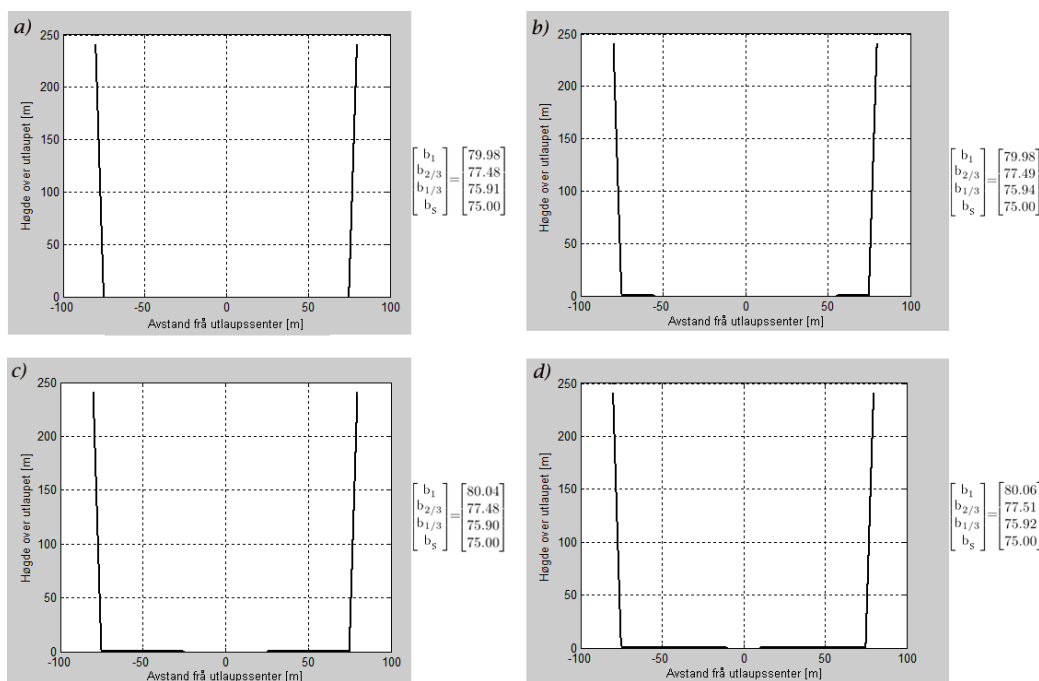
Vi byrjar med å betrakte “top hat”-hastigheita, ved utlaupet. Dette vil vere ekvivalent med å betrakte volumraten ved utlaupet,  $\dot{V}_0$ , sidan desse parametrane vil vere relatert via samanhengen  $\dot{V}_0 = \bar{w}_0 \pi b_0^2$ . “Top hat”-hastigheita og volumraten ved utlaupet skil seg frå dei andre startvilkåra, sidan desse verdiane, i vårt tilfelle, vil vere sterkt avhengig av tidlegare føreskrivne parametrar. Årsaka til dette er at vi ikkje har tal på kva ein realistisk volumrate vil vere, så det beste vi kan gjere er derfor å tilpasse denne raten slik at vi får ønskja startradius på plumen, nemleg 75 meter. Omgrepet “startradius” kan kanskje verke misvisande, sidan vi allereie har ein parameter  $b_0$  i koden, som tilsvarar radius på utlaupet. Det som derimot er meint her er radiusen etter at jetstrålen har stabilisert seg til ei bestemt vidde, og dette skjer oftast innan ein meter over utlaupet for sedimenttypen vi betraktar Furnes (2012). For bestemte modellparametrar vil volumraten,  $\dot{V}_0$ , som gjev ønskja startradius heldigvis vere enkel å estimere, og kan finnast ved å balansere dei to første ledda i momentumlíkninga 2.16. Dersom desse ledda, som høvesvis representerer oppdrift og friksjon, er av same storleik betyr det at vi har ein initiell kvasi-steady state, og vil derfor få fjerna transientane i jeten, som er akkurat det vi ønskjer. Vi nyttar vidare at vi i startfasen har  $\bar{w} = \dot{V}_g / \pi b^2$ , samt likning 3.2, og løyser til slutt for volumraten. Dette fører til estimatet

$$\dot{V}_0 \approx 5.55 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\Delta \rho \phi_0^3 g \pi b_s^2 D^2}{\mu (1 - \phi_0)^2 C_D}, \quad (3.3)$$

der  $b_s$  er ønskja startradius på gassplumen og  $\phi_0$  angjev porøsiteten ved utlaupet.

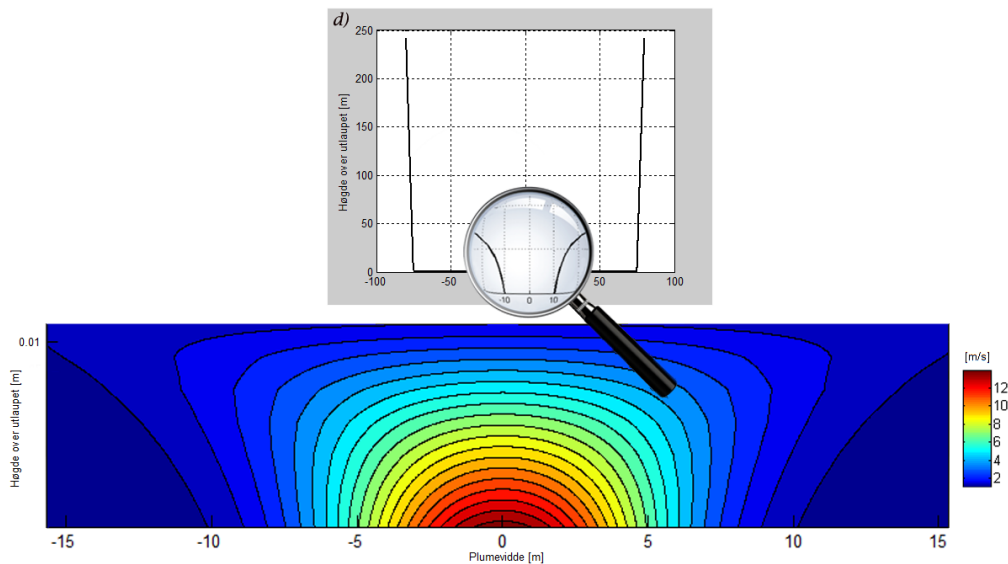
For å kontrollere gyldigheita til dette estimatet vart den initielle volumraten berekna etter denne formelen for 50 tilfeldige trekte verdiar av parametrane  $C_D$ ,  $D$ ,  $\phi_0$ ,  $b_0$  og  $\alpha$ , innanfor fornuftige intervall. Startradius vart deretter berekna numerisk med hjelp av formel 2.22, og samanlikna med den ønskja startradiusen på 75 m. Resultatet var eit maksimalt avvik på 0.05% og eit gjennomsnittleg avvik på 0.01% for dei 50 evaluerte kombinasjonar av parametrane  $C_D$ ,  $D$ ,  $\phi_0$ ,  $b_0$  og  $\alpha$ . Dette må seiast å vere eit svært godt samsvar, noko som tydeleg styrkar det føregåande resonnementet. Sjølv resultatane kan sjåast i Appendix F. Sidan formel 3.3 gjev oss eit svært godt estimat, og i tillegg vil vere veldig tidsparande i samanlikning med andre numeriske alternativ, er det formel 3.3 som vil bli brukt til å bestemme volumraten, og derfor også “top hat”-hastigheita, ved utlaupet i denne masteroppgåva.

Det siste startkravet vi må betrakte er utlaupsradiusen,  $b_0$ . For ein bestemt volumrate, observerer ein raskt ved systematiske numeriske berekningar, at eigenskapane til plumen vil vere så og seie heilt uavhengig av dette startkravet, i heile området over ein eventuell jetstraum. Figur 3.10 viser viddeprofilar med ulik radius på utlaupet, med volumrate berekna etter formel 3.3, for  $b_s = 75$  m, og ein ser at profilane er tilnærma identiske i området over jetstraumen. Målingar av plumeradius etter at jetstrålen har stabilisert seg, og med steg på 1/3 av plumehøgda, er også vist i figuren, og bekreftar at utlaupsradius har lite å seie for både form og vidde til plumen i høgdene over jetstrålen. Eit nærbilete av hastighetsprofilen til jeten, ved ei anteke gaussisk hastighetsfordeling, for tilfelle d), er dessutan skissert i Figur 3.11. Systematiske hastighetsberekningar viser også ein tilsvarende uavhengigheit for utlaupsradiusen, når vi betraktar plumen over jetstrålen. Ein skjønner derfor at utlaupsradius,  $b_0$ , ikkje er av signifikant betydning for området over ein eventuell jetstraum, og den kan derfor like gjernast setjast lik ønskja startradius,  $b_0 = b_s = 75$  m i dei vidare berekningane.



Figur 3.10: Plumeprofilar for utlaupsradius på høvesvis a) 75 m, b) 55 m, c) 25m og d) 10 m.

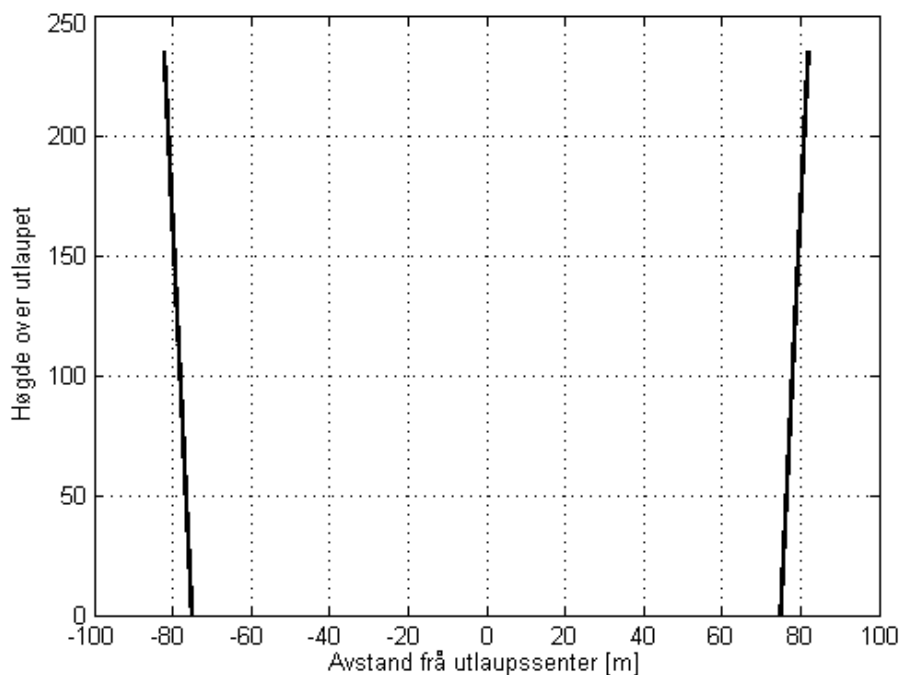




Figur 3.11: *Hastighetsprofil for jetstraumen med utlaupsradius 10 meter.*

### 3.4 Utforming av hypotese

Med alle dei naudsyne verdiane i modellen valt og grunngjeve, er alt no klart for numeriske simuleringar av problemet. Dersom ein nyttar parametrane og startvilkåra føreskrive i førre delkapittel, løyser modellikningane og til slutt plottar plumevidde mot sedimentdjupn, får vi ein viddeprofil som vist i Figur 3.12. Medrivning og utviding av gassen grunna trykkreduksjon, fører, som vi ser, til at plumeradius aukar med høgda, og vi får ein viddeprofil som liknar ei avkutta kjegle. Problemet er derimot at dette ikkje stemmer overeins med dei seismiske målingane som vart demonstrert i Figur 3.8.



Figur 3.12: *Viddeprofil ved konstant porøsitet.*



Spørsmålet som no dukkar opp er kva vi kan gjere for å få modellen vår til å gje ut ein viddeprofil som samsvarar meir med det ein observerer i røynda. Eit alternativ er å ikkje lenger anta ein homogen porøsitet, men derimot at porøsitetsverdien aukar som ein funksjon av høgda,  $z$ , eller som ein funksjon av høgdeforholdet,  $\xi$ , og å sjå om dette kan gje oss ein loddrett viddeprofil. At vi vil ha aukande porøsitet med høgda høyrer i utgangspunktet rimeleg fornuftig ut, sidan ein kan vente at sedimenta langt under havbotnen vil vere meir kompakte enn sedimentlaga over, grunna trykkforskjellar. Dette vil i tilfelle resultere i fleire holrom for gassen å breie seg i til lenger opp ein nærmar seg havbotnen. Ei naturleg hypotese vil vere ei lineær aukeing i porøsiteten med høgdeforholdet  $\xi$ , med andre ord at porøsiteten kan skrivast som  $\phi = \phi_0 + a\xi$ , der  $\phi_0$  er ein startsporøsitet bestemt ved  $\xi = 0$ , og  $a$  er ein porøsitetskoeffisient som angjev kor raskt porøsiteten endrar seg med høgdeforholdet. Vi ønskjer altså å undersøkje om det finnes ein verdi for  $a$  som kan gje den ønskja loddrette viddeprofilen sett på seismikken, og i tilfelle kva storleik ein slik koeffisient må ha for at vi skal kunne oppnå dette.



# Kapittel 4

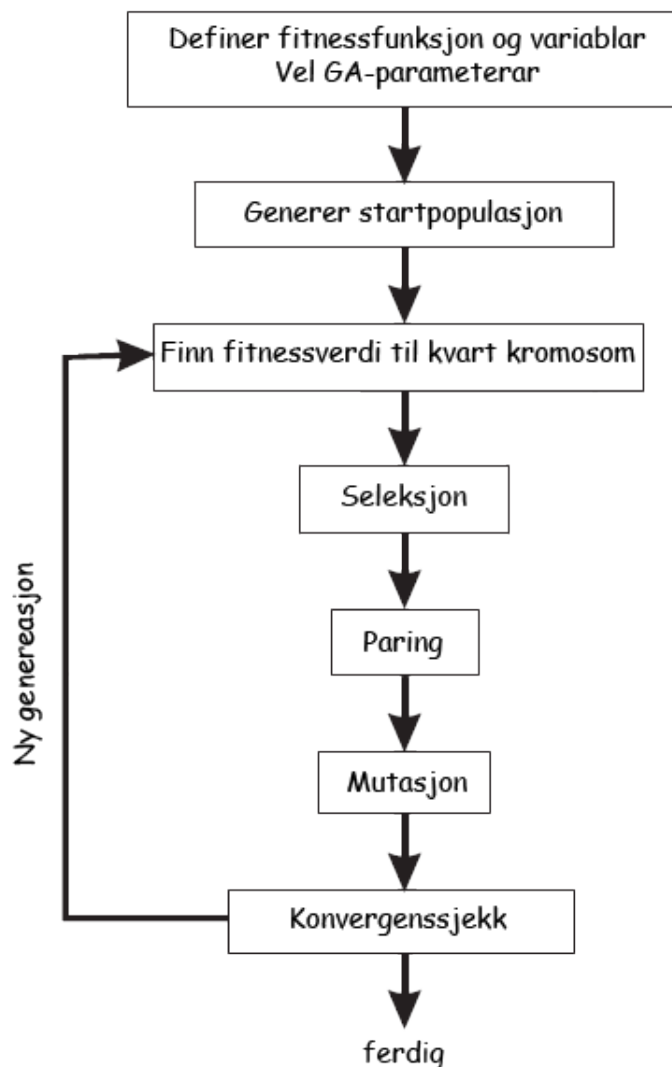
## Verkty

For å undersøkje hypotesen vår på ein smart og systematisk måte er vi avhengige av visse verkty. Vi ønskjer for det første eit verkty for å søkje etter porositetskoeffisientar som kan gje oss ein loddrett viddeprofil, og som kan fortelje oss kva verdien på ein slik koeffisient eventuelt må vere. Det vil også vere av spesiell stor interesse å kunne estimere uvissa i denne berekna koeffisienten, med utgangspunkt i uvissa frå kvar enkelt modellparameter. Sidan ein dessutan har svært knappe tidsressursar under arbeidet med ei masteroppgåve, vil det også vere smart å vurdere tiltak som kan redusere køyretida for simuleringane, og få den totale berekningstida ned på eit akseptabelt nivå. I dette kapittelet vil det bli presentert metodar og verkty som kan nyttast for å oppnå alt dette.

### 4.1 Den Genetiske Algoritme

For å søkje etter porositetskoeffisientar som kan gje oss den ideelle og loddrette viddeprofilen vi ønskjer, har vi valt å nytte optimaliseringsmetoden “den Genetiske Algoritme”, ein algoritme som vil bli forklart i detalj og drøfta i dette delkapittelet. Denne algoritmen er direkte inspirert frå biologien og vart først lagt fram av den amerikanske forskaren John Henry Holland i 1975, i den banebrytande boka “Adaptation in Natural and Artificial Systems” (Higuchi et al., 2006). Den Genetiske Algoritme har blitt svært populær dei siste åra, sidan den effektivt kan finne løysingar på problemstillingar som ikkje er mogeleg å løyse reint analytisk, eller der det ville tatt for mykje tid med tilfeldige søk på grunn av kombinatorisk eksplosjon av mogelege samansetningar. Andre fordelar med metoden er at den kan takle problem med svært mange variablar og at den ikkje krev informasjon om den deriverte til funksjonane som er tilknytt problemet, noko som er eit krav for mange andre optimaliseringsmetodar. Algoritmen er relativt kompleks og derfor også vanskeleg å programmere, men den kan derimot enkelt lastast ned i ulike versjonar frå verdsveven eller finnast ferdig implementert i Matlab sin tilleggspakke “Global Optimization Toolbox”.

Som namnet tilseier baserer metoden seg på ein algoritme som imiterer rein populasjons-genetikk, og mange av uttrykka som er knytte til denne metoden er derfor henta frå nettopp dette fagfeltet. Terminologi som “kromosom”, “mutasjon” og “paring” er til dømes omgrep som er sentrale for å forklare korleis metoden kan konvergere mot den optimale løysinga. Hovudtanken bak denne konvergensen, er inspirert frå Darwins utviklingslære, der den essensielle forklaringa er at individa som er best tilpassa miljøet dei lever i, har størst moegelegheit til å overleve, og dermed også til å kunne føre slekta vidare. Ved hjelp av numeriske metodar med biologiske analogiar, vil algoritmen forkaste dårlege løysingar og kombinere gode løysingar til nye, og halde fram med dette over fleire generasjonar. På denne måten vil den gjennomsnittlege løysingskvaliteten vere venta å auke, sidan gode individ blir tatt vare på og para med kvarandre, mens dei mindre suksessrike individa dør ut, og algoritmen vil forhåpentlegvis konvergere mot ei optimal løysing på det ønskja problemet. Dei ulike stega i algoritmen er skisserte i Figur 4.1, og vil bli forklart i detalj i dei komande avsnitta.



Figur 4.1: Sentrale steg i den Genetiske Algoritme.

Det første som må gjerast før ein kan nytte den Genetiske Algoritme er å definere ein såkalla fitnessfunksjon, eller kostfunksjon, som skal evaluere kor suksessfulle dei ulike løysingane er, i form av ein kvantitativ score. Korleis denne funksjonen ser ut, vil vere heilt avhengig av kva problem vi ønskjer å løyse. Det er vanleg å la låge fitnessverdiar korrespondere til høg suksess, slik at problemet blir analogt til å finne dei variablane som minimerer fitnessfunksjonen (Rothlauf, 2006). I startfasen definerast også innstillingane og parametrane ein ønskjer at algoritmen skal nytte. Dette knyter seg blant anna til populasjonsstorleik, variabelavgrensingar, seleksjonsmetode, paringsmetode, mutasjonsgrad og stoppkriterium. Etter dette er gjort vil metoden opprette tilfeldige forslag til løysingar på problemet, innanfor eventuelle spesifiserte grenser på variablane, til populasjonstalet er nådd. Løysingane, som er ulike kombinasjonar av variablane i problemet, kan med den gjentekne analogien til genetikken, representierast som eit “kromosom”. Dersom vi betraktar eit problem med  $n$  variablar,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , vil kromosomet,  $K$ , vere gitt som

$$K = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Korleis vi vel å representere sjølve variablane er også eit svært viktig punkt, og dei to mest nytta er representasjon i form av ein binær streng (“string”), eller som flyttal. Ved å velje ein binær representasjon kan til dømes det same  $n$ -variabel-problemet ha eit kromosom på forma

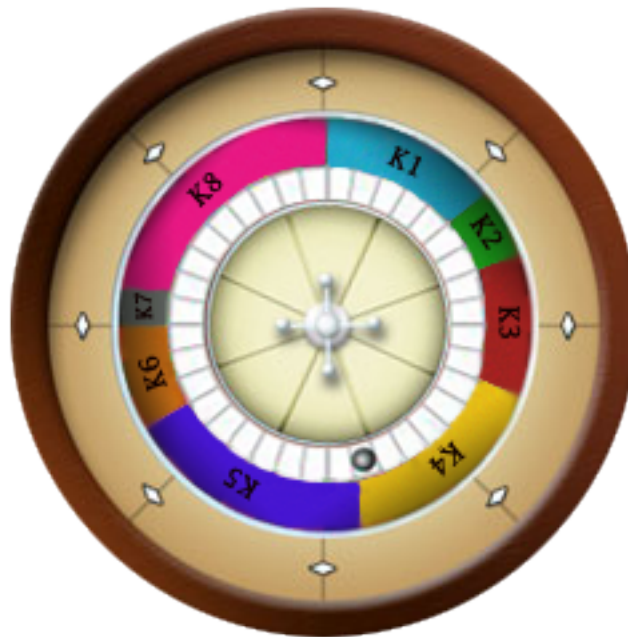
$$K = [\underbrace{0110101}_{x_1} \underbrace{11000}_{x_2} \dots \underbrace{1000110011}_{x_n}].$$

Antal bits som er naudsynte for å representere kvar variabel, blir bestemt av antal mogelege verdiar dei ulike variablane kan ha. Denne representasjonsforma er derfor vanlegast å bruke for variablar som kun kan ha eit bestemt antal diskrete verdiar. For den aktuelle problemstillinga i denne masteroppgåva er det fornuftig å nytte kontinuerlege variablar, og flyttalsrepresentasjonen vil derfor vere den mest naturlege. Den binære representasjonen er likevel teke med under denne introduksjonen, sidan den tilbyr ei mykje enklare forklaring på prosessane bak sentrale steg i algoritmen.

## Seleksjon

Etter at populasjonen er oppretta, vil kvart enkelt kromosom bli evaluert av den konstruerte fitnessfunksjonen, og rangert etter suksess. Dei dårlegaste løysingane, altså kromosoma med dei høgste fitnessverdiene, blir med ein gang forkasta. Kor stor del av kromosoma som skal forkastast i kvar generasjon er eit val som må bestemast på førehand. Av dei resterande løysingane blir det så valt ut kromosom til paring og rekombinasjon. Det vil vere ønskjeleg at dei kromosoma som representerer dei beste løysingane har størst sjanse for å formeire seg, så det er vanleg at kromosoma blir trekt ut med ei sannsynsfordeling som korresponderer til anten rangering eller til sjølve fitnessverdien. Slik seleksjon er også eit kjend fenomen i naturen, der det oftast er dei mest suksessrike hannane som får formeire seg, og føre genene sine vidare. I denne oppgåva er det valt å bruke ei sannsynsfordeling berekna ut frå rangering,

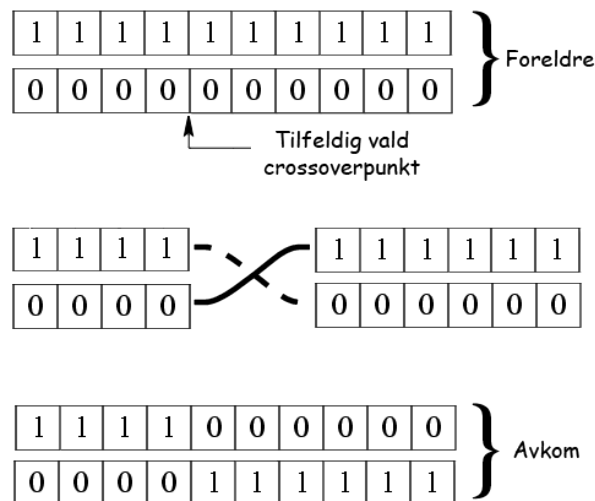
noko som ofte er anbefalt i litteraturen, grunna at sannsyna då kun treng å bereknast ein gang, noko som vil vere tidssparande for metoden (Haupt og Haupt, 2004). Ei sannsynsfordeling berekna ut frå fitnesscoren vil dessutan ha svakheiter dersom det er veldig stor spreining i fitnessverdiane. Ein måte å velje kromosoma ut frå dei berekna sannsyna, er ved hjelp av rulettmetoden, som simulerer nettopp eit ruletthjul der arealet til kvart segment er proporsjonal med det kalkulererte sannsynet for det gjevne kromosomet. Denne seleksjonstypen er demonstrert i Figur 4.2, og er den metoden som vil bli nytta i denne oppgåva. Ein alternativ framgangsmåte er å bruke turneringar for å velje ut kromosoma som skal parast. Denne metoden vel ut eit brukarvalt antal kromosom, og vel deretter ut det beste av desse til formering. På denne måten vil aldri det dårlegaste kromosomet få formeire seg. Ein skil dessutan også mellom turneringar med og utan tilbakelegging (Rothlauf, 2006).



Figur 4.2: Seleksjon av kromosom ved hjelp av rulettmetoden.

## Parings

For kvart par foreldre som blir valt ut av seleksjonsmetoden, blir det danna nye avkom som på ein eller annan måte liknar på foreldra. Det vanlegaste er at det blir danna to avkom frå to foreldre. Paringsmetoden som hovudsakleg brukast er såkalla “crossover”, og er enklast illustrert med variablar som er representert av binære strengar. Eit kryssingspunkt på kromosomet blir her valt ut tilfeldig, og sekvensen til venstre for dette punktet i foreldrekromosom 1, blir kombinert med sekvensen til høgre for punktet i foreldrekromosom 2, og omvendt. Denne kryssinga er demonstrert i Figur 4.3. På denne måten har vi oppnådd to avkom som begge har delar av den binære koden til foreldra, og på den måten kan vere mogelege forbetringar, på vegen mot ei optimal løysing. Det kan dessutan også leggjast inn fleire enn eitt kryssingspunkt, og talet kan vere anten bestemt på førehand eller trekt tilfeldig (Haupt og Haupt, 2004; Rothlauf, 2006).



Figur 4.3: *Crossover i kromosom med binær variabelrepresentasjon.*

Dersom vi derimot arbeider med kontinuerlege variablar er konseptet med crossover vanskelegare å forstå, men det er likevel utarbeidd eit stort antal metodar som kan hjelpe oss også med dette tilfellet. Den enklaste av desse metodane er at ein bytter sjølve variablane mellom kromosoma i staden for å bytte binære sekvensar. Det ekstreme tilfellet der ein har like mange kryssingspunkt som variablar, og det blir valt tilfeldig kva slags forelder som skal bidra til kvar plassering, blir kalla “uniform crossover” (Syswerda, 1989). Det generelle problemet med ombytte av variablane er at ingen ny informasjon vil bli introdusert, og at vi kun oppnår kromosom med ulike kombinasjonar av dei allereie eksisterande flyttala. Dersom ein skal nytte denne metoden må ein derfor ha høg mutasjonsgrad, for å introdusere nytt genetisk materiale. Blandingsmetoden er også eit godt alternativ, og løyser dette problemet ved å kombinere variabelverdier frå to foreldre til nye variabelverdier i avkommet. Dersom ein let  $v_{aj}$  angje variabel  $j$  i kromosomet til avkommet, kan denne setjast til  $v_{aj} = \beta v_{mj} + (1 - \beta)v_{fj}$ , der  $v_{mj}$  og  $v_{fj}$  viser til den tilsvarende variabelen i høvesvis mor- og farskromosomet, og  $\beta$  er eit tal i intervallet  $[0,1]$  (Haupt og Haupt, 2004). Den er naturleg å berekne den korresponderande variabelen i det andre avkommet ved å nytte komplementet til den første  $\beta$ -verdien, altså ved å erstatte  $\beta$  med  $(1 - \beta)$  i formelen. Å velje kva slags variablar som skal blandast er også noko som må bestemast. Eit alternativ er å blande alle variablar til venstre eller høgre for eit tilfeldig kryssingspunkt, og dette er også ein vanleg måte å gjere det på. Variablane kan dessutan blandast ved å nytte den same  $\beta$ -verdien for alle variablane, eller ved å bestemme ulike verdier for kvar variabel. Ein moglegheit er også å la  $\beta$ -verdiane bli trekt tilfeldige innafor intervallet.

For alle  $\beta \in [0, 1]$  vil dei utvalte variablane i avkomma nødvendigvis liggje mellom, eller vere lik, verdiane definert av foreldra. Blandingsmetoden vil derfor aldri skape verdier som ligg utanfor ekstremverdiane i populasjonen. For å få bukt med dette problemet kan vi anten stole på mutasjonar, eller bruke såkalla ekstrapoleringsmetodar. Den kanskje enklaste av desse metodane er at tre avkom blir danna frå to foreldre, ved at variabel  $j$  i avkomma blir berekna ut frå formlane (Wright, 1991)

$$\begin{aligned}
 v_{a1j} &= 0,5v_{mj} + 0,5v_{fj} \\
 v_{a2j} &= 1,5v_{mj} - 0,5v_{fj} \\
 v_{a3j} &= -0,5v_{mj} + 1,5v_{fj}
 \end{aligned}$$

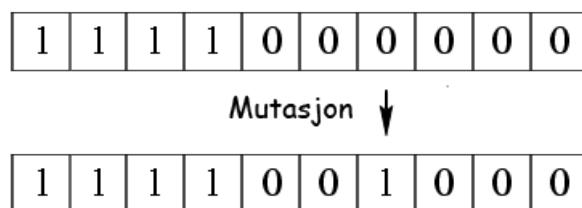
I tilfelle nokre av desse variablane er utanfor dei tillatne grensene vil dei bli forkasta eller justert. Dersom alle variablane derimot er innanfor grensene, eller det ikkje er spesifisert variabelrestriksjonar, er det vanleg at det er dei to beste avkomma som er valt til å få fortsetje.

Pakken “Global Optimization Tools” tilbyr oss valet mellom ei rekkje ulike crossoveralternativ for den Genetiske Algoritme, og mange av desse tilsvarar versjonar av dei nyleg forklarte metodane. Vi har valt å nytte ein versjon av den presenterte blandingsmetoden saman med ei relativt høg mutasjonsgrad, men kunne like gjerne ha valt ei anna innstilling, sidan dei aller fleste syntes å fungere veldig bra for vårt optimaliseringsproblem. Å vere klar over at det finnes ulike alternativ kan likevel vere nyttig, dersom ein skal arbeide med meir kompliserte problem, der konvergens kan vere eit problem.

## Mutasjon

I biologien er ein mutasjon ei endring i eit gen eller kromosom, som finn stad under celledeling. Dette skjer som følgje av feil i kopieringa av arvematerialet, ved at rekkefølga av basar i genet blir endra. Dersom mutasjonen skjer i danninga av kjønnsceller, kan den bli overført til avkommet. I utgangspunktet er mutasjonar uheldige, men dei kan også føre til ei rein forbetring, og er ein av dei viktige drivkreftene bak evolusjon. I den Genetiske Algoritme er også idéen med mutasjonar sentral, og ein viktig del av prosessen i søket etter den optimale løysinga. Mutasjonsoperatorar endrar litt på genotypen til individa, og kan på den måten innføre fordelaktige eigenskapar som ikkje nødvendigvis var til stades i den originale populasjonen. Mutasjonar kan også vere nyttige for at metoden ikkje skal konvergere for raskt i eit lokalt minimum, og gjer at heile søkerommet vil bli undersøkt, så det er større sjanse for at det verkelege globale minimumet til fitnessfunksjonen blir funne. Mutasjonar kan også redde oss frå situasjonar der seinare generasjonar består av svært like kromosom, ein situasjon som sjølvstapt vil vere uheldig, sidan mangfaldet i populasjonen er ei sentral drivkraft. Det er likevel viktig at mutasjonsgrada ikkje er for høg, sidan operatoren då ville endre såpass mykje på avkomma at dei nesten ikkje ville ha noko til felles med foreldra.

Korleis mutasjonsoperatoren fungerer er også lettast å forstå ved den binære representasjonen av variablane, og er illustrert i Figur 4.4. Indeksen som er valt ut for endring er trekt tilfeldig, og verdien i denne plasseringa blir endra til komplementet. For dei kontinuerlege variablane er det vanlegast at mutasjonsoperatoren legg til eit tilfeldig tal, frå ei viss type fordeling, til somme av variablane i kromosomet. Det vanlegaste er å nytte ei gaussisk eller uniform fordeling, men ein må samtidig passe på å stille inn at mutasjonane ikkje kan gje verdier utanfor dei eventuelt fastsette definisjonsmengdene til variablane.



Figur 4.4: *Mutasjon i kromosom med binær variabelrepresentasjon.*



Det er generelt lite ønskjeleg at dei kromosoma i populasjonen som har dei beste fitnessverdiane skal bli utsett for mutasjonar, sidan ein då kan risikere å øydelegge ei allereie god løysing. Ein kan derfor velje ut eit bestemt antal kromosom som skal vere såkalla “eliteløysingar”, immune mot denne operatoren. I denne oppgåva er dette talet sett til 2.

## Konvergenssjekk og stoppkriterium

Etter parings- og mutasjonsoperatorane har verka på populasjonen, blir kromosoma igjen evaluert av fitnessfunksjonen, og rangert etter suksess. Dersom nokre av stoppkriteria er oppfylde, vil metoden avslutte og gje ut den beste løysinga. Vanlege stoppkriterium er at ein når eit bestemt antal generasjonar, ei viss tid eller ein bestemt fitnessverdi. Dersom ingen av desse krava er tilfredstilt vil loopen med seleksjon, paring, mutasjon og konvergenssjekk køyrast om igjen, heilt til ein av desse faktisk er oppfylt.

Før vi går vidare bør det truleg presiserast at optimaliseringsproblemet i denne masteroppgåva ikkje vil få utnytta det fulle potensialet som den Genetiske Algoritme faktisk har. Vi kjem nemleg kun til å søkje etter éin variabel som ikkje naudsynt gjev den *beste* løysinga, men kun ei *god nok* løysing etter kva vi har definert som stoppkriterium for algoritmen. Den same jobben kan derfor også bli gjort med andre mindre komplekse søkjande algoritmar, på truleg ein like tilfredstillande måte. Grunnen til at vi likevel har valt å nytte denne algoritmen er at vi ser på det som ein interessant og lovande metode for framtida. Kunnskapane og erfaringane tileigna under bruken gjennom denne masterperioden, kan dermed ved seinare høve nyttast innan forskning på meir komplekse og passande optimaliseringsproblem.

## 4.2 Monte Carlo-metodar

Å kalkulere uvissa i en outputparameter med utgangspunkt i uvissa i sjølve inputparametrane, er ofte av stor interesse. Dersom ein bereknar outputparameteren frå eit analytisk uttrykk, kan ein vanlegvis berekne denne uvissa ved hjelp av partiell derivasjon dersom sjølve funksjonsuttrykket er overkommeleg. Dersom dette derimot ikkje er tilfelle, eller vi ikkje har eit analytisk uttrykk å ta utgangspunkt i, finnes det heldigvis alternative metodar som kan nyttast. Ein metode vil til dømes vere å trekke inputparametrane tilfeldig frå intervall som dekkjer uvissa i desse parametrane, og berekne outputparameteren for denne parameterkombinasjonen. Dersom ein gjer dette svært mange gangar, kan ein då føre statistikk på outputparameteren, og få eit inntrykk av kva den mest sannsynlege verdien vil vere, og kanskje viktigare, også eit estimat på uvissa i denne parameteren. Dette er eit døme på ein såkalla Monte Carlo-metode, ein type metode som vil bli drøfta i dette delkapittelet.

## 4.2.1 Historie og innføring av Monte Carlo

Ein “Monte Carlo-metode” kan beskrivast som ein teknikk der ein brukar tilfeldige tal og sannsyn for å utforske eit problem. Vi kan seie at vi brukar tilfeldige tal som eit verkty for å berekne noko som ikkje er tilfeldig (Bindel og Goodman, 2009). Metoden vart utvikla av Stanislaw Ulam, John von Neumann og Nicholas Metropolis under arbeidet deira med hydrogenbomba under andre verdskrig, men det kan også argumenterast for at andre vitskapsmenn, som Enrico Fermi, hadde nytta liknande statistiske metodar i tiåret før. Metoden er kalla opp etter bydelen Monte Carlo i Monaco, der hovudattraksjonane er kasino med til dømes rulett og terningspel, som begge kan sjåast på som spel med tilfeldig oppførsel (Pengelly, 2002).

Det var derimot ikkje under sjølve arbeidet med hydrogenbomba metoden først vart påtenkt, men under eit kortspel kalla “Canfiel”, då Ulam byrja lure på kor ofte ein kunne forvente å lukkast i denne kabalen. Etter at han raskt gav opp å berekne dette analytisk, kom han på den geniale idéen om å heller gjere eit stort antal gjennomføringar av kabalen, og sjå på den relative frekvensen av vellukka utfall. Det som gjorde denne tanken ekstra spanande og forlokkande, var at forskarane nyleg hadde blitt tildelt den enorme datamaskina ENIAC til arbeidet med hydrogenbomba. Ulam byrja då raskt å tenke i baner av datasimuleringar, som han skjønnte kunne gje han mange nok gjentakingar av slike forsøk til at den relative frekvensen nærma seg det faktiske sannsynet. Monte Carlo-metodar vart derimot ikkje nytta på ENIAC før etter krigen var avslutta, då dei tre forskarane hadde fått vidareutvikla metoden til å løyse problem angående nøytrontransporten til bomba (Newman og Barkema, 1999; Anderson, 1986).

Til tross for at ENIAC fylte eit heilt rom, var den ikkje spesielt kraftig, eller stabil, og metoden var derfor ikkje særleg tilpassa slike problem i starten. Tankane bak metoden levde derimot vidare, og etter datateknologien for alvor blomstra i dei komande tiåra byrja slike metodar verkeleg å kome til sin rett. Programerte generatorar som gjev ut pseudotilfeldige tal, enorm kapasitet for lagring og ikkje minst kraftige prosessorar har revolusjonert måten ein kan løyse komplekse problem, og Monte Carlo-metodar er no svært sentrale i alt frå risikoanalyse i økonomi til berekningar innan kjemi og kjernefysikk. Metodane som blir nytta varierer sjølvsagt frå kva type problem ein ser på, men det einaste som strengt tatt skal til for å kalle noko ein “Monte Carlo-metode” er at det blir nytta tilfeldige tal på ein systematisk måte for å utforske problemet.

Monte Carlo-metodar er spesielt nyttige i simuleringar av system med mange kopla fridomsgrader, og er derfor mykje nytta i arbeid med fluid. Metodane kan til dømes brukast til å modellere fenomen der vi har uvisse i fleire av inputvariablane. Den store fordelten med metodane er at dei gjev oss moglegheita til å oppnå numeriske løysingar på problem som i utgangspunktet er altfor kompliserte til å løyse analytisk.

Sidan Monte Carlo-metodar tross alt kun tilbyr oss tilnærma løysingar på dei gjevne problema, blir det å betrakte feilen ein essensiell faktor ved bruk av desse metodane. Forsøk for å minimere denne feilen er hovudgrunnen til at det finnes så mange ulike Monte Carlo-metodar. Nokre metodar passar bra til visse problem, og gjev derfor høg presisjon og liten feil, men kan likevel vere tilsvarande dårleg dersom dei blir nytta på andre problem. Ei overveging om kva slags type Monte Carlo-metode som skal nyttast i modelleringa er derfor naudsynt. Så sjølv om prinsippet og tankegangen bak i utgangspunktet er svært enkle, krev det likevel detaljert kunnskap innan sannsyn for å

beskrive dei tilfeldige forsøka, matematisk programmering for å designe og implementere algoritmen som skal nyttast, samt statistikk for å analysere dei endelege data (Newman og Barkema, 1999).

Fellesnemnaren for Monte Carlo- metodane er som nemnt at dei alle gjennomfører mange simuleringar ved å bruke tilfeldige tal for å gje ei tilnærming på det ønskja problemet. Dei tilfeldige tala er derfor svært viktige, og kan sjåast på som sjølv hjartet av Monte Carlo-metodane. Ein diskusjon om korleis vi skal produsere tilfeldige tal, og kor vidt tala vi nyttar i metodane verkeleg er tilfeldige, eller i det minste tilfeldige nok, blir derfor heilt naudsynt.

## 4.2.2 Tilfeldige tal og pseudotilfeldige tal

Ei numerisk følgje blir kalla statistisk tilfeldig dersom den ikkje inneheld noko form for gjenkjenneleg regularitet eller mønster. Statistisk tilfeldighet treng derimot ikkje å bety ekte tilfeldighet, som kun vil vere tilfredstilt dersom følgja er umogeleg å spå på førehand og ikkje på noko punkt vil repetere seg sjølv.

Nesten alle tilfeldige tal som blir nytta i Monte Carlo-metodar, blir generert av data-program, og kan derfor ikkje sjåast på som ekte tilfeldige, sidan dei alle blir danna ved hjelp av fullt deterministiske algoritmar. Slike tal blir av den grunn kalla “pseudotilfeldige tal”, men er i aller fleste høve gode nok til formåla våre, dersom vi vel generator med omhug.

Hovudoppgåva til dei pseudotilfeldige generatorane er å generere ei følgje av tilfeldige, reelle og uniformt fordelte tal i intervallet  $(0,1)$ . Dersom dette kan gjerast, finnes det teknikkar som kan transformere desse tala til tilfeldige tal med andre sannsynsfordelingar, dersom vi er interessert i dette. Normalfordelte tilfeldige tal, kan til dømes ofte vere ønskjeleg. Den vanlegaste og mest kjente metoden for å transformere uniformt fordelte pseudotilfeldige tal over til normalfordelte, blir kalla Box-Müller-transformasjonen. Denne transformasjonen blir utdjupa i Appendiks D, sidan normalfordelte tilfeldige tal er av særskild interesse under Monte Carlo-simuleringane våre. Matlab brukar på si side ein metode kalla “The Ziggurat Method” som i hovudsak, og noko forenkla sagt, trekker tilfeldige punkt  $(x,y)$  uniformt fordelt i planet, og forkastar dei som er over den ønskja normalfordelingskurva (Moler, 2004; Marsaglia og Tsang, 2000, 1984). Denne metoden er ferdig implementert og grunnlaget for hovudfunksjonen “randn”, og det er denne funksjonen som først og fremst har blitt nytta for berekning av normalfordelte pseudotilfeldige tal nytta i denne masteroppgåva. Box-Müller-transformasjonen har likevel, av interesse og nysgjerrighet, også har blitt testa ut i simuleringane. Begge metodane synest å fungere svært bra.

Det som vil kjenneteikne ein god pseudotilfeldig generator er at den er rask, har stor periode, god fordeling og at dei ulike sekvensane som er genererte ikkje er korrelerte. Kvaliteten som er kravd av dei tilfeldige tala, kjem heilt an på kva dei skal brukast til. Som Pierre L’Ecuyer formulerte det, å velje ein god generator er som å velje ein ny bil; For visse folk eller formål er fart å føretrekke, mens for andre er pålitelegheit det viktigaste (L’Ecuyer, 1999). For Monte Carlo-simuleringar er det fart, periode og fordelingsegenskapane til generatoren som står i hovudfokus, mens i til dømes kryptografi vil uføreseielegheita vere det essensielle.

Ein ting ein ikkje kan kome utanom når ein konstruerer tilfeldige tal numerisk, er at dei implementerte generatorane faktisk er styrde av ein deterministisk prosess, og at sekvensen derfor er føreseieleg dersom ein kjenner algoritmen bak. Ein kan derfor argumentere for at det er ein viss korrelasjon mellom medlemma av følgja, sjølv om denne kan vere godt gøymt, og at dette derfor kan ha innverknad på Monte Carlo-berekingane. Denne mistanken vart tydelig bekrefta i forsøk utført av Ferrenberg, Landau og Wong, der dei nytta ulike pseudotilfeldige generatorar under bestemte Monte Carlo-metodar, der ein på førehand kjente det faktiske svaret på problemet ein skulle approksimere med metodane. Konklusjonen var at den subtile korrelasjonen mellom tala frå nokre av generatorane i visse tilfeller var tilstrekkeleg til å få approksimasjonar så mykje som hundre standardavvik frå det korrekte svaret (Ferrenberg et al., 1992). Ein skjønar derfor at val av generator må tilpassast formålet, sidan det kan få dramatiske følgjer ved naiv bruk av desse.

Det kan nemnast at det også finnes alternativ til desse pseudotilfeldige generatorane, som baserer seg på verkelege tilfeldige hendingar. Det eksisterer til dømes generatorar som tar utgangspunkt i bakgrunnstråling eller radioaktiv desintegrasjon, som begge kan sjåast på som udestimistiske hendingar. Ein kan også kjøpe CD-ar med tilfeldige tal, generert frå slike målingar, men til Monte Carlo-metoden vi skal bruke i dette forsøket, vil dette vere ein unødig kostnad, sidan generatoren vi har til rådighet vil vere meir enn god nok til formålet vårt.

Ved sidan av å vere eit billigare og lettare skaffeleg alternativ, er det også ein annan viktig grunn til å nytte dei pseudotilfeldige generatorane, ovanfor eventuelle verkeleg tilfeldige prosessar. Følgja av tal som blir produsert av desse generatorane er nemleg fullstendig bestemt av startverdien algoritmen nyttar, ofte kalla ein “seed”. Dette gjer at vi kan få ut ulike følgjer av tal ved å nytte ulike startverdiar, men det betyr også at vi kan produsere den eksakt same følgja fleire gangar, ved å nytte den same startverdien. Det kan kanskje verke som eit rart ønskje å ville regenerere ei slik følgje, men dette kan faktisk vere eit heilt naudsynt hjelpemiddel for å analysere feil i ein Monte Carlo-metode. Dersom det til dømes dukkar opp eit bestemt problem med metoden ved ei viss gjennomkøyring, er det langt frå sikkert at denne oppførselen vil vise seg igjen for ei anna talfølgje. Ved å nytte same startverdi for algoritmen, kan ein derimot køyre same følgja fleire gangar, og samtidig køyre feilsøking på metoden, heilt til problemet er kartlagt (Newman og Barkema, 1999).

## Val av Generator: The Mersenne Twister

Den pseudotilfeldige generatoren som er valt å nytte i denne masteroppgåva går under namnet “Mersenne Twister”, ein generator som dei siste åra har blitt førstevallet til dei fleste forskarar som nyttar seg av statistiske simuleringar i arbeidet sitt (Tian og Benkrid, 2009).

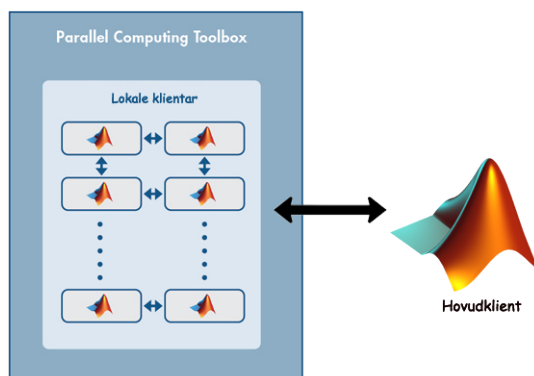
Denne algoritmen, av typen “Twisted Generalised feedback Shift Register”, er designa spesielt for bruk til nettopp Monte Carlo-simuleringar, og det er derfor lagt mykje vekt på fart, periode og fordeling i utviklinga av denne generatoren. Algoritmen er også designa for å korrigere feil og svakheiter i tidlegare generatorar. Namnet kjem av at periodestorleiken er valt til å vere eit Mersenne-primtal, nærmare bestemt  $2^{19937} - 1$ , eit tal som er av den svimlande storleiksordenen  $10^{6001}$ . Dette er rett og slett eit overveldande

høgt tal, meir enn godt nok for så og seie alle tenkjelege Monte Carlo-simuleringar. For å få eit inntrykk av kor stor denne perioden faktisk er, kan det nemnast at antal atom i det observerlege universet er estimert til å liggje mellom  $10^{78}$  og  $10^{82}$  (Førre, 2010). Algoritmen bak denne generatoren er dessutan basert på rekursjon over ein endeleg binær kropp, som gjer generatoren også svært rask, sidan binære operasjonar generelt blir utført mykje raskare enn flyttalsoperasjonar og heiltalsoperasjonar (Kroese et al., 2011; Matsumoto og Nishimura, 1998).

I dei nye versjonane av Matlab, versjonane frå og med Matlab 7.4 2007, er denne pseudotilfeldige generatoren ferdig implementert. I simuleringar gjort på PC-ar med tidlegare versjonar av Matlab har eg lasta ned egne Mex-filer, som gjer at denne algoritmen også har vore tilgjengeleg på desse. Desse filene kan finnast på <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/6614>.

### 4.3 Parallele køyringar

Ein av dei store fordelane med både Monte Carlo-køyeringar og den Genetiske Algoritme er at dei begge er skreddarsydde for parallele køyringar i Matlab. Dersom ein har tilgang til datamaskiner med kraftige prosessorar som har fleire kjernar og ein Matlab-versjon med “Parallel Computing Toolbox” installert, kan ein dele desse kjernane inn i ulike Matlab-klientar som samarbeider seg i mellom og systematisk utvekslar informasjon med hovudklienten av Matlab. Eit slikt samarbeid er illustrert i Figur 4.5. Under denne masterperioden har eg hatt tilgang til min eigen Acer Aspire 5750G med Intel Core i7 2.2GHz-prosessor med 4 kjernar, samt til dei tre “superdatamaskinene” “Ahlfors”, “Selberg” og “Roht” på det matematiske institutt som alle har prosessorar med heile 32 kjernar og 128GB internt minne. Med slike gode reiskap tilgjengeleg, kan det å bruke ein del ekstra tid på å planlegge og konfigurere Matlab-skript og -program for parallele køyringar vere svært lurt, og tidsparende på lang sikt. Nokre av simuleringane som vert gjort i denne masteroppgåva er dessutan svært tidskrevjande dersom ein skal simulere med realistiske verdiar, og berekningar ved hjelp av parallele køyringar er i høg grad med på å realisere at slike køyringar faktisk blir mogelege å gjennomføre innanfor ei akseptabel køyretid. Sidan parallellisering av systemet er såpass viktig for denne masteroppgåva, er det sett av plass til ei utgreiing om korleis slik parallellisering verkeleg fungerer, samt korleis ein kan implementere det på ein best mogeleg måte for denne oppgåva.



Figur 4.5: Lokale klientar som samarbeider parallelt under køyringar i Matlab.

### 4.3.1 Parallele berekningar i den Genetisk Algoritme

Ein av dei store styrkane til den Genetiske Algoritme er som nemnt at den opnar for parallele berekningar. Dette skjer ved at dei lokale klientane delar på jobben med å evaluere fitnessverdien til kromosoma, selektare, mutare og pare, noko som sjølvstøtt er effektiviserande. Sidan fitnessvalueringa av kromosoma, i denne oppgåva, vil vere av ein tidskala fleire storleiksordnar over dei andre nemnte operasjonane, er det kun denne som vil bli diskutert og lagt vekt på i den resterande delen av delkapittelet.

Som ein illustrasjon på korleis denne parallelliseringa fungerer, er den Genetiske Algoritme blitt køyrt på problemet som skal under lupa i denne oppgåva, for eit ulikt antal med parallele samarbeidande klientar, mens køyretida kontinuerleg har blitt notert. Populasjonsstorleiken er sett til  $N_{pop} = 16$  og det einaste gyldige stoppkriteriet er at det må fullførast 10 generasjonar. Dette er gjort for at fitnessfunksjonen totalt skal bli evaluert like mange gonger for alle gjennomkøyringane, sidan andre stoppkriterium kunne gjort at metoden terminerte etter varierende antal berekningar, noko som sjølvstøtt ville vore uheldig for samanlikninga. Køyringane for den Genetiske Algoritme er dessutan plassert inne i ei løkke som er bestemt til å køyre  $N_{loop} = 8$  gonger. Dette er på si side gjort for å redusere innverknaden av tilfeldigheit under køyringane, samt for samanlikning i komande delkapittel. Alle skriptkøyringane vart gjennomført 5 gonger, og gjennomsnittet av desse vart brukt. Grunnen til dette er at køyretida vil variere noko for kvar gjennomgang, sidan den Genetiske Algoritme nyttar pseudotilfeldige tal og tida for fitnessberekningar varierer med inputparametrane, men også grunna at køyretida også kan variere med belastninga maskina har frå andre program, samt tidvis overoppheting og manglande kjøling. Delar av resultatata kan sjåast i tabellen under.

Antal parallelt køyrande klientar, n	Køyretid [s]	Skalert køyretid [s]
1	1502	1502
2	755	1510
4	380	1524
8	193	1544

Tabell 4.1: *Køyretid for den Genetiske Algoritme med varierende antal parallelt køyrande klientar.*

Det kan vere rimeleg å forvente at køyretida vil vere omvendt proporsjonal med antal parallele klientar som samarbeider, og som ein ser varierer køyretida nettopp som omtrent  $\frac{1}{n}$ , for dei opplista verdiane i tabellen. Denne omvendte proporsjonaliteten er derimot ein sanning med viktige modifikasjonar. Ein ser for det første, ut frå den skalerte køyretida, som er køyretida multiplisert med antal parallele klientar, at vi ikkje heilt oppnår halvering i køyretid når vi doblar antal kjernar vi køyrer på. Dette kjem av den enkle grunn at det også går tid vekk til kommunikasjon mellom dei lokale klientane, og mellom dei lokale klientane og hovudklienten. Ein observerer også at denne ekstra kommunikasjonstida aukar med antal klientar, noko som også verkar logisk sidan dette igjen vil krevje ein auka informasjonsflyt. Det går også med litt tid til venting på at lokale klientar skal bli ferdige med arbeidsoppgåvene sine, sidan ikkje alle utrekningar vil gå eksakt like fort.

Den viktigaste modifikasjonen til den intuitive omvendte proporsjonaliteten ser vi derimot tydeleg dersom vi utvidar den føregåande tabellen til også å ta med klienttala,  $n$ , mellom 1 og 8, der vi *ikkje* har  $n \equiv 0 \pmod{16}$ .

Antal parallelt køyrande klientar, $n$	Køyretid [s]	Skalert køyretid [s]
1	1502	1502
2	755	1510
3	567	1701
4	380	1524
5	379	1895
6	287	1722
7	286	2002
8	193	1544

Tabell 4.2: *Køyretid for den Genetiske Algoritme med varierende antal parallelt køyrande klientar.*

Vi ser frå denne tabellen at dei nye innførte klienttala verkeleg ikkje passar inn med den tidlegare føreslåtte  $\frac{1}{n}$ -relasjonen. Grunnen til dette er enkel, og kan forklarast ved å ta utgangspunkt i  $n = 7$ . Ved oppstarten av den Genetiske Algoritme vil kvar av desse 7 lokale klientane først bli tildelt éi kromosomevaluering. Når kvar klient er ferdig med denne arbeidsoppgåva får dei så utdelt eitt nytt kromosom. På dette tidspunktet vil det då vere 2 kromosom att som enda ikkje er tildelte. Så snart 2 av dei lokale klientane er ferdige med berekningane sine går dei laus på desse, mens dei 5 andre klientane ikkje kan gjere anna enn å vente på at desse utrekningane skal bli ferdige, før dei får tildelt nye arbeidsoppgåver. Grunnen til dette er at den Genetiske Algoritme ikkje kan gå vidare før alle kromosoma er evaluerte, og seleksjon, paring og mutasjon kan bli utført i overgangen til den neste generasjonen. I praksis krev det derfor 3 rundar med berekningar for kvar generasjon. Den same argumentasjonen gjev oss at det vil vere tilsvarende for  $n = 6$ , og målingane oppført i tabellen viser nettopp at det vil vere ei tilnærma heilt lik berekningstid for desse antala køyrande kjernar. Som ein skjønner er det altså antal rundar med berekningar i kvar generasjon som er den utslagsgivande og dominerande faktoren, og det vil derfor kun vere dei klienttala,  $n$ , som tilfredstillar  $n \equiv 0 \pmod{N_{pop}}$ , som vil oppnå full effekt av denne typen parallellisering. I tilfellet vårt er dette nettopp antala som er lista i den første tabellen, sidan alle desse er faktorar i 16.

Med utgangspunkt i desse tankane, kan eit estimat på den faktiske køyretida derfor bereknast til:

$$T(n) \approx T_1 \cdot \frac{\lceil \frac{N_{pop}}{n} \rceil}{N_{pop}},$$

der  $T_1$  er køyretida utan parallelle berekningar, og  $\lceil x \rceil$  er den såkalla takfunksjonen som gjev ut det minste heiltalet som er større eller lik  $x$ , altså  $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$ .

Ein tabell med dei verkelege verdiane og dei korresponderande estimata berekna ut frå denne formelen er vist i Tabell 4.3

Antal parallelt køyrande klientar, n	Køyretid [s]	Estimert køyretid [s]
1	1502	1502
2	755	751
3	567	563
4	380	376
5	379	376
6	287	282
7	286	282
8	193	188

Tabell 4.3: *Samanlikning mellom målt og estimert køyretid for varierende antal parallelt køyrande klientar.*

Ein ser at formelen gjev eit rimeleg godt samsvar mellom målte og estimerte køyretider, noko som styrker forklaringa gjeve i føregåande avsnitt. Avvika er føreslått til å skyldast blant anna kommunikasjon mellom, og venting på, klientar, noko estimatet ovanfor ikkje tar høgde for.

### 4.3.2 Parfor-løkker og parallelle køyringar av Monte Carlo

“Parfor” er Matlab sin enklaste kommando for parallell programmering, og som namnet tilseier, tilbyr denne kommandoen ei parallellisering av den meir kjente for-løkka. Ved denne typen parallelle køyringar er det no sjølv løkkegjennomgangane som blir fordelt mellom dei lokale klientane. Ein vesentleg skilnad på parfor-løkkene og dei vanlege for-løkkene, bortsett frå dei samarbeidande klientane, er at løkkene blir utført i ei uviss rekkefølge, før resultatet omsider blir sendt til hovudklienten av Matlab. Dette betyr at ein må forsikre seg om at alle naudsyne data er definert før parfor-løkka startar. Parfor-løkker kan nyttast både som små delar i det indre av eit program, men også heilt i dei ytre, som vil vere tilfelle for Monte Carlo-berekningar, der ein ofte vil at heile koden skal køyrast tilstrekkeleg mange gangar. Det er forventa at parallelle Monte Carlo-simuleringar kjem til å få ei sentral rolle innan moderne forskning i framtida, etter kvart som fleirkjerna prosessorar stadig utviklar og forbetrar seg (Rosenthal, 2000).

For å illustrere korleis denne typen parallelt samarbeid føregår i praksis tek vi utgangspunkt i simuleringane utført i det føregåande delkapittelet. Det er også denne gang valt ein populasjonsstorleik på  $N_{pop} = 16$  og eit stoppkriterium på 10 generasjonar, der den Genetiske Algoritme er plassert innanfor ei løkke med  $N_{loop} = 8$  gjennomkøytingar. Skilnaden er no at ein ikkje evaluerer kromosoma i parallell, men i staden køyrer sjølv løkkegjennomgangane parallelt. Resultata frå desse køytingane kan sjåast i Tabell 4.4.



Antal parallelt køyrande klientar, n	Køyretid [s]	Skalert køyretid [s]
1	1502	1502
2	753	1506
3	562	1686
4	379	1516
5	377	1885
6	377	2262
7	376	2632
8	190	1520

Tabell 4.4: *Køyretid ved bruk av parfor-løkke med varierende antal parallelt køyrande klientar.*

Som ein ser vil vi framleis ha ein tilnærma omvendt proporsjonalitet for  $n = \{1, 2, 4, 8\}$ . Vi kan dessutan sjå at denne tilnærminga er noko betre enn for berekningane i føregående delkapittel, noko som kan forklarast med at det går litt mindre tid tapt til utlevering av informasjon mellom klientane ved denne implementeringa. Dette kan virke logisk sidan informasjonsflyten som er naudsyn mellom klientane er mykje mindre for denne typen parallellisering, for akkurat dette døme. For  $n = 8$  vil til dømes alle klientane få tildelt kvar sin løkkegjennomgang, der kvar klient så utfører alle dei totalt 160 kromosomberekningane på eiga hand, og deretter leverer tilbake resultatet til hovudklienten når dei er ferdige med arbeidsoppgåva. Ved parallelle kromosomevalueringar innad i den Genetiske Algoritme vil kvar klient derimot evaluere 2 kromosom per generasjon, gjennom 10 generasjonar, 8 gangar, noko som sjølvsagt også totalt blir 160, men det krev mykje meir informasjonsflyt mellom klientane undervegs på denne måten. Som ein ser er det derimot ikkje snakk om mykje tid, men den ekstra kommunikasjonen vil truleg vere ein viktig faktor for å forklare den vesle tidsdifferansane vi faktisk ser. Det må sjølvsagt presiserast at denne samanlikninga kun kan gjerast med klienttala  $n = \{1, 2, 4, 8\}$ , sidan desse oppfyller både  $n \equiv 0 \pmod{N_{loop}}$  og  $n \equiv 0 \pmod{N_{pop}}$ , som er naudsyn føresetnad for at kvar klient utfører like mange kromosomberekningar, og full effekt av parallelliseringa. Det må også nemnast at for at dette skal vere gjeldande må dessutan alle kromosomberekningar og løkkegjennomgangar ta omtrent like lang tid, noko som er oppfylt i dette tilfelle.

I motsetning til tilfellet med parallelle kromosomberekningar er det no den nemnte betraktninga av modulus ( $N_{loop}$ ) som vil kunne forklare dei tydelege avvika frå ein omvendt proporsjonalitet for dei resterande heiltala i intervallet. Ved ein liknande diskusjon som i det føregående delkapittelet kan ein no argumentere for at antal rundar med løkkeberekningar vil vere gjeve som  $\lceil \frac{N_{loop}}{n} \rceil$ . Eit estimat på den faktiske køyretida ved bruk av parfor-løkker kan ut frå dette resonnementet derfor bereknast til

$$T(n) \approx T_1 \cdot \frac{\lceil \frac{N_{loop}}{n} \rceil}{N_{loop}}.$$

Ei oversikt over dei verkelege tidene og dei korresponderande estimata berekna ut frå denne formelen er vist i Tabell 4.5.

Antal parallelt køyrande klientar, $n$	Køyretid [s]	Estimert køyretid [s]
1	1502	1502
2	753	751
3	563	563
4	379	376
5	377	376
6	377	376
7	376	376
8	190	188

Tabell 4.5: *Samanlikning mellom målt og estimert køyretid for varierende antal parallelt køyrande klientar.*

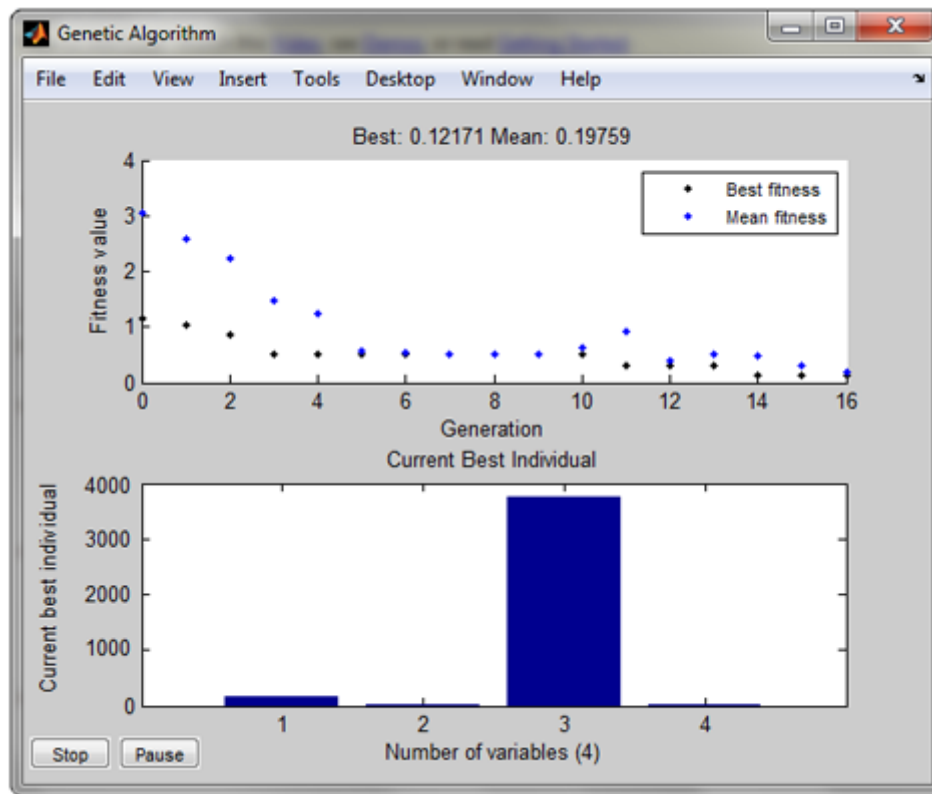
Ein ser igjen eit godt samsvar mellom målte og berekna verdiar for køyretid, som igjen støttar det gjevne resonnementet.

### 4.3.3 Samanlikning og val for vegen vidare

Ein kan sjølvsagt spørje seg kva som skjer om ein kombinerer desse to metodane, og om dette vil føre til ei maksimal effektivisering for alle klienttal  $n$ . Dette er derimot dessverre ikkje tilfelle. Ein observerer nemleg inga reduksjon i berekningstid for  $n = \{3, 5, 6, 7\}$ , ved køyring av “dobbel” parallellisering i samanlikning med det reine parfor-alternativet. Det tyder derfor på at parallelliseringa med parfor-løkker har høgst prioritet, og at eventuelle arbeidslause lokale klientar forblir inaktive sjølv om dei kunne ha blitt nytta til kromosomberekningar. At dette er tilfelle blir bekrefta ved å studere ressursovervakinga på den lokale datamaskina, som viser at klientane som ikkje arbeider med ein løkkegjennomgang faktisk er avventande og inaktive i denne situasjonen. Det reelle valet står derfor mellom å velje eitt av dei to første reindyrka alternativa.

Ofte, når ein køyrer Monte Carlo-berekningar, vil kvar løkkeberekning ta omtrent like lang tid. Dette gjer at ein lettare kan planlegge oppsettet og nytte parfor-løkker med tilnærma maksimal effektivitet, sjølv med lågt antal gjennomkøyningar. I vårt tilfelle derimot, har vi sterkt varierende køyretid for løkkegjennomgangane, sidan den Genetiske Algoritme kan terminere etter eit ulikt antal berekningar, alt etter når eit av stoppkriteria er nådd. I diskusjonen over vart det, for å fremje samanlikningsgrunnlaget mellom metodane, køyrt eit fast bestemt antal generasjonar kvar gang, men slik vil det ikkje vere med andre meir aktuelle stoppkriterium. Sidan populasjonsstorleiken,  $N_{pop}$ , derimot er konstant, vil det å køyre kromosomberekningane i parallell vere mykje lettare å planlegge for maksimal effektivisering, og vil ofte derfor vere det beste alternativet, til tross for ei noko høgre kommunikasjonstid mellom klientane. Dette alternativet mogeleggjør dessutan å nytte det grafiske grensesnittet som demonstrerer evolusjonen i populasjonen grafisk mens den Genetiske Algoritme køyrer, noko som ikkje går dersom

ein køyrer fleire slike algoritmar opp  kvarandre i parfor-løkker. Parallele kromosomberekningar er derfor det valet som er gjort for køyring av løkker med Genetisk Algoritme i denne oppgåva.



Figur 4.6: Grafisk grensesnitt for den Genetiske Algoritme.

Parfor-løkker vil derimot bli aktivt nytta i berekningar som ikkje involverer den Genetiske Algoritme, til dømes i berekningar av ulike hastigheitsprofilar, som er svært så tidskrevjande simuleringar ved bruk av realistiske verdiar, og som fort kunne brukt fleire døgn utan hjelp frå eit fleirtal av lokale klientar.



# Kapittel 5

## Resultat

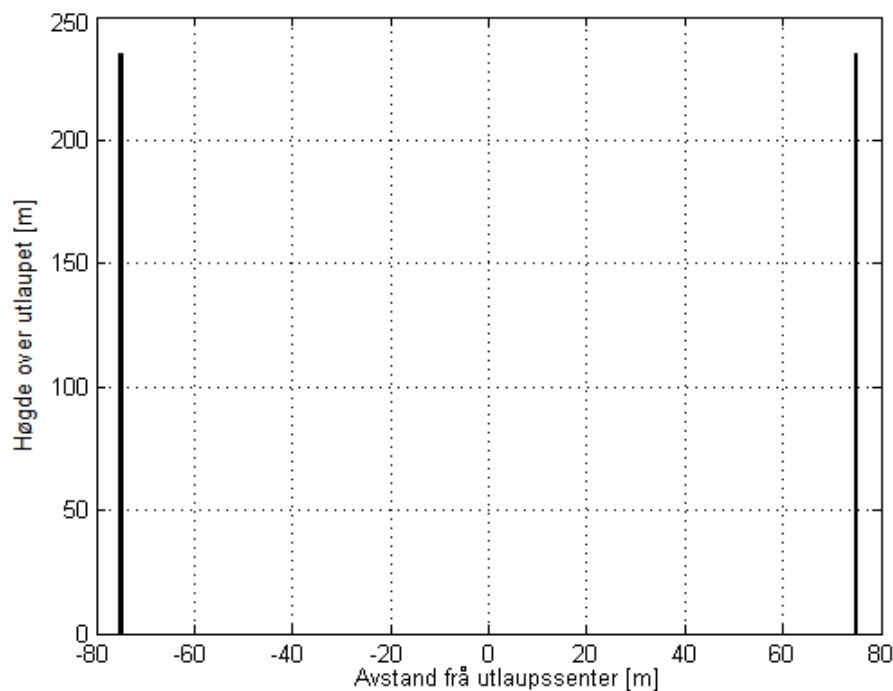
### 5.1 Uttesting av hypotese

Det første vi ønsker å finne svar på er om ein porøsitetsprofil på forma  $\phi(\xi) = \phi_0 + a\xi$ , faktisk kan gje oss ein loddrett viddeprofil liknande den vi ser på seismikken, og kva storleiken på denne porøsitetskoeffisienten,  $a$ , i tilfelle må vere. Dette er eit oppdrag skreddarsydd for den Genetiske Algoritme.

Før vi kan byrje dette søket, må vi definere ein fitnessfunksjon som skal evaluere kor gode dei ulike løysingsforslaga er. Fitnessverdien som blir berekna tek utgangspunkt i lengda på vektoren av avvika frå ein radius på 75 m, ved 1/3, 2/3 og full høgde. Det er også lagt inn eit ekstra ledd,  $\delta$ , for å “straffe” porøsitetskoeffisientane som gjev radiar med ulikt forteikn på avvika frå 75 m, ved dei spesifiserte høgdene. Dette er gjort for å premiere løysingar som har det same forteiknet på avvika, sidan til dømes radiusverdiane [75.1, 75.1, 75.2] gjev ein meir ideell og loddrett viddeprofil enn til dømes [74.9, 75.1, 75.2], sjølv om lengda på avviksvektoren er den same. Den ideelle løysinga, vil som ein skjønner, derfor ha fitnessverdi lik 0, og problemet med å finne den porøsitetskoeffisienten som gjev den ønskja djupneprofilen, er analogt til å minimere fitnessfunksjonen. Kor nærme ein krev at løysinga skal vere 0 før den er sett på som god nok, blir bestemt på førehand og implementert i den Genetiske Algoritme. Den beskrivne fitnessfunksjonen kan sjåast i sin heilskap i Appendiks G.

Med dei estimerte verdiane for kornstorleik, friksjonskoeffisient, medrivningskoeffisient og startporøsitet, samt eit fitnesskrav på 0.02, gav den Genetiske Algoritme ut verdien  $a = 0.0682$ , og profilen sett i Figur 5.1. Som ein ser er dette ein så og seie eksakt loddrett profil, og lengda på avviksvektoren vil i dette tilfellet vere mindre enn 0.02 meter, sidan dette var kravet stilt som stoppkriterium. Det er derfor tydelig at ein porøsitet som aukar lineært med høgda, heilt klart kan gje den ønskja viddeprofilen i modellen vår.

Dersom ein endrar på dei essensielle parametrane i modellen, vil sjølve verdien på porøsitetskoeffisienten,  $a$ , endre og justere seg deretter, men ein vil framleis få den same loddrette profilen. Korleis dei ulike parametrane spelar inn på storleiken av koeffisienten, vil bli drøfta i dei komande delkapitla.



Figur 5.1: Viddeprofil med porøsitetskoeffisient  $a = 0.0682$ , estimert av den Genetiske Algoritme.

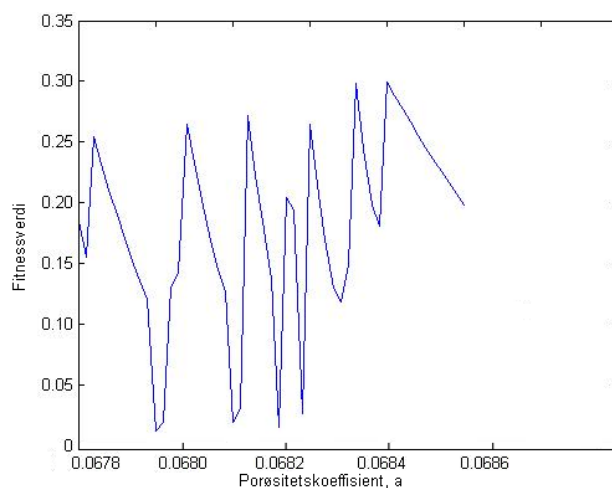
## 5.2 Sensitivitetsanalyse av parametrar

Før vi startar dei endelege Monte Carlo-simuleringane våre i jakta på eit godt estimat for porøsitetskoeffisienten, med tilhøyrande uvisse, blir det viktig med ein diskusjon angående kva parametrar denne koeffisienten er mest sensitive for. Dersom systemet er sensitivt for parametrar som i tillegg har stor uvisse, må dette nemleg takast spesielt omsyn til før vi kan ta fatt på denne siste etappen.

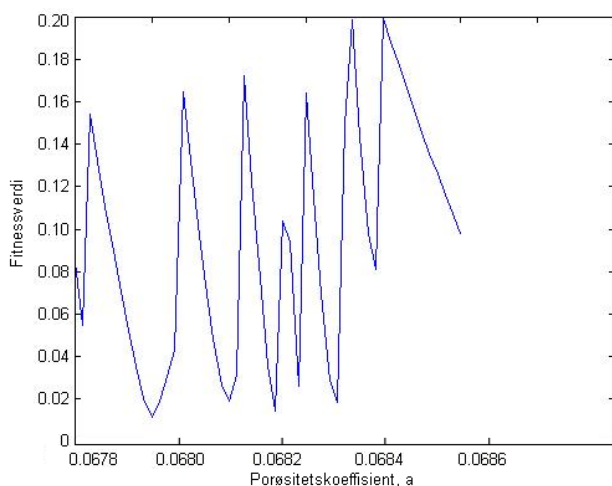
Dei to parametrane som truleg er vanskelegast å bestemme, og av dei mest usikre i denne analysen, er truleg friksjonskoeffisienten,  $C_D$ , samt medrivningskoeffisienten,  $\alpha$ . Desse står det lite om i litteraturen, og er svært vanskelege å måle empirisk i sedimenta. Sidan desse er såpass usikre er det derfor spesielt viktig å finne ut kor sensitiv modellen er for endringar av nettopp desse. Fører endringane kun til små utslag i resultatet treng vi ikkje bry oss så mykje om uvissa i desse parametrane, men dersom det derimot gjev store utslag, blir det heilt naudsynt å ta grep i det vidare arbeidet med modellen.

For dei komande delkapitla er porøsitetskoeffisienten,  $a$ , berekna ved systematisk endring av parameteren som skal under lupa i det gjevne delkapittelet, mens dei andre parametrane er haldne konstante. I staden for å kun rekne ut porøsitetskoeffisientane med svært stor nøyaktigheit éin gang for kvar verdi av parameteren, er det i staden utført 100 målingar med lågt fitnesskrav (mellom 0.05 og 0.10) for så å bruke gjennomsnittet av desse i den vidare sensitivitetsanalysen. Dette er gjort sidan både numerikk og den nytta fitnessfunksjonen gjer at det ikkje kun vil vere eitt svar som gjev den ønskja viddeprofilen, sidan vi har eit fitnesskrav som i alle høver er strengt større enn 0 som stoppkriterium. Det må også nemnast at vi sjølvsagt ikkje er garantert at det vil finnes ei heilt ideell løysing på problemet, og den Genetiske Algoritme garanterer på si side heller ikkje at denne alltid vil bli funne, sjølv om løysinga faktisk eksisterer. Kvifor det

er valt å gjere det på den nemnte måten kjem tydleg fram ved å betrakte Figur 5.2, som syner fitnessverdiar til porøsitetskoeffisientar i intervallet  $[0.0680, 0.0688]$ , for dei gjevne inputparametrane. Som ein ser frå dette døme er det 4 “piggjar” som alle vil tilfredstille eit fitnesskrav på under 0.05. Ein kan spørje seg om desse “piggane” er på grunn av det ekstra tilskotet i kostfunksjonen for å få radiusverdiar med avvik som har same forteikn. Til samanlikning er derfor den same figuren utan dette tilskotet presentert i Figur 5.3, og vi ser at det faktisk er fleire “piggjar” her. Dette er fornuftig sidan denne fitnessfunksjonen vil vere mindre streng og tillèt derfor fleire løysingar innanfor fitnesskravet. Så ved å heller nytte gjennomsnittet for 100 målingar med lågt fitnesskriterium, vil ein truleg få ein mindre tilfeldig score enn ved å berekne éin verdi med så låg fitnessverdi som råd. Ved å nytte denne framgangsmåten kan vi i tillegg snakke om uvissa i målingane, ved å bruke standardavviket som eit mål på dette. Tidsbruken vil derimot ikkje vere mykje større, sidan det ville krevje svært mange generasjonar for å berekne porøsitetskoeffisientar med nærmare maskinpresisjon, i tillegg utan garanti for at den nokon gang vil bli funne.



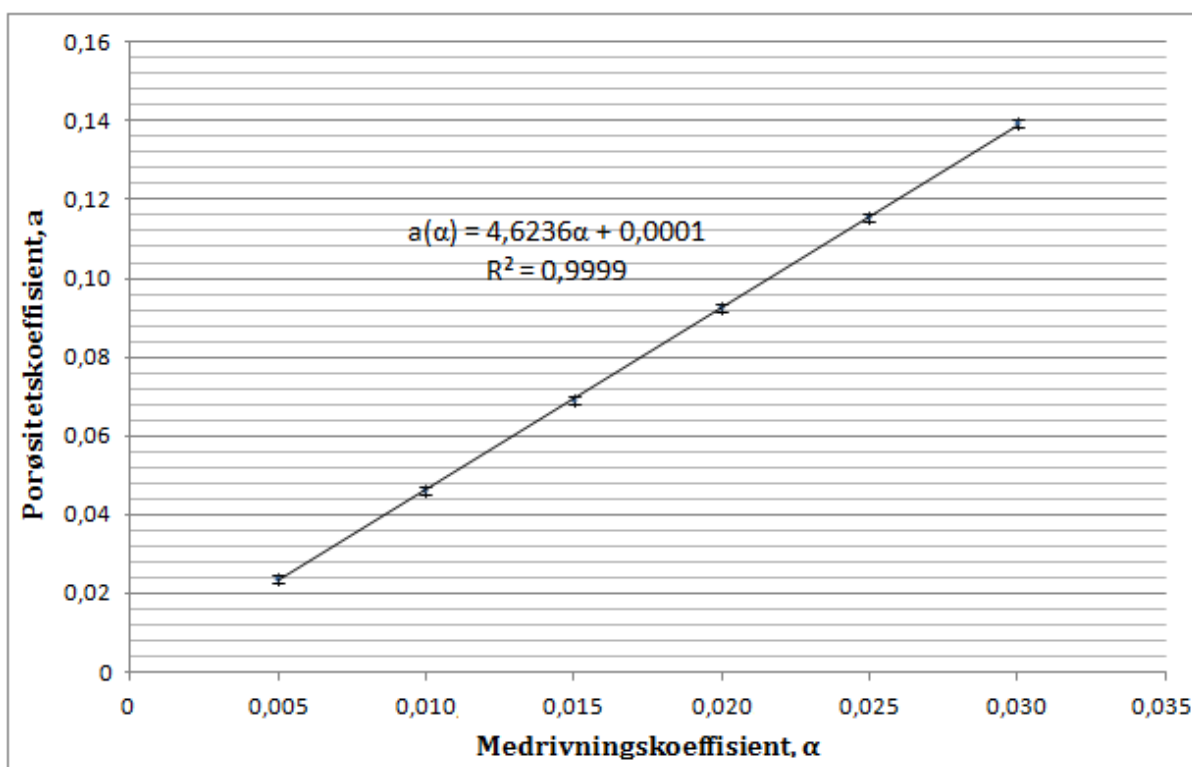
Figur 5.2: *Fitnessverdi for ulike porøsitetskoeffisientar, med tilleggsledd i fitnessfunksjonen.*



Figur 5.3: *Fitnessverdi for ulike porøsitetskoeffisientar, utan tilleggsledd i fitnessfunksjonen.*

### 5.2.1 Medrivningskoeffisient, $\alpha$

Ein av dei mest usikre parametrane i modellen er som nemnt medrivningskoeffisienten,  $\alpha$ . Ved å berekne porøsitetskoeffisienten gjentekne gangar og systematisk endre kun på medrivningskoeffisienten i berekningane, kan ein få eit inntrykk av samanheng mellom desse to koeffisientane. Det vart køyrd 100 simuleringar (med fitnesskrav 0.10) for kvar medrivningsverdi i intervallet  $[0.005, 0.03]$  med steg på 0.005, og gjennomsnittet av porøsitetskoeffisientane korresponderande til desse verdiane vart så berekna. Startporøsiteten vart i desse berekningane sett til 0.35. Resultatet er vist i Figur 5.4, og syner ein lineær samanheng mellom desse to undersøkte parametrane. Uvissa, som her er estimert med eitt standardavvik, er også plotta, og den beste linja er så trekt ved hjelp av Minste kvadraters metode. Den beste linja gav likninga  $a(\alpha) = 4.6236\alpha + 0.0001$ , og ut frå figuren ser ein at linja ligg godt innanfor uvissa til målingane. Ein  $R^2$ -verdi på 0.9999 frå Minste kvadraters metode styrker også observasjonen om ein tydelig lineær samanheng. For ei beskriving av Minste kvadraters metode og ei utdjuining om kvalitetsmålet  $R^2$ , henvisast det til Appendiks E. At vi ikkje har ein rein proporsjonalitet, men også eit lite positivt konstantledd er ikkje heilt uventa. Sjølv utan medrivning vil vi nemleg også ha ei lita utviding av plumen, grunna utviding av sjølve gassen grunna reduksjon av det hydrostatiske trykket. Ved å utføre serien av målingar for andre startporøsitetar,  $\phi_0$ , vil ein også finne ein tilsvarende lineær relasjon mellom  $\alpha$  og  $a$ , men stigningstalet vil variere noko.



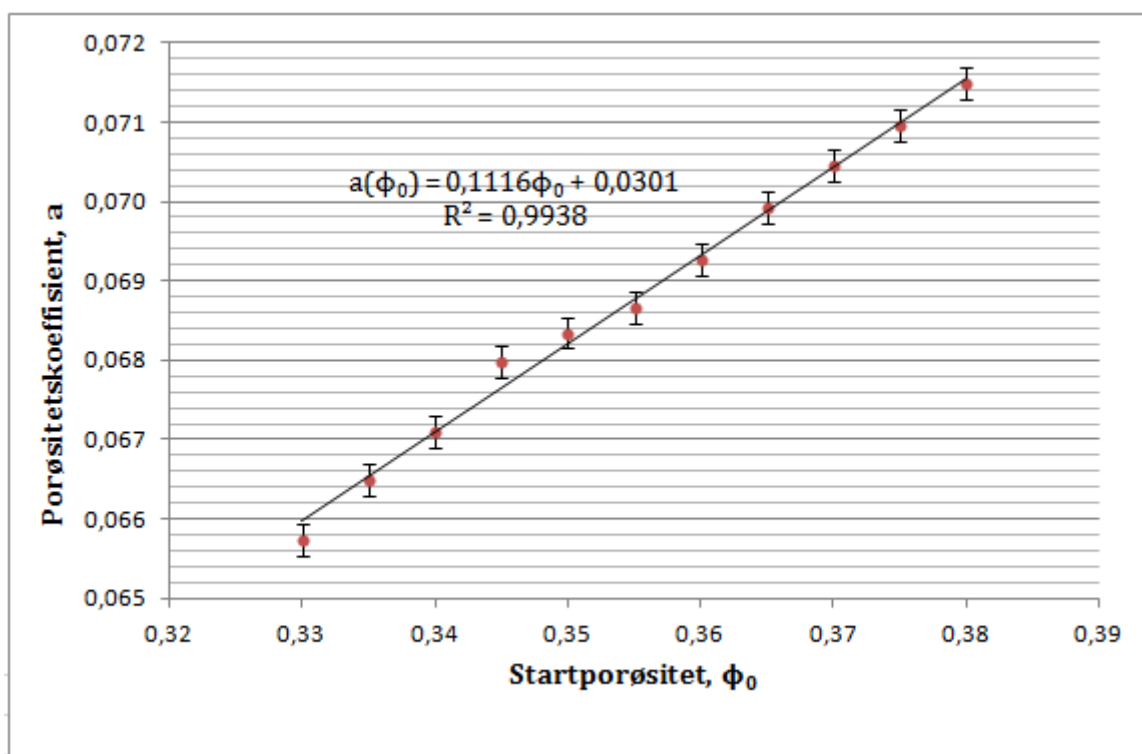
Figur 5.4: Medrivningskoeffisient plotta mot porøsitetskoeffisient, for startporøsitet 0.35.

Som ein skjønner ut frå denne analysen er porøsitetskoeffisienten sterkt avhengig av medrivningskoeffisienten. Sidan medrivningskoeffisienten i tillegg er svært usikker, er det tydelig at dette er ein parameter som må takast særleg omsyn til når vi skal køyre dei endelege Monte Carlo-simuleringane.



## 5.2.2 Startporøsitet, $\phi_0$

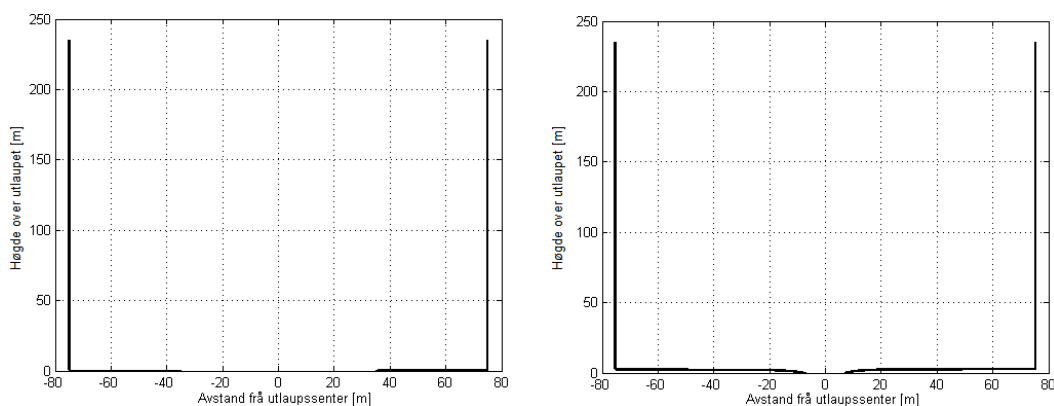
Ved å gjere tilsvarende berekningar, men denne gangen systematisk endre startporøsiteten,  $\phi_0$ , i staden for medrivningskoeffisienten, kan vi også få eit mål på korleis porøsitetskoeffisienten varierer med denne parameteren. Det er også her køyrd 100 simuleringar (med fitnesskrav 0.05), for startporøsitetar i intervallet  $[0.33, 0.38]$  med steg på 0.005. Medrivningskoeffisienten er her sett til 0.015. Resultatet er vist i Figur 5.5, og syner ein tilnærma lineær samanheng mellom variablane. Uvissa i punkta, er igjen estimert med eitt standardavvik, og den beste linja er så trekt ved hjelp av Minste kvadraters metode. At vi ikkje kan forvente noko så enkelt som ein heilt lineær samanheng også denne gangen, heng truleg saman med den komplekse innverknaden denne parameteren har på modellen, særleg med tanke på relasjonen i berekninga av permeabiliteten,  $k$ . Ein ser vidare av figuren at porøsitetskoeffisienten varierer mykje mindre innanfor det aktuelle intervallet enn det medrivningskoeffisienten gjorde, noko som seier oss at resultatet vårt er mindre avhengig av kva verdi i intervallet vi vel for denne parameteren. Likevel er det ein viss relasjon mellom parametrane, så det vil uansett vere ein god idé å ta høgde for uvissa også i startporøsiteten i Monte Carlo-simuleringane.



Figur 5.5: Porøsitetskoeffisient plotta mot startporøsitet, for medrivningskoeffisient 0.015.

### 5.2.3 Utlaupsradius, $b_0$

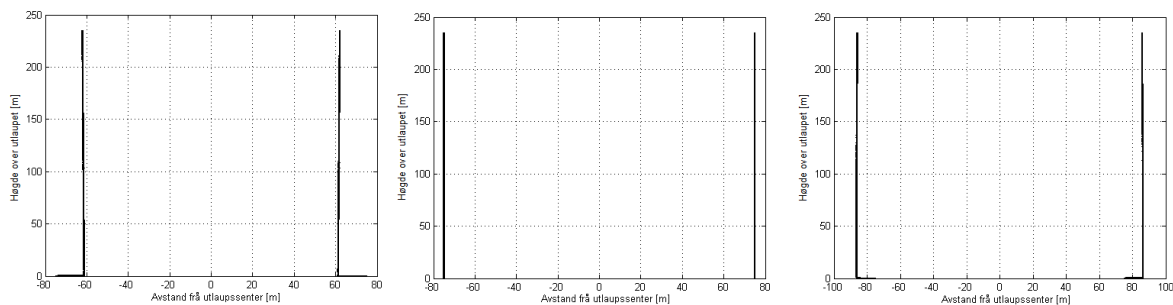
Som nemnt tidlegare i oppgåva har radiusen på sjølve utlaupet,  $b_0$ , minimalt å seie for viddeprofilen i området over ein eventuell jetstråle. Figur 5.6 demonstrerer korleis plumen ser ut ved 35 meter og 7 meter utlauksradius, dersom ein nyttar porositetskoeffisienten berekna i delkapittel 5.1. Ein observerer ein loddrett og fin viddeprofil i området over jetstrålen i begge høver. Vi anser derfor porositetskoeffisienten for å vere uavhengig av sjølve radiusen på utlaupet, og kan derfor like gjerne setje denne til å vere lik den konstante radiusen vi ønskjer på viddeprofilen vår.



Figur 5.6: Viddeprofil med estimert porositetskoeffisient,  $a = 0.0682$ , for utlauksradius 35 og 7 meter.

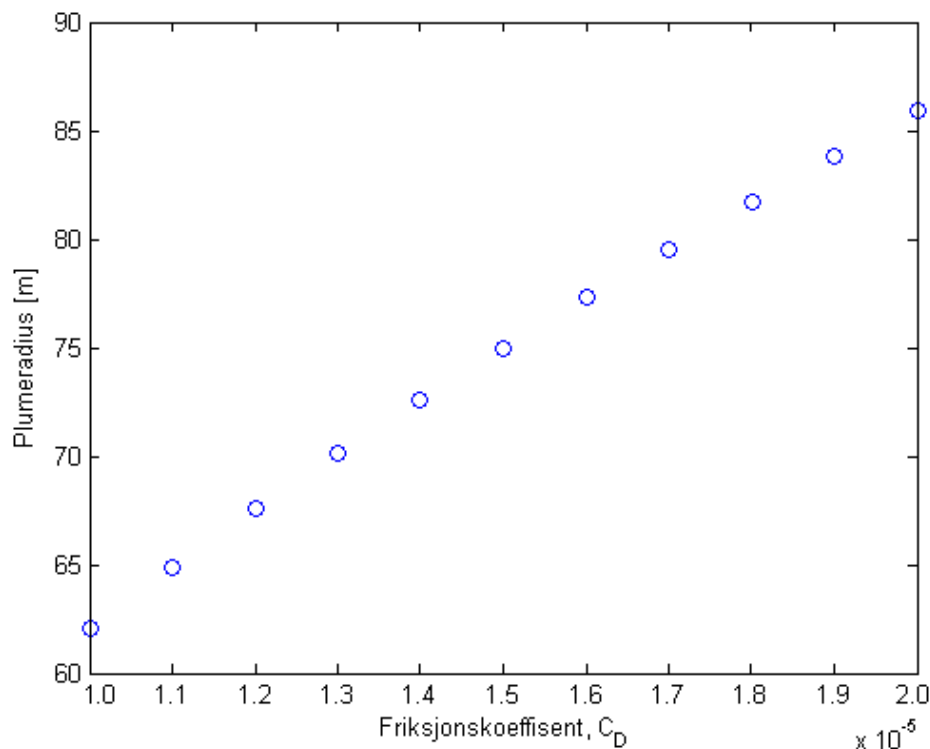
### 5.2.4 Friksjonskoeffisient, $C_D$

I likskap med medrivningskoeffisienten er friksjonskoeffisienten også ei parameter vi er svært usikre på, og ei sensitivtetsanalyse av denne parameteren blir derfor spesielt viktig. Ved å ta utgangspunkt i dei tidlegare fastsette parametrane, og systematisk endre kun på friksjonskoeffisienten, for så å sjå korleis plumeprofilen endrar seg, vil ein raskt få eit innblikk i kor sensitivt resultatet vårt er for nettopp denne variabelen. Volumraten som vart nytta er berekna ut frå formel 3.3 med verdien for  $C_D = 1.5 \cdot 10^{-5}$ . I Figur 5.7 kan ein sjå plumevidda som funksjon av høgda, for dei tre tilfella med  $C_D = 1.0 \cdot 10^{-5}$ ,  $C_D = 1.5 \cdot 10^{-5}$  og  $C_D = 2.0 \cdot 10^{-5}$ . I desse berekningane er det nytta ein porositetskoeffisient,  $a = 0.0682$ , i tråd med resultatata i delkapittel 5.1.



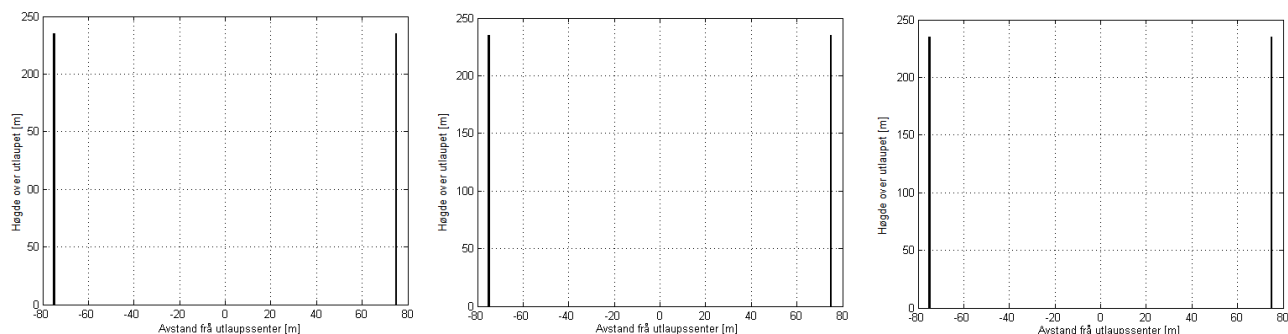
Figur 5.7: Viddeprofil for ulike verdiar av friksjonskoeffisienten,  $C_D$ , med konstant volumrate ved utlaupet. Frå venstre til høgre:  $C_D = 1.0 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.5 \cdot 10^{-5}$  og  $2.0 \cdot 10^{-5}$ .

Ein ser ut frå denne figuren at vidda på plumen er sterkt avhengig av verdien for friksjonskoeffisienten. Det er viktig å igjen presisere at dette er for ein *bestemt* volumrate ved utlaupet. Korleis vidda varierer med denne koeffisienten er vidare antyda i Figur 5.8. Vi observerer derimot at sjølve forma på plumen, etter dei første metrane over utlaupet, er relativt lik, og alle tre tilfella viser tilnærma loddrette profilar. Dette seier oss at den same porositetskoeffisienten, med god approksimasjon, gjev ei loddrett gasspipe, innanfor dette intervallet av friksjonskoeffisienten,  $C_D$ .



Figur 5.8: Plumeradius for ulike verdier av friksjonskoeffisient.

Dersom ein derimot *endrar* volumraten,  $\dot{V}_0$ , i takt med endringane i friksjonskoeffisienten, i tråd med formel 3.3, vil ein vente å finne vesentleg mindre utslag. Dette blir i høg grad bekrefta av målingane representert i Figur 5.9, vist under.

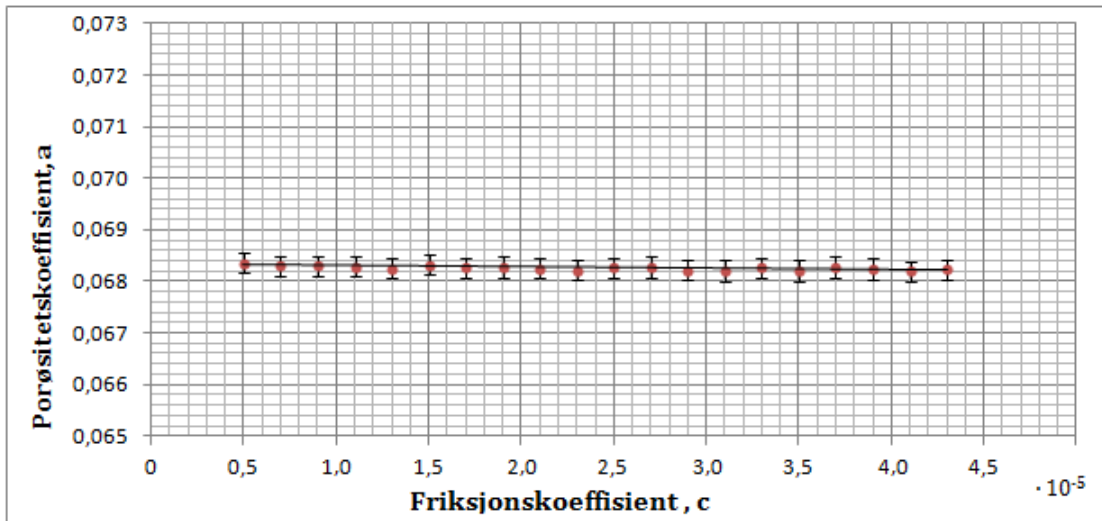


Figur 5.9: Viddeprofil for ulike verdier av friksjonskoeffisienten,  $C_D$ , med korresponderande endring i volumrate,  $\dot{V}_0$ . Frå venstre til høgre:  $C_D = 1.0 \cdot 10^{-5}$ ,  $1.5 \cdot 10^{-5}$  og  $2.0 \cdot 10^{-5}$ .

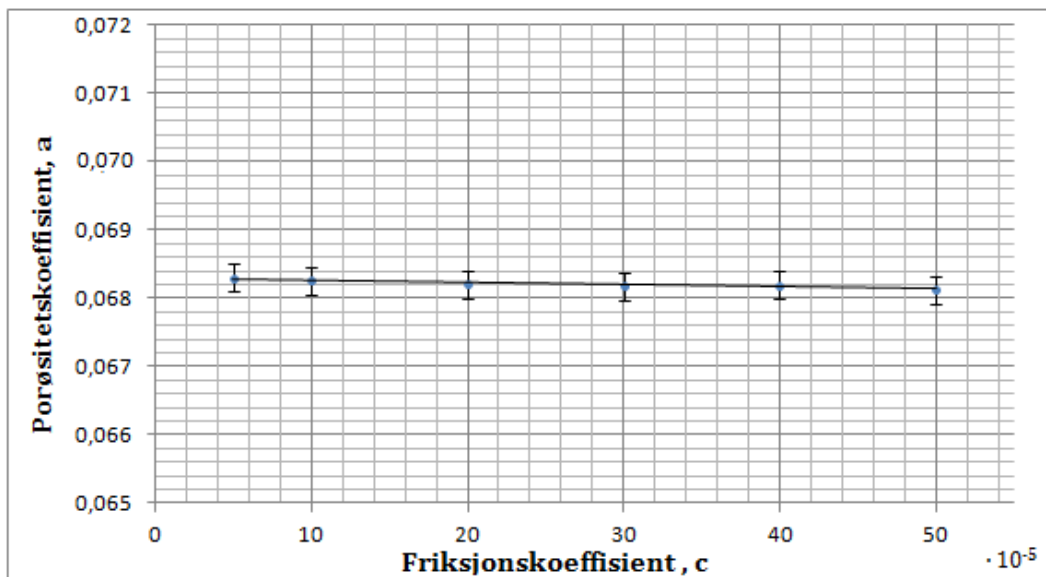
Som ein ser er desse viddeprofilane så og seie identiske, noko som tyder på at dersom ein kompenserer for endringane i friksjonskoeffisienten med ei korresponderande endring

i  $\dot{V}_0$ , vil storleiken på friksjonskoeffisienten, i denne forstand, ikkje ha noko særskilt å seie for bestemming av porøsitetskoeffisienten.

Denne mistanken kan langt på veg bekreftast ved å utføre ei liknande analyse på friksjonskoeffisienten, som det har blitt gjort i dei føregåande delkapitla. Ved å systematisk endre friksjonskoeffisienten i intervallet  $[0.5, 5.1] \cdot 10^{-5}$ , med steg på  $0.2 \cdot 10^{-5}$ , og halde dei resterande parametrane konstante, fann vi etter 100 simuleringar for kvart steg (med fitnesskrav på 0.05), resultatet demonstrert i Figur 5.10. Det vart i tillegg utført tilsvarende målingar utanfor det nemnte intervallet for å kontrollere at relasjonen held for også enda større friksjonsverdiar, og desse er vist i Figur 5.11.



Figur 5.10: *Friksjonskoeffisient plotta mot porøsitetskoeffisient, for  $\phi_0 = 0.35$  og  $\alpha = 0.015$ , ved korresponderande endring i volumrate.*



Figur 5.11: *Friksjonskoeffisient plotta mot porøsitetskoeffisient, for  $\phi_0 = 0.35$  og  $\alpha = 0.015$ , ved korresponderande endring i volumrate, i eit utvida intervallområde.*

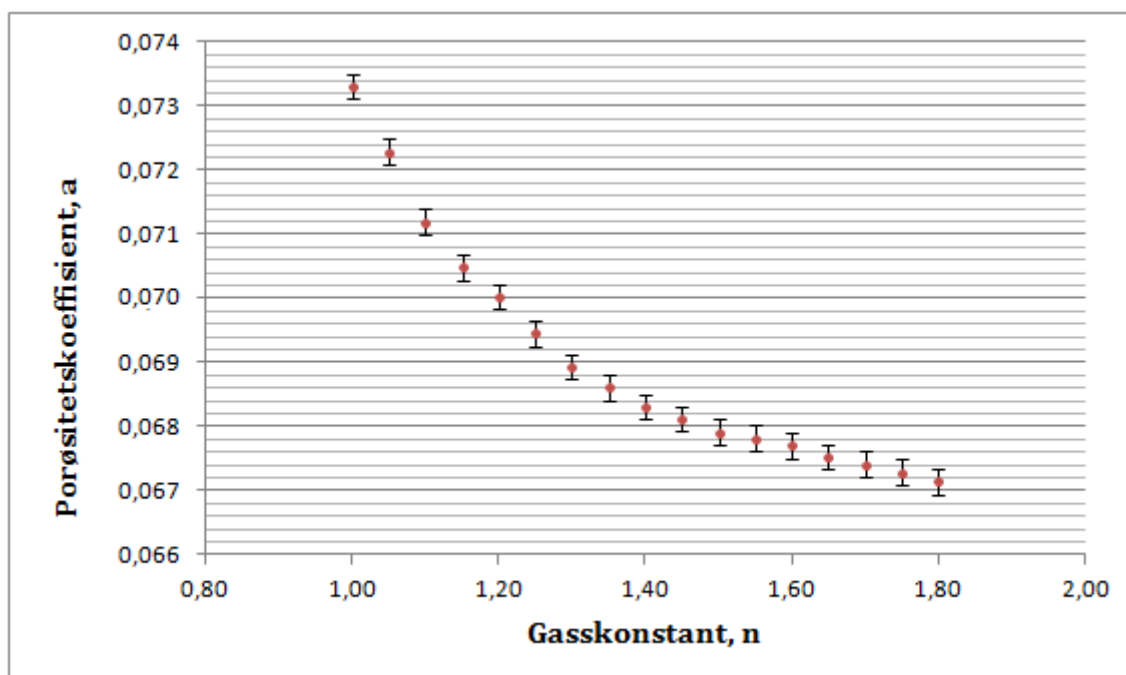
Ein ser her at dersom vi kompenserer for ei endring i friksjonskoeffisienten med ei korresponderande endring i volumrate, etter formel 3.3, kan vi betrakte systemet vårt som så og seie heilt uavhengig av denne faktoren. Sjølv om vi aukar friksjonskoeffisienten med så mykje som ein faktor på 100, vil porøsitetskoeffisienten framleis vere tilnærma lik. Dette er gode nyheiter. Sidan vi ikkje har tal på kva volumraten ved utlaupet faktisk kan vere, blir det beste vi kan gjere derfor å justere volumraten slik at startradius blir av ønskja storleik, sidan dette derimot er ein verdi vi har gode målingar på. Som ein skjønar ut frå denne analysen vil det derfor ikkje spele noko særskild rolle for berekningane av porøsitetskoeffisienten, kva vi faktisk set sjølve friksjonskoeffisienten til, sidan vi uansett blir nøydte til å justere volumraten deretter. Vi har derfor valt å fortsetje med verdien  $C_D = 1.5 \cdot 10^{-5}$ , sidan dette gjev oss ei mykje lågare berekningstid enn for friksjonskoeffisientar i den øvre delen av det uttesta intervallet.

### 5.2.5 Granulatdiameter, $D$ , og dynamisk viskositet, $\mu$

Ut frå resultatane i førre delkapittel, kan ein no argumentere for at porøsitetskoeffisienten heller ikkje vil vere særleg sensitiv for granulatløysingane,  $D$ , og den dynamiske viskositeten,  $\mu$ . Årsaka til dette er at desse parametrane kjem inn i same ledd som friksjonskoeffisienten i modelllikningane, som forholdet  $\frac{C_D \mu}{D^2}$ . Sidan vi allereie har vist at porøsitetskoeffisienten er så og seie heilt uavhengig av friksjonskoeffisienten, kan vi derfor konkludere med at porøsitetskoeffisienten heller ikkje vil vere sensitiv for desse parametrane, dersom vi også her kompenserer med ei korresponderande endring for volumraten. Så lenge kombinasjonen  $(c, D, \mu)$  gjev ønskja startradius,  $b_s$ , har det lite å seie for verdien av porøsitetskoeffisienten kva desse tre er kvar for seg. Det må her presiserast at sjølv om viddeprofilen er lite sensitiv for endringar i desse tre parametrane dersom ein også justerer volumraten, vil derimot hastighetsprofilen og den berekna stigetida vere svært avhengige av desse, sidan dei i høg grad er styrt av volumraten. Vi vil likevel få dei eksakt same resultatane så lenge forholdet  $\frac{C_D \mu}{D^2}$  er det same. Dette kjem av formel 3.3 samt samanhengane i 2.21 og 3.2.

### 5.2.6 Gasskonstant, $n$

Som presisert under modellutleiinga vil gasskonstanten,  $n$ , liggje ein stad mellom isotherm og adiabatisk ekspansjon,  $1 \leq n \leq \frac{c_p}{c_v}$ , noko som for vårt tilfelle blei estimert til intervallet  $[1, 1.8]$ . Sidan vi derimot veit lite om kor gasskonstanten vil vere plassert i dette intervallet, bør det derfor sjekkast om porøsitetskoeffisienten,  $a$ , endrar seg signifikant når vi varierer  $n$  innanfor desse rammene. Det er derfor blitt utført 100 simuleringar for gasskonstantar i det gjeldande intervallet med steg på 0.05 og dei andre parametrane haldne konstant. Fitnesskravet er i desse simuleringane sett til 0.075. Resultatane frå denne analysen kan sjåast i Figur 5.12.



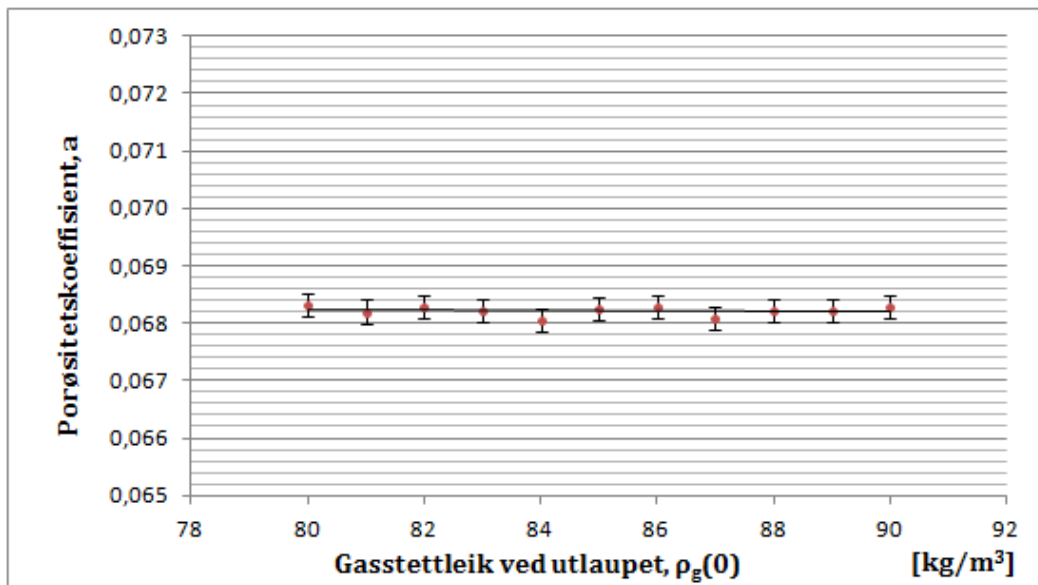
Figur 5.12: Gasskonstant plotta mot porøsitetskoeffisient, for  $\phi_0 = 0.35$  og  $\alpha = 0.015$ . Ein ser at ei tilnærma eksponentiell avtaking er antyda av målingane.

Av figuren ser vi at verdien av porøsitetskoeffisienten endrar seg frå omtrent 0.74 til 0.67 når  $n$  går gjennom det aktuelle intervallet, som er omtrent same variasjonsspenn som for analysen av startporøsiteten. Ein observerer dessutan at sensitiviteten er størst i den nedre delen av intervallet, og målingane antyder ei tilnærma eksponentiell avtaking innanfor den snevre definisjonsmengda. Gasskonstanten,  $n$ , er som ein skjønar ikkje av dei mest sensitive parametrane i modellen, men det er uansett ein sterk nok relasjon til at vi ikkje kan sjå heilt vekk frå denne uvissa heller.

### 5.2.7 Gasstettleik ved utlaupet, $\rho_g(0)$

Gasstettleiken ved utlaupet,  $\xi = 0$ , har hittil vore estimert til verdien  $85 \text{ kg/m}^3$ . Dette er truleg ein god approksimasjon, sidan metantettleiken på same djupn er berekna til  $81 \text{ kg/m}^3$ , og naturgassblandinga vil ha ein noko større tettleik. At den verkelege tettleiken ligg ein stad mellom  $80 \text{ kg/m}^3$  og  $90 \text{ kg/m}^3$  er derfor sannsynleg. Ei sensitivitetsanalyse for endringar av den initielle gasstettleiken innanfor dette intervallet bør derfor gjerast. Det er av den grunn utført 100 simuleringar for tettleikar i dette aktuelle intervallet med steg på  $1 \text{ kg/m}^3$  (med fitnesskrav 0.05), og med dei resterande parametrane haldne konstante. Volumraten som gav ønska startradius, vart for kvart steg tilpassa etter formel 3.3. Resultata frå denne analysen kan sjåast i Figur 5.13.

Som ein ser av desse målingane er porøsitetskoeffisienten så og seie heilt uavhengig av endringar innanfor det aktuelle intervallet. Dette tyder på at vi kan sjå vekk frå uvissa i akkurat denne parameteren i dei endelege Monte Carlo-simuleringane, utan å gjere store feil.

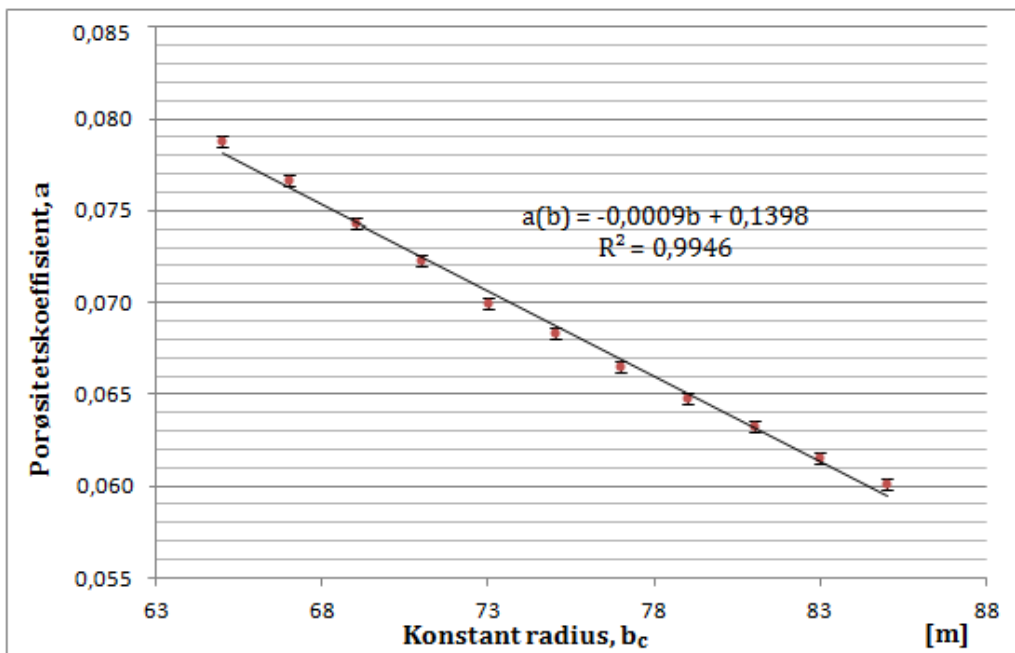


Figur 5.13: Gasstettleik plotta mot porositetskoeffisient, for  $\phi_0 = 0.35$  og  $\alpha = 0.015$ .

### 5.2.8 Konstant radius, $b_c$

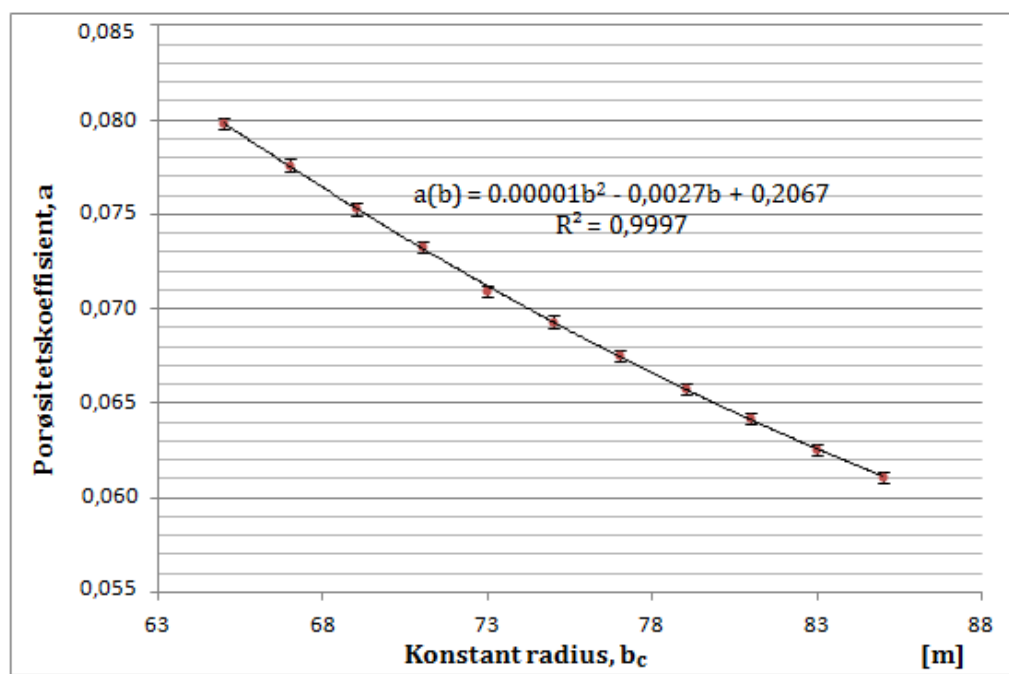
Hittil i denne oppgåva har vi antoke at den ideelle plumeradiusen skal vere eksakt 75 meter, men som ein ser av seismikkmålingane presentert i førre kapittel, er dette også ein verdi som vil vere vanskeleg å talafeste presist. Ein sensitivitetsanalyse for denne parameteren bør derfor også gjennomførast.

Ved å køyre 100 simuleringar for kvar radiusverdiar mellom 65 m og 85 m, med steg på 2 m, dei andre parametrane haldne konstante, samt eit fitnesskrav på 0.05, kan ein kome fram til resultatata skissert i Figur 5.14.



Figur 5.14: Konstant radius plotta mot porositetskoeffisient, for  $\phi_0 = 0.35$  og  $\alpha = 0.015$ . Ein tilnærma lineær samanheng blir observert.

Ein ser at også her kan ein lineær relasjon beskrive samanhengen til ei viss grad, sjølv om linja trekt ved hjelp av Minste kvadraters metode går litt utanfor nokre av uvissene estimert av standardavvika til målingane. Figur 5.15 viser ein føreslått andregradssamanheng, som estimerer punkta betre. I begge høver observerer ein uansett at porøsitetskoeffisienten varierer signifikant innanfor det aktuelle intervallet, så konklusjonen blir, også her, at uvissa i denne parameteren må takast omsyn til når vi no skal ta fatt på Monte Carlo-simuleringane.



Figur 5.15: *Konstant radius plotta mot porøsitetskoeffisient, for  $\phi_0 = 0.35$  og  $\alpha = 0.015$ . Eit polynom av andregrad beskriv samanhengen på ein tilfredstillande måte.*

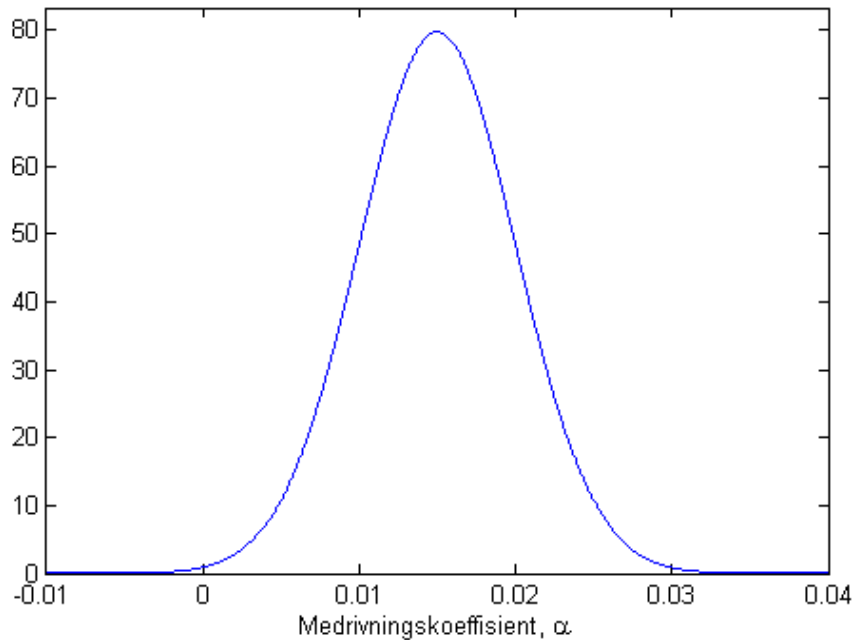
### 5.3 Resultat frå Monte Carlo-simuleringar

Ved hjelp av den føregåande sensitivitetsanalysen er det klart at ein er nøydt til å ta spesielt omsyn til uvissa i medrivningskoeffisienten og den konstante radiusen vi krev i modellen. Det kom også fram at uvissa i startporøsitet og i gasskonstanten kan føre til små utslag i den berekna porøsitetskoeffisienten, så å ta omsyn til også desse i dei følgjande simuleringane er truleg smart.

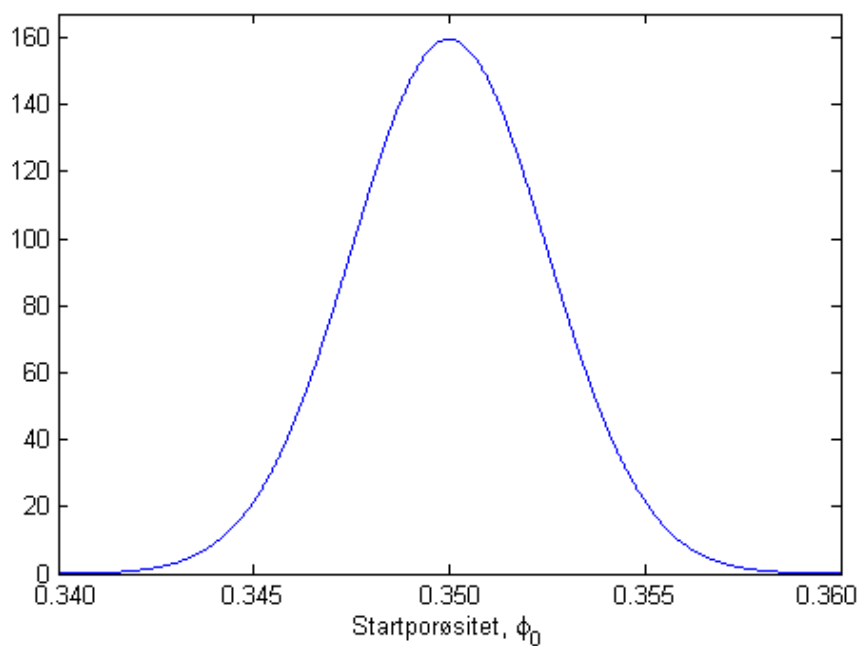
Ut frå dei tidlegare diskusjonane om aktuelle intervall dei sensitive parametrane truleg ligg i, kan ein no angje passende sannsynsfordelingar som desse parametrane skal trekkast frå i Monte Carlo-simuleringane. Medrivningskoeffisienten er som nemnt estimert til å liggje ein stad mellom 0.001 og 0.03, og har derfor fått tildelt ei normalfordeling med forventningsverdi 0.015 og standardavvik 0.005. På denne måten er det svært liten sjanse for at simuleringane trekker verdiar utanfor dette intervallet, og metoden er dessutan programmert til å forkaste negative verdiar, sidan dette kan gje problem med imaginære tal under berekningane. Tilsvarende er det valt gaussiske fordelingar av startporøsitet og konstant radius, sidan vi i begge desse tilfella har verdiar i midten av intervalla som vi meiner er meir sannsynlege enn utkantsverdiane. Til slutt har vi



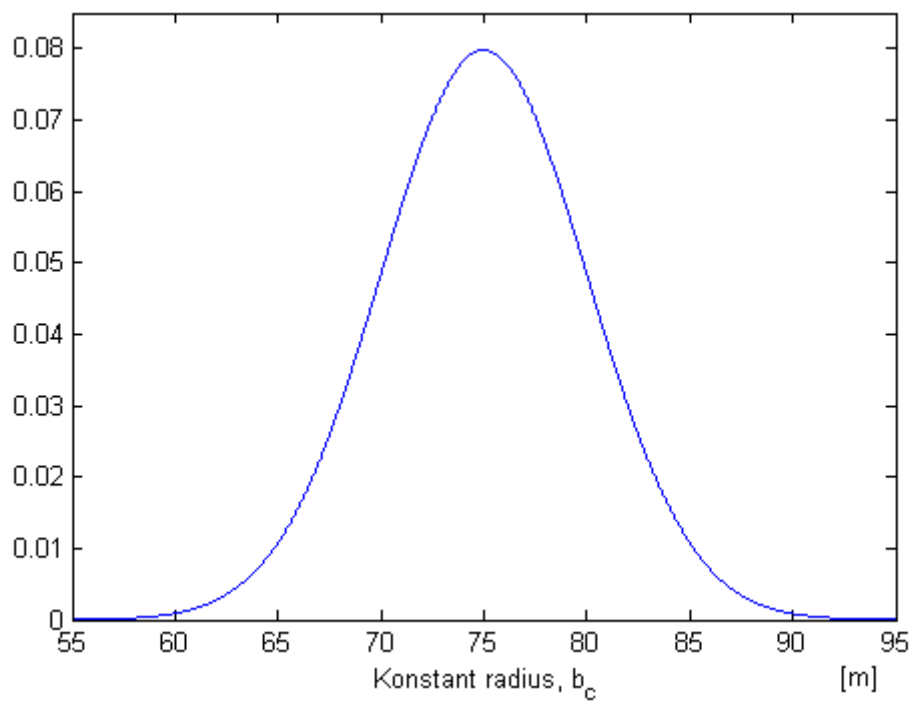
valt å trekke gasskonstanten frå ei uniform fordeling mellom 1 og 1.8, sidan vi ikkje veit noko særleg om kvar det er mest sannsynleg at denne konstanten ligg i intervallet. Dei føreslåtte sannsynstettleikane til dei tre normalfordelte parametranne, med tettleiksfunksjon  $f(x|\mu_i, \sigma_i)$ , gjeve etter  $f(x|\mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$ , kan sjåast i Figur 5.16 til Figur 5.18, og er beskrive i detalj i figurtekstane. Den uniforme tettleiksfunksjonen til gasskonstanten,  $u(x)$ , gjeve som  $u(x) = \frac{1}{b-a}$ , der  $a = 1$  og  $b = 1.8$  er intervallgrensene, kan sjåast i Figur 5.19.



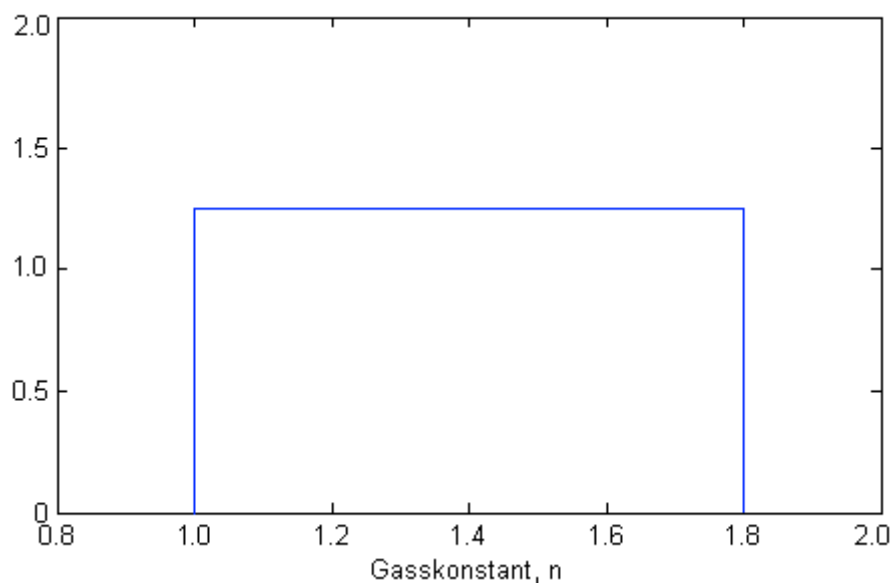
Figur 5.16: Valt Gaussisk sannsynstettleik for medrivningskoeffisienten,  $\alpha$ . Forventningsverdi 0.015. Standardavvik 0.005.



Figur 5.17: Valt Gaussisk sannsynstettleik for startporøsiteten,  $\phi_0$ . Forventningsverdi 0.35. Standardavvik 0.0025.

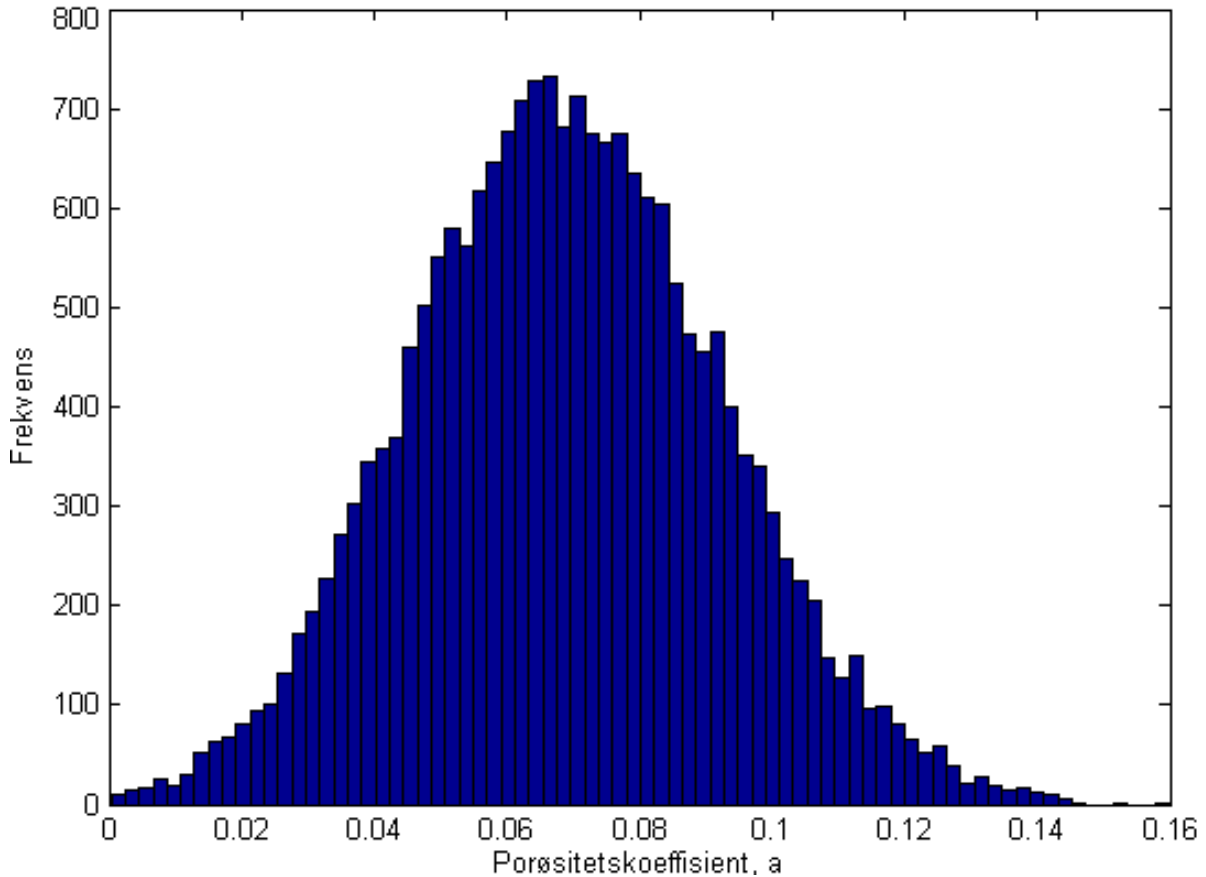


Figur 5.18: Valt Gaussisk sannsynstettleik for den konstante radiusen,  $b_c$ . Forventningsverdi 75 m. Standardavvik 5 m.



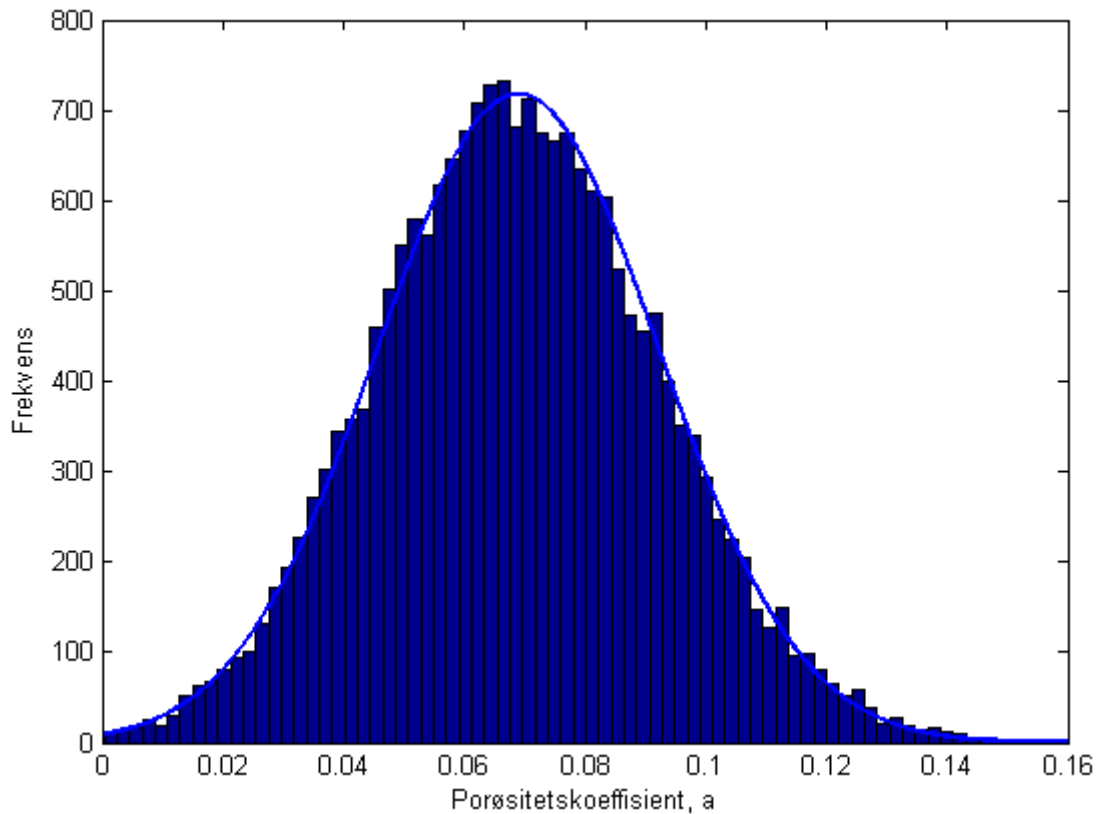
Figur 5.19: Valt uniform sannsynstettleik for gasskonstanten,  $n$ , i intervallet  $[1, 1.8]$ .

Ved å køyre svært mange Monte Carlo-simuleringar, der dei sensitive parametrane blir trekt frå dei føregåande sannsynsfordelingane, kan ein få inntrykk av kva som er den mest trulege porøsitetsverdien, og kanskje viktigare, få eit godt mål på uvissa av denne verdien. Resultatet av 20 000 slike køyrde simuleringar, med ei total køyretid på omtrent 2 månadar, er demonstrert i eit histogram vist i Figur 5.20.



Figur 5.20: Histogram over hyppighet til porøsitetskoeffisienten,  $a$ , for 20 000 køyrde Monte Carlo-simuleringar.

Ein ser at ved antakingar om gaussiske fordelingar for medrivning, startporøsit og konstant radius, får vi etter dei køyrde Monte Carlo-simuleringane også ei tilnærma gaussisk fordeling på den berekna porøsitetskoeffisienten. Gjennomsnittet for alle desse 20 000 målingane er  $\mu_a = 0.0689$ , mens det empiriske standardavviket er berekna til  $\sigma_a = 0.0234$ . Figur 5.21 syner det same histogrammet saman med den korresponderande normalfordelte tettleiksfunksjonen spesifisert av gjennomsnittet og standardavviket frå målingane, skalert opp med faktoren  $C = \sqrt{2\pi}\sigma_a \cdot \bar{\mu}$ , der  $\bar{\mu}$  er lik gjennomsnittet av frekvensen til dei 5 midtarste søylene. Ein observerer eit godt samsvar.



Figur 5.21: *Antyda normalfordelingskurve berekna ut frå gjennomsnittet og standardavviket til Monte Carlo-simuleringane.*

At gjennomsnittet frå simuleringane er noko høgre enn porøsitetsverdien berekna i delkapittel 5.1 ( $a = 0.0682$ ), der vi kun nytta forventningsverdiane til parametranne,  $\alpha = 0.015$ ,  $\phi_0 = 0.35$ ,  $n = 1.4$  og  $b = 75$  m, kan forklarast med utgangspunkt i resultatane frå sensitivitetsanalysen. Både medrivningskoeffisienten og startporøsiteten varierer som nemnt tilnærma lineært med porøsitetskoeffisienten i det aktuelle intervallet, så desse vil ikkje forskyve gjennomsnittet særleg når vi har så mange simuleringar. Porøsitetskoeffisienten minkar derimot tilnærma eksponentielt med aukande gasskonstant, og tilnærma som ein andregradsfunksjon med aukande konstant radiusen. Sidan begge desse relasjonane har negative andrederiverte, og det vil bli trekt omtrent like mange verdiar på kvar side av midtpunkta av intervalla, er det logisk at desse samanhengane vil føre til at gjennomsnittet blir forskyvd noko til høgre på tallinja. At vi forkastar dei få negative verdiar vi får av medrivningskoeffisienten, men beheld dei som er over 0.03, gjer også at gjennomsnittet blir skyvd litt i same retning.

Ved å nytte middelveidien frå desse målingane som det beste estimatet for porøsitetskoeffisienten, og det tilhøyrande empiriske standardavviket som eit mål på uvissa i koeffisienten, finn ein dermed at ut frå modellen kan porøsitetskoeffisienten approksimerast med  $a = 0.0689 \pm 0.0234$ . Dette estimatet vil bli drøfta opp mot målingar frå kjerneprøvar ved den norske kontinentalsokkel i neste kapittel. Først vil det derimot bli utleia eit analytisk uttrykk for den vertikale hastigheita for situasjonen vi betraktar, som vil vere til god hjelp i dei komande hastigheitssimuleringane.

## 5.4 Analytisk uttrykk for den vertikale hastigheita ved konstant plumeradius

Når ein gjer antakinga om ein konstant plumeradius, opnar det samtidig opp for moglegheita til å finne eit analytisk uttrykk for den vertikale hastigheita. Sidan eit slikt uttrykk vil kunne redusere køyretida drastisk for visse berekningar, er det derfor funne plass og tid til også dette resultatet, som vil bli presentert i dette delkapittelet. Utleiinga er skriven med utgangspunkt i eigne berekningar.

Ved å nytte dei allereie etablerte likningane

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}b^2) = 2\alpha\rho_0b\bar{w} \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}^2b^2) = \Delta\rho g\phi b^2 - C_D\frac{\mu}{k}\phi b^2\bar{w} + 2\rho_0\alpha b\bar{w}^2 \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dz}(\bar{w}b^2) = 2\alpha b\bar{w} + \Gamma \quad (2.17)$$

er det mogleg å finne eit analytisk uttrykk for den vertikale “top hat”-hastigheita,  $\bar{w}$ , dersom ein forutset at  $\frac{db}{dz} = 0$ .

Ved konstant radiusverdi,  $b_c$ , kan denne parameteren nemleg trekkast ut av derivasjonen, og likning 2.15 blir då omforma til

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}) = \frac{2\alpha\rho_0\bar{w}}{b_c}. \quad (5.1)$$

Tilsvarende blir likning 2.16 endra til

$$\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}^2) = \Delta\rho g\phi - C_D\frac{\mu}{k}\phi\bar{w} + \frac{2\rho_0\alpha\bar{w}^2}{b_c}.$$

Ved å bruke produktregelen på leddet  $\bar{\rho}\bar{w}^2$  i førre likning, oppnår vi

$$\bar{w}\frac{d}{dz}(\bar{\rho}\bar{w}) + \bar{\rho}\bar{w}\frac{d\bar{w}}{dz} = \Delta\rho g\phi - C_D\frac{\mu}{k}\phi\bar{w} + \frac{2\rho_0\alpha\bar{w}^2}{b_c}.$$

Dersom ein no nyttar likning 5.1, og kortar, står vi igjen med likninga

$$\bar{\rho}\bar{w}\frac{d\bar{w}}{dz} = \Delta\rho g\phi - C_D\frac{\mu}{k}\phi\bar{w},$$

eller

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{\Delta\rho g\phi}{\bar{\rho}\bar{w}} - \frac{C_D\mu\phi}{k\bar{\rho}}. \quad (5.2)$$

Ved å nytte ein konstant verdi for radius,  $b_c$ , kan ein også finne eit uttrykk for  $\frac{d\bar{w}}{dz}$  frå likning 2.17:

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \frac{2\alpha\bar{w}}{b_c} + \frac{\Gamma}{b_c^2}. \quad (5.3)$$

Dersom ein no set høgresidene i likning 5.2 og 5.3 lik kvarandre, oppnår vi til slutt

$$\frac{\Delta\varrho g\phi}{\bar{\varrho}\bar{w}} - \frac{C_D\mu\phi}{k\bar{\varrho}} = \frac{2\alpha\bar{w}}{b_c} + \frac{\Gamma}{b_c^2}.$$

Ved å multiplisere med  $\bar{w}$  på begge sider, og ordne ledda, får vi til slutt andregradslikninga

$$\frac{2\alpha}{b_c}\bar{w}^2 + \left(\frac{\Gamma}{b_c^2} + \frac{C_D\mu\phi}{k\bar{\varrho}}\right)\bar{w} - \frac{\Delta\varrho g\phi}{\bar{\varrho}} = 0,$$

som har einaste positive løysing

$$\bar{w} = \frac{-\frac{\Gamma}{b_c^2} - \frac{C_D\mu\phi}{k\bar{\varrho}} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{b_c^2} + \frac{C_D\mu\phi}{k\bar{\varrho}}\right)^2 + \frac{8\alpha\Delta\varrho g\phi}{b_c\bar{\varrho}}}}{\frac{4\alpha}{b_c}}. \quad (5.4)$$

Denne likninga må stemme for alle høgder, og  $\bar{w}$ ,  $\Gamma$ ,  $\phi$ ,  $k$ ,  $\bar{\varrho}$  og  $\Delta\varrho$  kan alle uttrykkast som ein funksjon av den same dimensjonslause høgdeparameteren  $\xi = \frac{z}{H}$ .

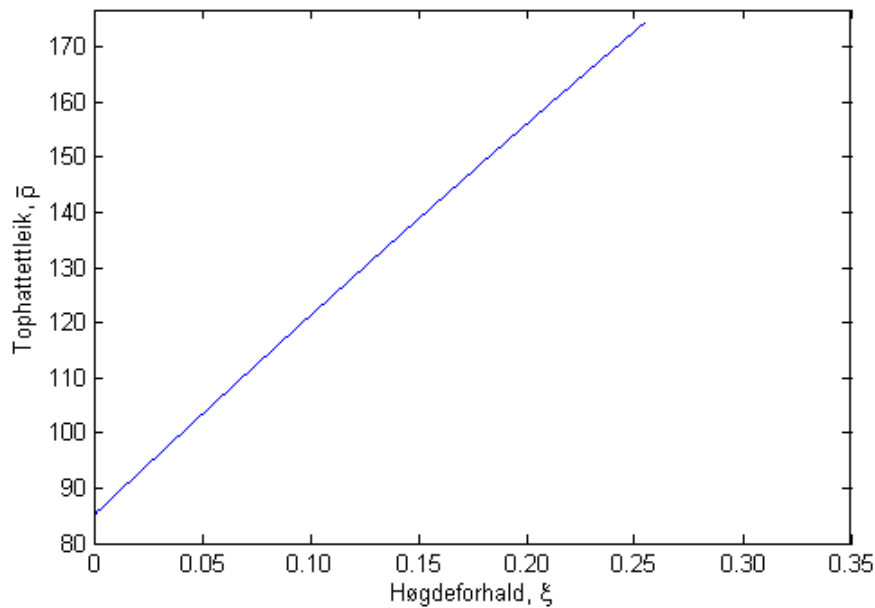
Vi har til dømes likningane:

$$\phi(\xi) = a\xi + \phi_0 \quad (5.5)$$

$$k(\xi) = 5.55 \cdot 10^{-3} \frac{\phi(\xi)^3 D^2}{(1 - \phi(\xi))^2} \quad (5.6)$$

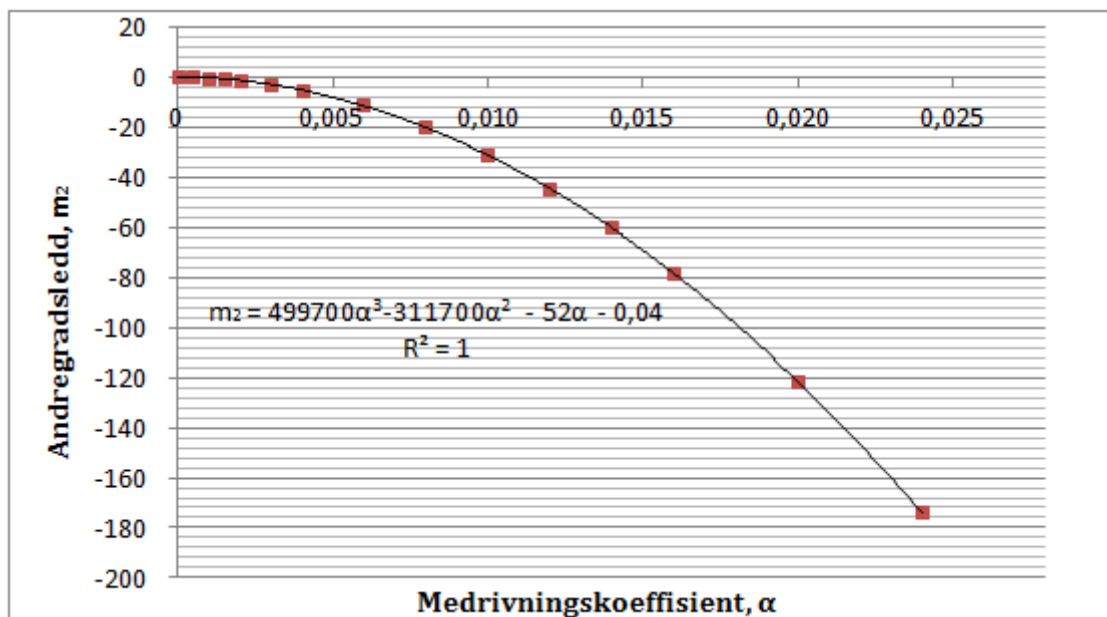
$$\Gamma(\xi) = \frac{g\dot{m}_g\varrho_0}{n\pi\varrho_g(0)p(0)\left[\frac{(p_{atm} + \varrho_g(0)gH(1-\xi))}{p(0)}\right]^{\frac{n+1}{n}}} \quad (5.7)$$

Ved hjelp av funksjonsplot mellom  $\xi$  og  $\bar{\varrho}$  og Minste kvadraters metode kan ein dessutan finne at “top hat”-tettleiken,  $\bar{\varrho}$ , ved medrivning sett til  $\alpha = 0.015$ , med svært stor nøyaktigheit kan beskrivast som  $\bar{\varrho}(\xi) = -68.9\xi^2 + 368.2\xi + 85$ , i det aktuelle området. Denne (tilnærma lineære) andregradsfunksjonen er demonstrert i Figur 5.22. Koeffisientane i denne relasjonen er funne til å vere lite sensitiv for endringar i dei viktige parametrane  $\phi_0$ ,  $D$ ,  $\mu$  og  $C_D$ , og likning 5.4 er dessutan svært lite sensitiv for små endringar i  $\bar{\varrho}$ . Å nytte eit estimat for  $\bar{\varrho}$  i denne likninga kan derfor i høg grad forsvarast, og vil ikkje ha signifikante konsekvensar for dei vidare berekningane.

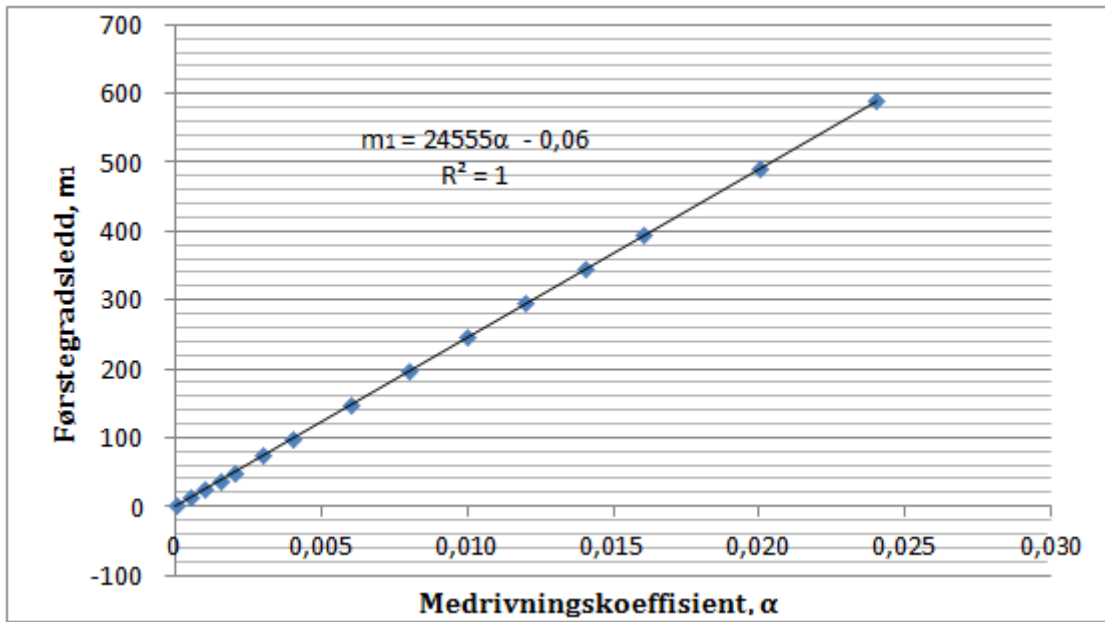


Figur 5.22: Annangradsrelasjon mellom høgdeforhold og “top hat”-tettleik, med  $\alpha = 0.015$ .

Den estimerte tettleiksformelen er derimot sterkt avhengig av medrivning, noko som må takast omsyn til. Høg medrivningskoeffisient fører til mykje vatn inn i plumen, som sjølvsagt aukar tettleiken. Korleis koeffisientane,  $m_2$  og  $m_1$ , i formelen  $\bar{\rho}(\xi) = m_2\xi^2 + m_1\xi + 85$ , varierer med medrivning kan derimot også lett estimerast. Ved å endre medrivningskoeffisienten systematisk, og føre opp verdiane på koeffisientane  $m_2$  og  $m_1$ , kan ein ved å nytte Minste kvadraters metode finne at samanhengane  $m_2 = 499700\alpha^3 - 311700\alpha^2 - 52\alpha - 0.04$  og  $m_1 = 24555\alpha - 0.06$  beskriv denne relasjonen på ein svært tilfredstillande måte. Resultata kan sjåast i Figur 5.23 og 5.24. For kvar av desse målingane vart sjølvsagt  $\dot{V}_0$  og  $a$  tilpassa slik at plumen hadde konstant radius, sidan dette var sjølve føresetnaden vi måtte gjere for utleiinga av fartsformelen.



Figur 5.23: Relasjon mellom andregradskoeffisient og medrivning.

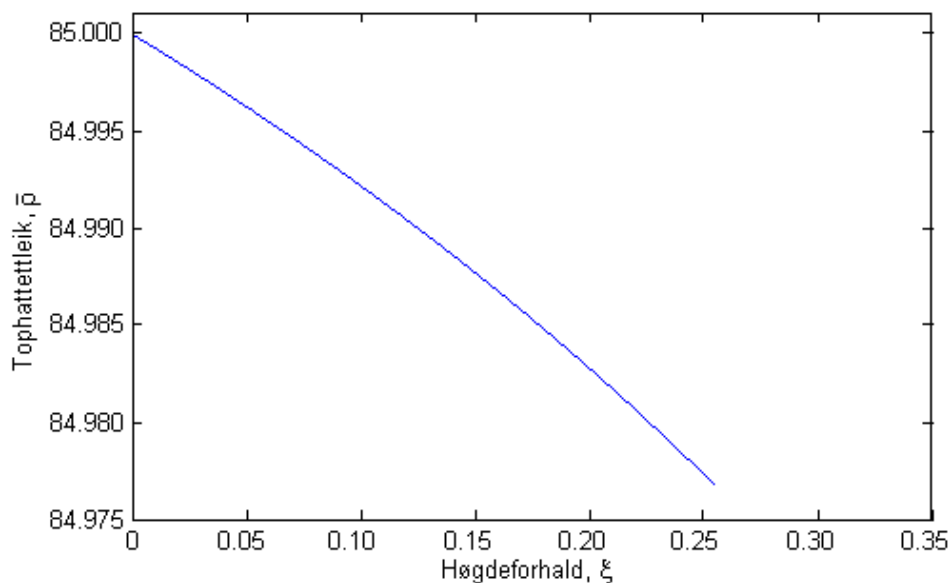


Figur 5.24: Relasjon mellom førstegradsledd og medrivning.

Ved å kombinere dei føregåande likningane kan vi no estimere “top hat”-tettleiken ved

$$\bar{\rho}(\xi) = (499700\alpha^3 - 311700\alpha^2 - 52\alpha - 0.04)\xi^2 + (24555\alpha - 0.06)\xi + 85. \quad (5.8)$$

Ein ser at dette stemmer godt overens med andre- og førstegradsledda berekna for  $\alpha = 0.015$ . Det er også verdt å legge merke til at ved fråvær av medrivning, altså  $\alpha = 0$ , vil tettleiken faktisk synke med stigande høgde, ut frå formelen. Dette er logisk, sidan gassen vil utvide seg når det hydrostatiske trykket blir redusert, og dersom vi samtidig ikkje får eksternt vatn inn i plumen, vil tettleiken derfor gå ned. Eit plot av den numerisk berekna “top hat”-tettleiken med fråvær av medrivning, ut frå formel 2.22, kan sjåast i Figur 5.25, og styrker denne mistanken.



Figur 5.25: “Top hat”-tettleik plotta mot normalisert høgde, utan medrivning



Ved å nytte relasjonane 5.5 – 5.8 i likning 5.4, og sjekke 50 tilfeldig trekte kombinasjonar av  $C_D$ ,  $D$ ,  $\phi_0$  og  $\alpha$ , var det største maksimale prosentvise avviket mellom samsvarande komponentar i fartsvektorane (med omtrent 1 million indeksar) berekna høvesvis frå likning 5.4 og 2.22, kun 0.47%. Det gjennomsnittlege avviket mellom komponentane var på si side så lågt som 0.03%. Dette må seiast å vere eit svært godt samsvar. Igjen vart volumrate og porøsitetskoeffisient konsekvent justert slik at plumen hadde konstant radius for alle målingar. Dei berekna verdiane kan sjåast i Appendiks F.

Ved å anta ein gaussisk hastigheitsfordeling og nytte formel 2.26 finn vi til slutt ei likning for sjølve hastigheita,  $w$ :

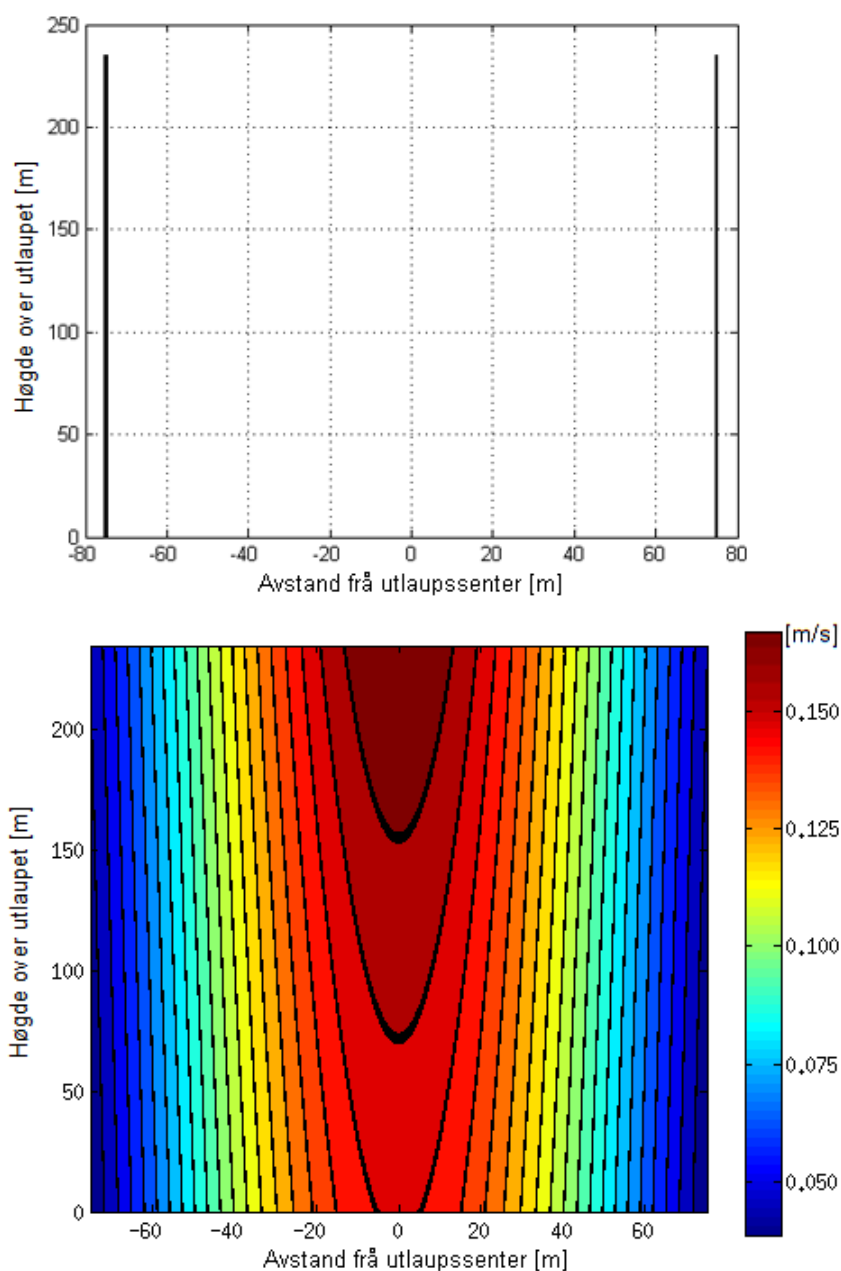
$$w(\xi, r) = \frac{b_c}{2\alpha} \left( -\frac{\Gamma(\xi)}{b_c^2} - \frac{C_D \mu \phi(\xi)}{k(\xi) \bar{\rho}(\xi)} + \sqrt{\left( \frac{\Gamma(\xi)}{b_c^2} + \frac{C_D \mu \phi(\xi)}{k(\xi) \bar{\rho}(\xi)} \right)^2 + \frac{8\alpha \Delta \rho(\xi) g \phi(\xi)}{b_c \bar{\rho}(\xi)}} \right) e^{-\frac{r^2}{b^2}} \quad (5.9)$$

Den store fordelten med denne formelen, samanlikna med dei numeriske berekningane i modellen med utgangspunkt i likning 2.22, er heilt og haldent køyretida. Ved å nytte modellen for å løyse for fartsvektoren med dei føreskrivne parametrane er køyretida omtrent 3 minutt (med Acer Aspire 5750G), mens det analytiske uttrykket kun tek  $9 \cdot 10^{-6}$  sekund å berekne, noko som er ein reduksjon med ein faktor på heile  $2 \cdot 10^7$ . Ei køyretid på 3 minutt er likevel relativt lite, men dersom ein skal berekne fartskomponenten fleire gangar med små endringar i parametrane, kan det fort bli svært mykje tid å spare på å nytte det analytiske uttrykket i staden. Dessutan er køyretida også svært sensitiv for nokre av parametrane i modellen. Verdien køyretida synest å vere mest sensitiv for er kornstorleiken,  $D$ , sidan liten korndiameter gjev eit stort andreledd (i absoluttverdi) i likning 2.21, som gjer at denne differensiallikninga kan bli svært så tidkrevjande å løyse. Dette kjem av at når andreleddet blir stort, blir Runge-Kutta-metoden tvinga til nytte ein svært liten stegstorleik for å få tilnæringsfeilen ned på eit akseptabelt nivå, som resulterer i at det trengs mange fleire operasjonar for å løyse differensiallikninga. Ved å halvere kornstorleiken frå  $2 \mu\text{m}$  til  $1 \mu\text{m}$ , vil til dømes køyretida ved å nytte numeriske berekningar auke til heile 4 timar, mens det analytiske uttrykket ikkje endrar køyretid. Som ein skjønar kan derfor dette uttrykket vere eit svært godt hjelpemiddel i starten når ein skal prøve ut og kalibrere modellen, eller dersom ein skal berekne hastigheitsprofilar for sediment med låge kornstorleikar. Det må derimot igjen presiserast at det analytiske uttrykket kun gjeld for plumar med konstant radius, sidan dette var ein sentral føresetnad for utleiinga av formelen.

## 5.5 Volumrate, hastigheitsprofil og stigetid

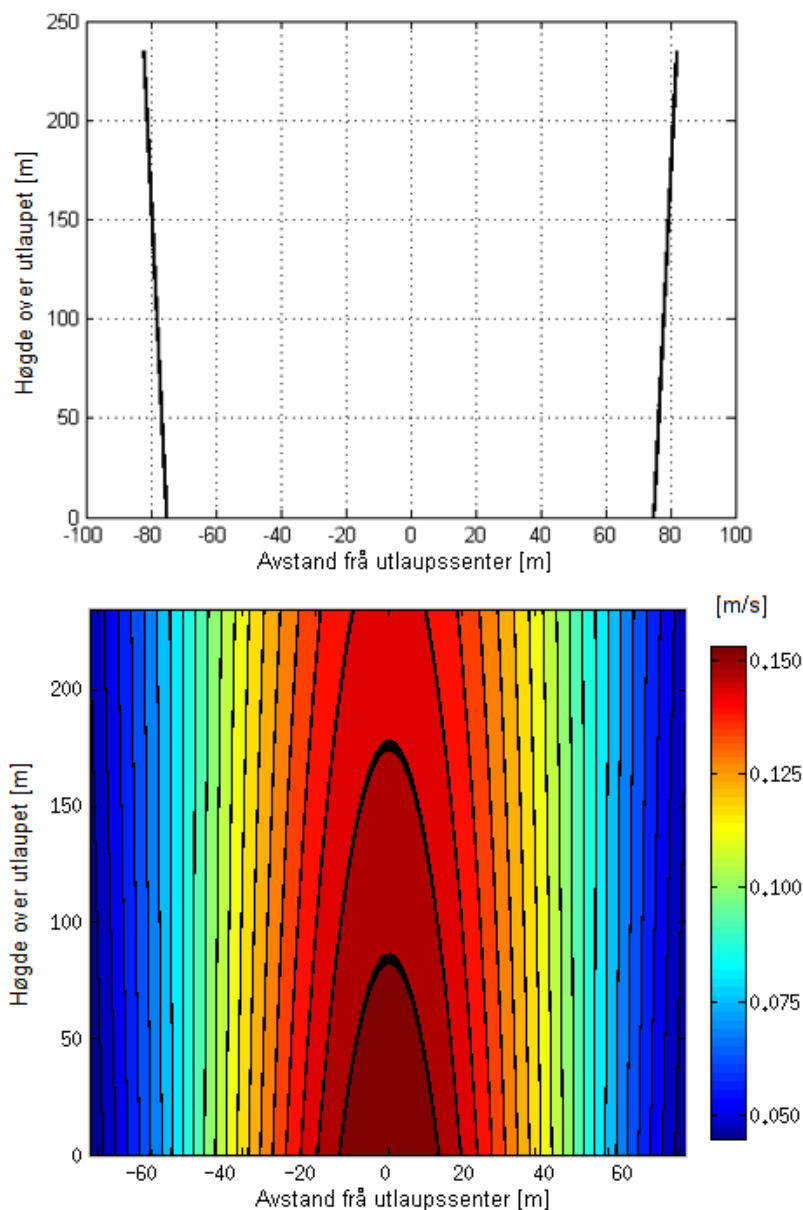
Vi har som nemnt få tal og indikasjonar på kva volumraten,  $\dot{V}_0$ , ved utlauget faktisk vil vere, noko som gjer det vanskeleg å vurdere kva som er realistiske verdier for denne parameteren. Heldigvis hadde ikkje denne uvissa noko å seie for berekninga av porøsitetskoeffisienten, sidan vi uansett måtte tilpasse volumraten for å få ønskja startradius på plumen, men dersom vi derimot skal snakke om stigetid og hastigheitsprofilar er det heilt naudsynt med ein realistisk verdi på denne raten. Dersom vi nyttar dei tidlegare føreslåtte verdiane for startporøsitet, friksjonskoeffisient og kornstorleik,

$\phi_0 = 0.35$ ,  $C_D = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $D = 2\mu\text{m}$ , finn ein frå formel 3.3 at den korresponderande volumraten er  $1360\text{m}^3/\text{s}$ . Dette kan ved første augekast synast å vere eit veldig stort tal, men dersom vi betraktar området over ein eventuell jetstråle, vil dette tilsvare ein “top hat”-starthastigheit på omtrent  $\bar{w}_s = \frac{\dot{V}_0}{\pi b_s^2} = 0.077\text{m/s}$ , for  $b_s = 75\text{m}$ . Ved å ta utgangspunkt i den gaussiske hastigheitsfordelinga føreslått i formel 2.26 tilsvrarar dette ein hastigheit på  $15.4\text{ cm/s}$  ved senteret av plumen. Denne stigehastigheita verkar ikkje å vere heilt urealistisk, sjølv om den truleg er vel høg. Ved å nytte den berekna porøsitetskoeffisienten,  $a = 0.0689$ , saman med den nemnte antakinga om at hastigheitsfordelinga er gaussisk med omsyn på avstand frå senteret av utlaupet, kan ein berekne ein hastigheitsprofil for plumen. Det er her valt å fokusere på området over ein eventuell jetstråle, så utlaupsradius er derfor sett til 75 meter. Den berekna hastigheitsprofilen er demonstrert i Figur 5.26, vist under.



Figur 5.26: Vidde- og hastigheitsprofil for plumen med inhomogen porøsitet, frå området etter jetstrålen har stabilisert seg, opp mot botnen av krateret.

Ein ser at hastigheita er større til lenger ein kjem inn mot senteret av plumen, som er ei følgje av antakinga om ein gaussisk hastigheitsprofil. Ein observerer dessutan at hastigheita faktisk også aukar etter kvart som vi flyttar oss i høgderetninga, og det er dette som verkeleg er den interessante biten. Denne hastigheitsauken er nemleg ein direkte konsekvens av den innlagde porøsitetendringa i sedimenta, styrd av den berekna porøsitetskoeffisienten,  $a$ . Sidan porøsiteten aukar når vi flyttar oss frå utlaupet opp mot havbotnen, vil dette samtidig føre til at gassen kan flytte seg raskare, grunna dei ekstra holromma, til lenger opp vi kjem i sedimenta. Det er nettopp denne hastigheitsauken som gjer ein loddrett viddeprofil av plumen mogeleg. Til tross for at medrivninga av eksternt vatn aukar med hastigheita og gassen utvidar seg med reduksjon i det hydrostatiske trykket, er denne hastigheitsauken likevel akkurat tilstrekkeleg for at plumen ikkje ekspanderer på vegen oppover. Ein hastigheitsprofil for tilfellet med ein homogen porøsitet er demonstrert i Figur 5.27, til samanlikning.



Figur 5.27: Vidde- og hastigheitsprofil for plumen med homogen porøsitet, frå området etter jetstrålen har stabilisert seg, opp mot botnen av krateret.

Ein ser at i motsetning til førre hastigheitsprofil, vil farten ved homogen porøsitet, faktisk *reduserast* til høgre opp i sedimenta vi kjem, noko som resulterer i at plumevidda ekspanderer med høgda. Denne hastigheitsreduksjonen kjem blant anna av at friksjonen bremsar gasspartiklane, men også av at det kjem eksternt vatn inn i plumen grunna medrivning.

Med utgangspunkt i den berekna “top hat”-hastigheitsvektoren, kan ein dessutan lett også estimere stigetida for gassen frå utlaupet opp til botnen av krateret, ved hjelp av formel 2.23. Ved å nytte trapesmetoden med utgangspunkt i “top hat”-hastigheitsvektoren (med ca 1 million indeksar), får vi ei god tilnærming for det verkelege integralet over  $\bar{w}$ . Med dei føreslåtte parametrane, og med aukande porøsitetsprofil, gjev dette oss til slutt ei stigetid på 2914 s, altså litt i underkant av 50 minutt. Kor realistisk dei ulike verdiane som er funne i denne resultatseksjonen er, vil bli kritisk vurdert og drøfta i komande kapittel.

# Kapittel 6

## Diskusjon av resultat

### 6.1 Stigetid og hastighetsprofil

Frå berekningane nemnt i førre kapittel vart det estimert ei stigetid på rundt 50 minutt for plumen. Sjølv om utgangspunktet for denne berekninga er ideelle forhold der gassen får bevege seg heilt utan hindringar eller ugjennomtrengelege lag på vegen, er dette truleg ei vel låg stigetid. I følgje berekningar gjort av Cathles et al. (2010) vil ei stigetid på nærmare 50 år vere å forvente for gassplumar i område med liknande fysiske eigenskapar som drøfta i denne masteroppgåva. Det må presiserast at dette er berekningar for då gassøyla stig frå reservoaret før sjølve pockmarkdanninga, og derfor før alle kanalane har blitt etablerte. Det er likevel ein stor skilnad mellom estimata, som tvingar oss til å kritisk vurdere føresetnadane som har blitt gjort og parametrane som har blitt nytta i modellen. Hovudgrunnen til at vi har ei lågare stigetid enn det som kan forventast å finne i røynda er nok at vi nyttar svært forenkla og idealiserte porøsitets- og permeabilitetsprofilar, som er homogene over det horisontale arealet definert av kvar  $\xi$ -verdi. I røynda vil det nemleg vere svært annleis, og fluida kan støyte på lag som er så og seie ugjennomtrengelege, og derfor bli lagra i gasslommer over lang tid, til trykket er stort nok til at dei omsider klarar å trenge gjennom. At vi ser på fasen etter at gassøyla har nådd havbotnen og kanalane allereie er etablerte, gjer at denne faktoren vil vere sterkt redusert, og dette kan også vere med på å forklare det store avviket frå stigetida berekna av Cathles et al. (2010).

Ved vurdering av sjølve parametrane som er nytta i modellen er det truleg friksjonskoeffisienten vi bør vere mest kritisk til, sidan denne er av dei mest usikre. Den låge stigetida kan derfor truleg tyde på at vi har valt ein for låg friksjonskoeffisient. Aukar vi denne med faktorar på 10, 25 og 50, endrar den korresponderande stigetida seg til høvesvis 8, 20 og 41 timar. Vi skjønner derfor at verdien vi vel for denne parameteren er vesentlig for stigetida, og vi observerer omtrent ein proporsjonalitet mellom friksjonskoeffisienten og stigetida. Heldigvis har vi allereie vist at verdien på denne friksjonskoeffisienten ikkje har innverknad på hovudresultatet vårt, som er porøsitetskoeffisienten. Hadde desse verdiane vore avhengige, hadde vi nok auka friksjonskoeffisienten noko før vi kørde dei endelege Monte Carlo-simuleringane. Grunnen til at dette derimot ikkje vart gjort er at det ville ført til ei mykje høgare køyretid, og når det ikkje ville ha noko å seie for verdiane av porøsitetskoeffisienten, vart dette ikkje vurdert som naudsynt. Då vart det vurdert som meir logisk å heller nytte den ekstra tida til å køyre fleire antal simuleringar.

Det må også nemnast at grunna formel 3.3 vil hastigheita til plumen vere omtrent omvendt proporsjonal med friksjonskoeffisienten. Dette gjer at dersom vi aukar friksjonskoeffisienten med ein bestemt faktor vil hastigheita bli redusert med omtrent den same. I tillegg er likning 2.26 nytta under berekninga av hastigheitsprofilen, som også er ei tilnærming, og i følgje diskusjonen under utleiinga av modellikningar er denne formelen skalert med ein noko for høg faktor. Sjølve forma på hastigheitsprofilen vil derimot ikkje endrast av desse grunnane, så diskusjonen rundt profilen i førre kapittel vil framleis gjelde, men kun med lågare, og kanskje meir trulege, hastigheitsverdiar.

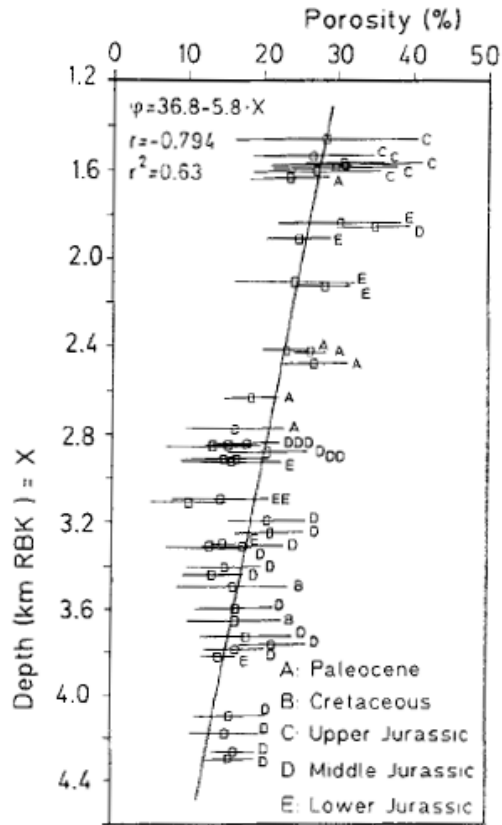
Ei anna forklaring til den låge stigetida er at vi har gjort ei forenkling ved å nytte den dynamiske viskositeten til rein metan i denne oppgåva. Dersom vi derimot hadde teke omsyn til at plumen også består av formasjonsvatn, samt at noko av gassen kan løyse seg i dette vatnet, ville vi også fått ei auka stigetid. Til samanlikning kan det nemnast at dersom vi hadde nytta den dynamiske viskositeten for vatn, i staden for metangass, hadde vi fått ei omtrent 100 gangar høgare stigetid, som igjen hadde vore ein verdi meir i retning estimatet av Cathles et al. (2010). I likskap med friksjonskoeffisienten og granulatdiameter, har denne parameteren som nemnt ikkje noko å seie for berekninga av hovudresultatet vårt, nemleg porøsitetskoeffisienten, dersom ein justerer volumraten.

Før vi forlèt diskusjonen om stigetida, må det presiserast at ingen faktisk veit sikkert kva stigetida vil vere for ein slik prosess, sidan denne aldri har blitt målt, i alle fall ikkje som vi kjenner til. Den nemnte stigetida berekna av Cathles et al. (2010) vil derfor, i likskap med våre resultat, sjølvsagt også kun vere ei kvalifisert gjetting.

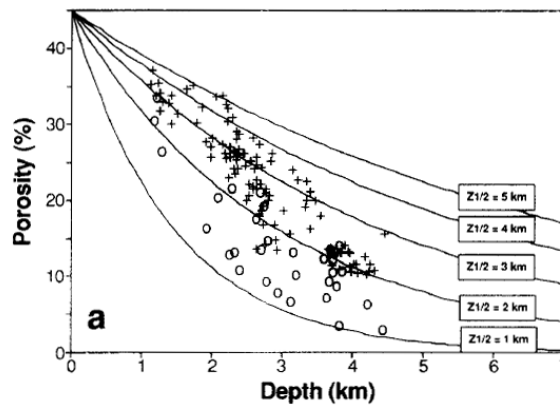
## 6.2 Lineær porøsitetsprofil

I førre kapittel vart det vist at ut frå modellen, kan vi oppnå ei konstant vidde på plumen ved å legge inn ein spesifikk lineær vekst i porøsitet med høgda i sedimenta. Dette resultatet samsvarar svært godt med faktiske målingar gjort ved den norske kontinentalsockel, som har blitt tilgjengelege for oss på slutten av dette masterarbeidet. Figur 6.1 og Figur 6.2 viser to porøsitetsprofilar (Bjørlykke et al., 1989; Ramm, 1992), basert på kjerneprøvar i sedimenta, og ein ser at ein lineær samanheng mellom porøsitet og sedimentdjupn er antyda i den første, mens ein eksponentiell relasjon er føreslått i den andre. Innanfor den første kilometeren er derimot porøsitetsendringa tilnærma lineær også for den sistnemnte, noko som forfattar av artikkelen også presiserer. Desse to målingane samsvarar dermed godt med den lineære relasjonen vi fant ut frå modellen, og mykje tyder derfor på at hypotesen var fornuftig. Det er viktig å understreke at Figur 6.2 viser såkalla “75. prosentil porøsitet”, og ikkje vanlege middelveidiane. “75. prosentil porøsitet” tyder at 75% av målingane er under denne verdien, og 25% over, så denne vil derfor liggje litt høgare enn for den midla porøsiteten. Figur 6.3 viser som eit døme “75. prosentil porøsitet” for det same området som i Figur 6.1, og ein ser at dei plotta porøsitetsverdiene ligg generelt omtrent 5 prosentpoeng høgare, mens stigningstalet er tilnærma likt.

Mean Porosity vs. Depth , North Sea.

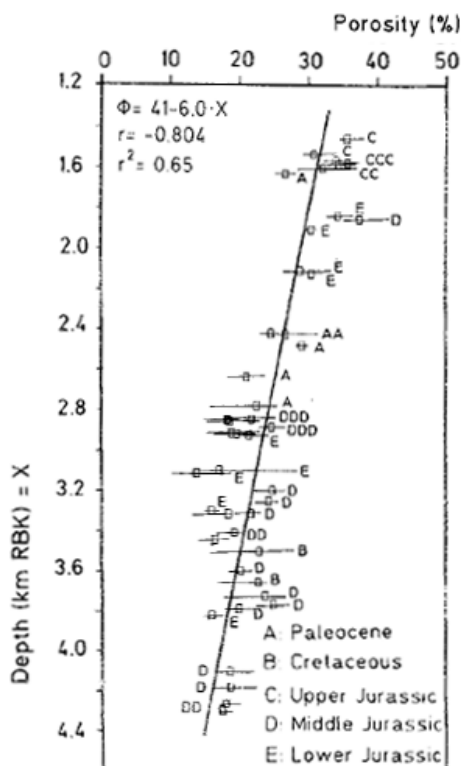


Figur 6.1: Porositetsmålingar i Nordsjøen. Ein lineær vekst med høgda (ved vald positiv høgderetning opp mot havbotnen) er her antyda for dei øvste kilometrane.



Figur 6.2: "75. prosentil porositet" plotta mot djupn ved den norske kontinentalsokkel. For den første kilometeren ser vi at ein lineær samanheng er ein god approksimasjon.

### 75 percentile porosity vs. depth, North Sea



Figur 6.3: “75. prosentil porøsitet” plotta mot djupn, for same område som i Figur 6.1.

## 6.3 Porøsitetskoeffisient

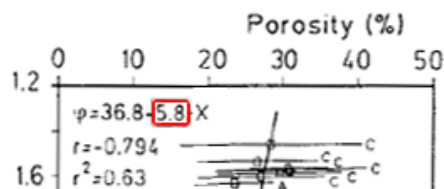
Sjølv om den lineære samanhengen stemmer godt overeins med faktiske målingar, kan det likevel ikkje fastslåast noko særleg om kvaliteten til modellen og resultatane våre før vi også har vurdert sjølve storleiken til porøsitetskoeffisienten, opp mot faktiske målingar frå den norske kontinentalsokkel. Vi har i Monte Carlo-simuleringane teke utgangspunkt i ei gaussisk startporøsitetsfordeling rundt middelverdien  $\phi_0 = 0.35$ , med standardavvik 0.0025, 0.25 km under havbotnen, og vi ser at denne antakinga kan forsvarast ut frå begge målingane lagt fram i førre delkapittel, dersom ein tek i betraktning at “75. prosentil porøsitet” ligg ein del høgre enn den midla verdien.

Med ein porøsitetskoeffisient på  $a = 0.0689$ , og den antekne relasjonen  $\phi(\xi) = \phi_0 + a\xi$ , gjev dette ein porøsitetsverdi ved havbotnen på  $\phi\left(\frac{Hp}{H}\right) = 0.35 + 0.0689 \cdot \frac{250}{980} = 0.368$ , som synes å vere eit fornuftig resultat. Ein kan dessutan sjå at dette er akkurat den same porøsitetsverdien for havbotnen som estimert øvst i Figur 6.1. At desse verdiane er heilt identiske er ansett som noko tilfeldig, men det er uansett ei tryggande teikn på at vi har nytta realistiske porøsitetsverdiar. Dersom ein vil sjå på kva stigningsstalet i porøsitet per km djupn,  $m_\phi$ , vil vere, kan ein ved å nytte at  $\xi = \frac{z}{H}$ , finne at  $m_\phi = \frac{0.0689}{0.980} = 0.0703$ . Dersom ein uttrykk porøsiteten i prosent, som gjort i Figur 6.1–6.3, vil stigningsstalet bli skalert til  $\bar{m}_\phi = 7.03$ . Tar ein omsyn til den estimerte uvisse i  $a$ , finn ein at det korresponderande uttrykket for stigningsstalet per km, med uvisse, er  $\bar{m}_\phi = 7.03 \pm 2.39$ . Ved å samanlikne dette med det estimerte stigningsstalet berekna frå kjerneprøvar i det første diskuterte området, utheva i Figur 6.4, ser ein at den berekna porøsitetskoeffisienten vår er av same storleiksorden, og faktisk relativt

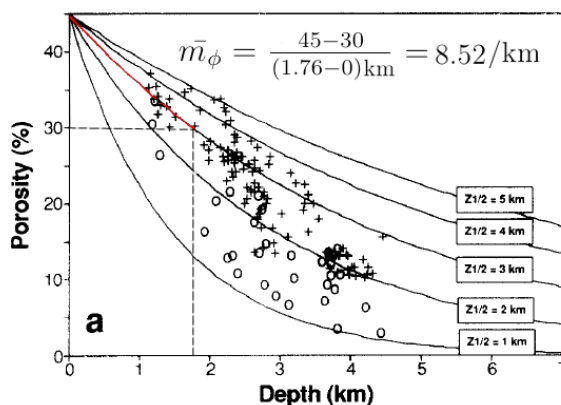


nærme dette estimatet på 5.8. Ein kan også gjere ein lineær approksimasjon for det andre diskuterte området ved den norske kontinentalsokkel, og kalkulere stigningstalet med ei enkel avlesing. I denne approksimasjonen er det teke utgangspunkt i kurva som ser ut til å gå gjennom flest av datapunkta, altså kurva med porøsitetsshalvering 3 km. Stigningstalet for dette området, som vist i Figur 6.5, er ut frå dette berekna til 8.52, som også må seiast å vere eit godt samsvar med våre resultat. Det kan derfor tyde på at antakingane gjort i denne oppgåva har vore gode.

Mean Porosity vs. Depth , North Sea.



Figur 6.4: Framheva stigningstal i den estimerte lineære relasjonen, for målingar i Nordsjøen.



Figur 6.5: Estimert stigningstal for lineær approksimasjon, basert på porøsitetsmålingar frå den norske kontinentalsokkel.

## 6.4 Svakheiter og feilkjelder

I denne masteroppgåva er det gjort mange antakingar og forenklingar som har gjort problemet mykje mindre komplisert enn det eigentleg er. For det første er modell-likningane for fluidstrøyminga haldne enkle, for å få ei køyretid som er akseptabel for Monte Carlo-simuleringar, og då er alltid spørsmålet om kor mykje ein misser av det fysiske for fenomenet under modellering. Svakheiter med modellen er til dømes at vi ikkje tek omsyn til temperatur i gasslikningane eller til at sjøvasstettleiken vil variere med trykket. Det forventast derimot ikkje at desse faktorane vil ha nemneverdig mykje å seie for dei presenterte resultatane. Ein større svakheit er at vi har nytta den dynamiske viskositeten for rein metangass og at vi ikkje har opna for at gass kan løyse seg i vatnet, noko vi veit vil skje til ein viss grad. Det er forventa at dette kan ha ein del å seie for

stigetida, og endre den i retning mot høgre, og dermed kanskje meir trulege, verdiar. Det er også viktig å hugse på at vi har betrakta heilt stasjonære forhold i denne oppgåva. Sidan vi derimot har valt å betrakte plumen først etter alle kanalane er danna og etter eventuelle transientar har døydd ut, vil dette truleg likevel ikkje ha mykje å seie for resultatata funne i denne oppgåva.

Den største svakheita med sjølve modellen er truleg at vi har sett på ein svært så forenkla porøsitetsprofil, til tross for den lineære auken som etterkvart vart lagt inn. Sidan vi dessutan har uttrykt permeabiliteten som ein funksjon av porøsiteten ved hjelp av Kozeny-Carman-relasjonen, som i seg sjølv er ei grov tilnærming, vil dette også sjølvstøtt føre til ein svært forenkla permeabilitetsprofil. I røynda vil det nemleg vere ei mykje meir kompleks fordeling av kornstorleik og sediment- og bergarttype enn det vi har antekke, og porøsiteten vil langt frå vere homogen for same høgde, som er tilfelle i modellen. I verkelege fluidstrøymingar vil gassen og væska bevege seg lateralt og søkje etter sprekkar og svakheiter som dei lettare kan kome seg gjennom. Fluida vil også støyte på lag som er svært lite gjennomtrengelige, grunna hydrattanning i porene og område med bergartar og meir kompakte sediment. Væska og gassen vil derfor akkumulere seg i lommer under desse laga, heilt til trykket blir stort nok til at dei etter kvart kan kome seg gjennom. Sidan vi har sett på fluidstrøyminga som skjer etter at kanalane allereie er danna, er dette derimot ikkje eit like stort problem som elles, men er likevel ein faktor som kan spele inn på resultatata frå modellen, spesielt for hastigheiter og stigetid.

Ei anna viktig feilkjelde er heilt klart sjølve parameterverdiane vi har nytta i modellen. Som presisert ved gjentekne anledningar, er det mange storleikar som er vanskelege å fastsetje, og medrivnings- og friksjonskoeffisienten er truleg dei mest usikre. Uvissa i friksjonskoeffisienten vil, som vi har sett, ikkje ha noko å seie for den berekna porøsitetskoeffisienten sidan vi uansett må justere volumraten for å få startradius av ønskja storleik, men vil derimot ha mykje å seie for stigetida. Ut frå resultatata våre kan det som nemnt tyde på at vi har valt denne koeffisienten for låg. Forenklinga med å nytte den dynamiske viskositeten til rein metan spelar nok også inn på same måte, og ein burde truleg her teke omsyn til formasjonsvatnet og løyslegheita til gassen, for å få ei meir truleg stigetid. Medrivningskoeffisienten vil på si side derimot ikkje ha mykje å seie for stigetida, men har som demonstrert under sensitivitetsanalysen ein tilnærma proporsjonal samanheng med porøsitetskoeffisienten. For å få pålitelege resultat for den berekna porøsitetskoeffisienten er det med andre ord viktig at medrivningskoeffisienten er fastsett så presist som råd. Sidan medrivningskoeffisienten, som nemnt, derimot er ein av dei mest usikre av dei nytta parameterverdiene i modellen, vil denne uvissa derfor vere ei av dei viktigaste feilkjeldene for resultatet vårt.

# Kapittel 7

## Oppsummering og vegen vidare

I denne masteroppgåva har det blitt presentert ein enkel modell for fluidstøyming i porøse media. Denne modellen vart nytta til å simulere vertikal strøyming av naturgass frå djuptliggjande reservoar opp mot havbotnen ved den norske kontinentalsokkel. Vi brukte den Genetiske Algoritme til å søkje etter porøsitetskoeffisientar som kunne gje viddeprofilar som samsvarar med verkelege seismiske målingar, samt ein Monte Carlo-metode for å bestemme eit estimat, med uvisse, for denne koeffisienten.

Ved å samanlikne resultata mot verkelege målingar tyder mykje på at modellen klarar å bevare visse karakteristika til plumen på ein tilfredstillande måte. Sjølve forma på plumen synest nemleg å passe bra med seismiske målingar dersom vi legg inn ei lineær porøsitetsauking med høgda, som også langt på veg er antyda av kjerneprøvar i dei aktuelle sedimenta. Sjølve storleiken til denne porøsitetsstigninga samsvarar dessutan også godt med reelle målingar. Stigetida modellen gjev oss er derimot truleg vel låg, men dette mistenkast å vere mykje grunna manglande realistiske tal på visse parameterverdiar, der friksjonskoeffisienten betraktast som særleg usikker. Dersom ein justerer friksjonsleddet i formlane, ved hjelp av friksjonskoeffisienten, granulatdiameter og dynamisk viskositet, kan vi nemleg, om vi ønskjer, tilpasse modellen til akkurat den stigetida vi vil ha og framleis bevare forma på plumen. Det vil her vere viktig å presisere at vi på same måte i prinsippet kan manipulere modellen til å produsere akkurat dei resultata vi måtte ønskje, dersom vi berre justerer og endrar nok på inputparametrane. Modellen vår kan med andre ord ikkje *modellere* kva som helst, men den kan derimot så og seie *produsere* kva som helst. Det vil derfor vere svært viktig å få tak i gode og realistiske data som ein kan støtte seg på, både for inputparametrane og verkelege målingar som ein kan kalibrere og validere modellen etter. Det spelar med andre ord ikkje nokon rolle kor perfekt sjølve modellen måtte vere, dersom vi ikkje også har realistiske og tilsvarende gode parameterverdiar vi kan nytte i den. Det bør også nemnast at sjølv om ein kalibrerer modellen etter verkelege målingar frå eit bestemt område eller for ein bestemt type fluidstrøyming, er det langt frå garantert at modellen kan nyttast på eit anna type problem med like stor suksess. Modellen bør med andre ord kalibrerast under forhold som liknar mest mogeleg på forholda den skal nyttast ved, for å minimere feil.

Hadde eg hatt betre tid til rådighet for denne masteroppgåva, ville det vore aktuelt å utvida området for utforsking. Det ville til dømes vore interessant å betrakte kva som skjer også etter at metangassen har nådd havbotnen og korleis den vidare ferda opp

mot havoverflata blir. Ein rask hastigheitsauke som følgje av overgangen frå sediment til sjøvatn ville truleg skapt ein ny jetstråle, som kunne vore interessant å utforska meir i detalj. Denne plutselige hastigheitsauken vil nemleg truleg spele ei rolle innan sjølve utforminga av eit pockmark, sidan jetstrålen vil kunne rive med seg små lette partiklar i prosessen. Ein kunne også valt å sjå på stigetida for metangassen opp til havoverflata og dessutan kor stort areal denne ville fordele seg over. Sistnemnte problemstilling kunne til dømes vore ei interessant betraktning innan klimaforskning.

Dersom ein skal arbeide vidare med modellen som er diskutert i denne masteroppgåva på eit seinare tidspunkt kan det vere aktuelt å gjere visse forbetringar. Viktigast her vil truleg vere å få tak i meir sikre verdiar på medrivnings- og friksjonskoeffisienten, gjennom forsøk i laboratoriet eller “in situ”-målingar. Sjølve modellen har også heilt klart forbettringspotensiale, og kan gjerast meir realistisk med få endringar. Ein kan til dømes ta omsyn til temperatur i gasslikningane og samtidig legge inn ein geotermisk gradient i sedimenta. Det kan også leggjast inn ein meir avansert tettleiksprofil på det omgivande sjøvatnet, samt å betrakte eit tokomponentsystem der det er mogeleg med oppløysing av gass i vatn. Vidare kan det programmerast at gass skal fjernast på vegen oppover mot havbotnen, som følgje av danning av metanhydrat og konsumering av bakteriar. Ein siste viktig forbetring som bør nemnast vil vere å legge inn ein meir realistisk porøsitetsprofil, med visse tilfeldige hindringar og sprekkar, samt område med varierende gjennomtrengelighet også for same høgde. Dette kunne heilt klart gjort modellen meir realistisk, men på den andre sida ville køyretida også auka dramatisk. Det vil derfor vere naudsynt å betrakte formålet for modellen før ein eventuelt skal auke kompleksiteten. Dersom ein vil prøve å forstå prosessen bør ein heilt klart auke kompleksiteten så mykje som råd, men dersom ein derimot skal køyre risikoanalyse, til dømes gjennom Monte Carlo-simuleringar, treng ein mange målingar og derfor også kort køyretid.

Det ville også vore interessant å prøve legge inn ei tidsavhengigheit, og ikkje kun betrakte stasjonære forhold, og på den måten forsøkt å modellere då gassøyla stig frå gassreservoaret i den første fasen av pockmarkdanninga. Ei anna interessant problemstilling kunne vore å teste ut modellen for andre typar fluidstrøymingar, som til dømes modellering av lekkasjar frå eit CO<sub>2</sub>-reservoar. Spesielt interessant synest eg det ville vere å utføre fysiske målingar i eit laboratorium der ein, under spesifikke trykkforhold, sender inn metangass med kjend volumrate, og deretter måle stigetid og plumevidde langs fartsretninga. Ved denne framgangsmåten kunne vi då ha brukt modellen til å føre statistikk og ut frå dette prøve anslå ein verdi for dei problematiske verdiane for friksjons- og medrivningskoeffisienten

Vel så viktig som dei presenterte resultatata og lærdomen eg har tileigna meg om fluidstrøymingar i porøse media, er nok erfaringa eg tar med frå denne masteroppgåva om gangen i ein forskingsprosess. Disponering av både tid og tilgjengelege ressursar er vanskeleg å lære utan sjølv å vere involvert i eit forskingsprosjekt. Dei gode verktya eg har lært meg er også heilt klart noko eg kjem til å ta med meg vidare. Monte Carlo-simuleringar har utvilsamt ein plass innan moderne forskning og kjem berre meir og meir til sin rett grunna den stadige framgangen i teknologi og prosessorkraft, og eg er glad eg fekk sjansen til fordjuping innanfor denne type metodar. Eg har også lært mykje nytt innan Matlab, der den Genetiske Algoritme var den største tileigna lærdomen, eit verkty eg meiner har eit stort potensiale, og som eg håpar eg får høve til å nytte igjen i nærmaste framtid. Eg synest denne masterperioden har vore ei svært kjekk tid og er glad og takknemleg for at eg har fått mogelegheita til å ta del i denne spanande oppgåva.

# Appendiks

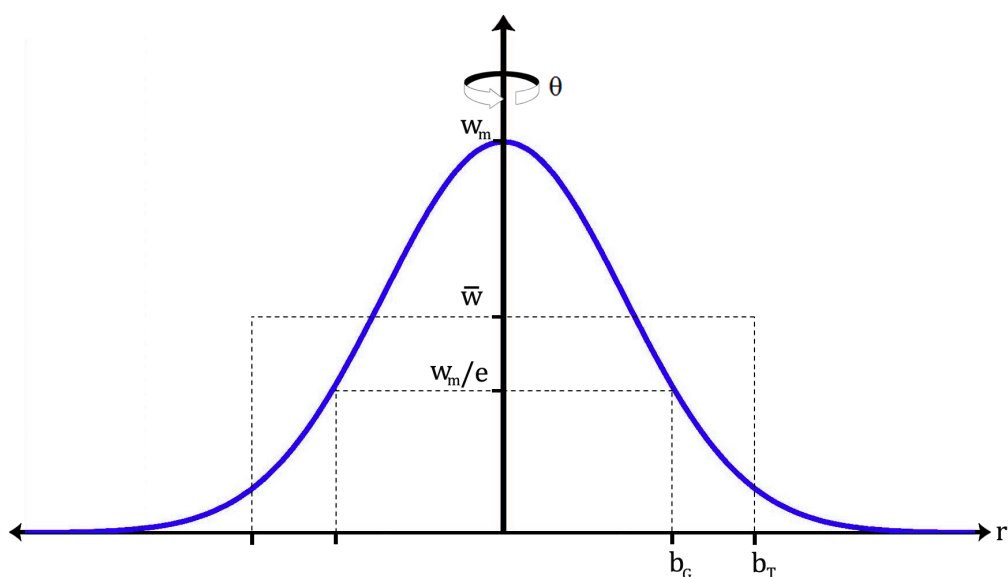
## A Tabell over parametrar

Symbol	Eining	Definisjon	Verdi
$w$	[m/s]	Vertikal hastigheit	
$b$	[m]	Gjennomsnittleg plumeradius	
$b_0$	[m]	Utlauprsadius	
$b_s$	[m]	Startradius, etter ein eventuell jetstråle har stabilisert seg	
$b_c$	[m]	Konstant plumeradius	75
$\varrho_0$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Tettleik sjøvatn	1025
$\varrho_g$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Tettleik naturgass	
$\varrho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Tettleiksfordeling innanfor plumen	
$U_e$	[m/s]	Hastigheit for eksternt vatn transportert inn i plumen	
$\alpha$		Medrivningskoeffisient	0.001-0.03
$H_P$	[m]	Høgde porøst lag	250
$H_S$	[m]	Havdjupn	730
$H$	[m]	Total høgde frå utlaup til havoverflate	980
$\xi$		Høgdeforhold, $z/H$	
$\phi$		Porøsitet	
$\phi_0$		Porøsitet ved $\xi = 0$	0.34-0.36
$a$		Porøsitetskoeffisient	
$C_D$		Friksjonskoeffisient	$1.5 \cdot 10^{-5}$
$\mu$	[kg/(ms)]	Dynamisk viskositet for naturgass	$1.8 \cdot 10^{-5}$
$D$	[m]	Granulatdiameter	$2 \cdot 10^{-6}$
$k$	[m <sup>2</sup> ]	Permeabilitet	
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	Tyngdeakslerasjon	9.81
$p$	[Pa]	Trykk	
$n$		Gasskonstant	1-1.8
$\dot{m}_g$	[kg/s]	Masserate av gass	
$\dot{V}_g$	[m <sup>3</sup> /s]	Volumrate av gass	
$\tau$		Tortuositet	2
$C_0$		Formfaktor	2.5

## B “Top hat” og gaussiske plumeprofilar

I dette delkapittelet vil det bli diskutert “top hat”-verdiar for ein aksesymmetrisk plume under gjevne forenkla føresetnader. Delkapittelet er ikkje meint som ei forklaring av dei generelle likningane gjeve i kapittel 2, men heller for å gje ein liten smak på kva konseptet med “top hat” inneberer. Dei komande utrekningane er gjort med utgangspunkt i (Cook, 1998).

Hastigheitsprofilane for plumar vi observerer i naturen er som oftast tilnærma gaussiske, noko som er ei godt kjent fordeling som er relativt enkel å rekne med. Ein kan likevel forenkle utrekninga eit steg vidare ved å beskrive den interne horisontale strukturen til plumen ved hjelp av kun éin verdi, nemleg ein såkalla “top hat”-verdi. Denne representasjonen er demonstrert i figuren under:



Figur 1: Tverrsnitt av aksesymmetrisk plume som samanliknar ein gaussisk og ein “top hat” hastigheitsprofil.

I denne figuren viser  $w_m$  og  $\bar{w}$  høvesvis til hastigheita i senteret av plumen og den berekna “top hat”-hastigheita. Tilsvarande er  $b_G$  avstanden ein må flytte seg frå senteret før hastigheita er redusert med ein faktor på  $e$ , mens  $b_T$  viser til den korresponderande “top hat”-radiusen. Dersom ein nyttar denne symbolikken kan eit uttrykk for volumraten skrivast som

$$\pi \bar{w} b_T^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty w_m e^{-\frac{r^2}{b_G^2}} r dr d\theta.$$

Ved ein enkel variabelsubstitusjon kan dette integralet bereknast analytisk, og vi står etter litt rekning igjen med

$$\bar{w} b_T^2 = w_m b_G^2. \quad (1)$$

Ved hjelp av den same tankegangen kan ein også setje opp ei tilsvarande likning for momentumrate. Ein har i den følgjande likninga anteke at tettleiksprofilen er konstant i det horisontale planet, altså at  $\bar{\varrho}(z) = \varrho(z)$ , for å forenkla utrekninga. Dette gjev oss

$$\pi \varrho \bar{w}^2 b_T^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varrho w_m^2 e^{-\frac{2r^2}{b_G^2}} r dr d\theta.$$

Dette integralet kan også lett bereknast analytisk, og vi endar opp med

$$\bar{w}^2 b_T^2 = \frac{w_m^2 b_G^2}{2}. \quad (2)$$

Saman med likning 1 gjev dette til slutt samanhengane:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w_m}{2} \\ b_T &= \sqrt{2} b_G \end{aligned} \quad (3)$$

Dersom ein no definerer gjennomsnittleg plumeradius, i høgde  $z$  over utlaupet, som  $b(z) = b_G(z)$ , vil den gaussiske hastighetsprofilen i plumen vere gjeve som  $w(z, r) = w_m(z) e^{-\frac{r^2}{b(z)^2}}$ . Ved å nytte likning 3 kan då volumraten enkelt uttrykkast ved

$$\bar{w}(z) [b(z)]^2 = \int_0^\infty w(r, z) r dr.$$

Vi kjenner igjen dette som likning 2.1 og får bekrefta at dømet i dette kapitlet er eit spesialtilfelle av den meir generelle “top hat”-berekninga gjeve i modellutleiinga.

## C Runge-Kutta- metoden av 4. og 5. orden

I dette delkapittelet skal det bli gjeve ein liten presentasjon av metoden som blir nytta for å løyse differensiallikningane i modellen. Denne presentasjonen baserast i hovudsak på (Cheney og Kincaid, 1985), (Phil, 2008) og hjelp-fila i Matlab.

Runge-Kutta- metoden er kalla opp etter dei tyske matematikarane C. Runge og M.W. Kutta, og gjev oss moglegeheita til å finne svært presise numeriske løysingar på differensiallikningar på forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, t) \\x(a) &= s\end{aligned}$$

utan å berekne den deriverte av funksjonen  $f$ , men kun ved å evaluere sjølve funksjonsuttrykket. Dette er ein stor fordel, sidan numerisk derivasjon ofte er tidkrevjande, og er ein av grunnane til at denne metoden har blitt så populær. Runge-Kutta-metoden av høvesvis orden 4 og 5 er gjeve som:

### Orden 4:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4),$$

der

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1) \\ F_3 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_2) \\ F_4 = hf(t + h, x + F_3) \end{cases}$$

### Orden 5:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{24}F_1 + \frac{5}{48}F_4 + \frac{27}{56}F_5 + \frac{125}{336}F_6,$$

der

$$\begin{cases} F_1 = hf(t, x) \\ F_2 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}F_1) \\ F_3 = hf(t + \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{4}F_1 + \frac{1}{4}F_2) \\ F_4 = hf(t + h, x - F_2 + 2F_3) \\ F_5 = hf(t + \frac{2}{3}h, x + \frac{7}{27}F_1 + \frac{10}{27}F_2 + \frac{1}{27}F_4) \\ F_6 = hf(t + \frac{1}{5}h, x + \frac{28}{625}F_1 - \frac{1}{5}F_2 + \frac{546}{625}F_3 + \frac{54}{625}F_4 - \frac{378}{625}F_5) \end{cases}$$

Desse formlane kan begge utleiast ved hjelp av Taylorutvikling og algebraisk manipulasjon. Sjølve bevisa er derimot plasskrevjande og vil derfor ikkje bli gjengjeve her.

Metoden som har blitt nytta for å løyse differensiallikningane 2.19–2.21 i denne masteroppgåva blir av Matlab angjeve som “ode45”. Som dette namnet antyder, løyser denne metoden differensiallikninga ved å nytte Runge-Kutta-metoden av orden 4, og gjev



deretter eit estimat på trunckeringsfeilen ved å samanlikne denne løysinga med Runge-Kutta-løysinga av orden 5. Feilestimatet vert med andre ord berekna som  $\epsilon = |x_4 - x_5|$ , der  $x_4$  og  $x_5$  er løysingane i eit punkt ved høvesvis bruk av Runge-Kutta-metoden av 4. og 5. orden. Denne feilen blir ikkje gjeve ut eksplisitt av metoden, men blir derimot nytta i ein analyse for å velje stegstorleiken,  $h$ , slik at den relative feilen er mindre enn  $10^{-3}$  og den absolutte feilen mindre enn  $10^{-6}$  for kvar komponent. Dersom ein ønskjer kan ein sjølvsagt endre default-innstillinga for feilkriterium, men dette er ikkje funne naudsynt for oss. Det finnes også andre alternativ til ode45-metoden, men det er denne Matlab anbefalar å nytte på differensiallikningar av vår type, og er derfor metoden som er valt å nytte i denne masteroppgåva.

## D Box-Müller-transformasjonen

Ved å starte med tilfeldige tal med ei uniform fordeling i intervallet  $[0,1]$ , finnes det enkle måtar å overføre desse til normalfordelte tilfeldige tal med ønskja standardavvik,  $\sigma$ , og forventningsverdi,  $\mu$ . Ein av dei mest anerkjente metodane vert kalla Box-Müller-transformasjonen og er oppkalla etter dei to matematikarane George Edward Pelham Box and Mervin Edgar Müller. Korleis denne metoden utfører denne ønskja transformasjonen vil bli forklart i dette delkapittelet. Utleiinga er henta og oversett frå (Forsyth, 2011).

Dersom vi lar  $p(x)$  angje sannsynet for å finne  $x \in [x, x + dx]$ , definerer  $y = y(x)$  og lar  $\hat{p}(y)$  angje sannsynet for å finne  $y \in [y, y + dy]$ , vil vi etter lova om transformasjonar av sannsyn ha

$$p(x)|dx| = \hat{p}(y)|dy|,$$

eller

$$\hat{p}(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (4)$$

Anta så at vi har to tilfeldige variable  $x_1$  og  $x_2$ , og la  $p(x_1, x_2)$  vere sannsynet for å finne  $(x_1, x_2)$  i rektangelet  $[x_1, x_1 + dx_1] \times [x_2, x_2 + dx_2]$ . Dersom vi no har funksjonar  $y_1 = y_1(x_1, x_2)$  og  $y_2 = y_2(x_1, x_2)$ , får vi, ved same tankegang som leda oss til likning 4, at

$$\hat{p}(y_1, y_2) = p(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|. \quad (5)$$

Vi ser no på tilfellet der  $x_1, x_2$  er uniformt fordelte tilfeldige variable på  $[0, 1] \times [0, 1]$ , altså at

$$p(x_1, x_2) = U(x_1)U(x_2), \quad (6)$$

der

$$\begin{aligned} U(x_i) &= 1; & 0 \leq x_i \leq 1 \\ U(x_i) &= 0; & \text{ellers} \end{aligned}$$

Når  $p(x_1, x_2)$  no er gjeve av likning 6, vil vi ha frå likning 5 at

$$\hat{p}(y_1, y_2) = \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|. \quad (7)$$

Vi ønskjer no å finne transformasjonar  $y_1 = y_1(x_1, x_2)$  og  $y_2 = y_2(x_1, x_2)$ , som resulterer i normalfordelingar for variablane  $y_1$  og  $y_2$ . I dette søket evaluerer vi transformasjonane:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \log x_1} \cos(2\pi x_2) \\ y_2 &= \sqrt{-2 \log x_1} \sin(2\pi x_2) \end{aligned}$$

eller, om vi løyser for  $(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\frac{(y_1^2 + y_2^2)}{2}} \\ x_2 &= \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \end{aligned}$$

Ved å nytte desse uttrykka for  $x_1$  og  $x_2$  kan ein no, etter litt algebrarekning, finne eit uttrykk for determinanten av Jacobimatrissa:

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}},$$

som i følge likning 7 derfor gjev at

$$\hat{p}(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}. \quad (8)$$

Med andre ord er  $(y_1, y_2)$  uavhengige, normalfordelte tilfeldige tal, med forventningsverdi,  $\mu = 0$ , og standardavvik,  $\sigma = 1$ , i.e.  $y_1 \sim N(0, 1)$  og  $y_2 \sim N(0, 1)$ .

Ein algoritmen for å generere normalfordelte tilfeldige tal, når ein har uniformt fordelte tilfeldige tal tilgjengelege, blir derfor:

Generer  $u_1 \sim U(0, 1)$ ,  $u_2 \sim U(0, 1)$

Set  $\theta = 2\pi u_2$ ,  $\rho = \sqrt{-2 \log u_1}$

Få ut  $y_1 = \rho \cos \theta$ ,  $y_2 = \rho \sin \theta$

Som ein ser produserer algoritmen to tilfeldige tal, for kvar gang den blir køyrt. Når algoritmen blir nytta i samanheng med ein generator som skal gje brukar normalfordelte tilfeldige tal, er det derfor vanleg at generatoren ved første funksjonskall gjev ut den første verdien, og så lagrar og sparar den andre, slik at den kan returnerast ved eit eventuelt nytt funksjonskall (Thomas et al., 2007).

Når ein har klart å produsere tilfeldige tal,  $y$ , med fordelinga  $y \sim N(0, 1)$ , er det ein smal sak å overføre desse til normalfordelte tal med ønskja standardavvik og forventningsverdi. Dersom vi har  $y \sim N(0, 1)$ , vil nemleg  $z = \mu + \sigma y$ , ha forventningsverdi  $\mu$  og standardavvik  $\sigma$ .

## E Minste kvadraters metode

Minste kvadraters metode er ein standard framgangsmåte for å tilnærme løysinga av eit overbestemt system, altså eit system med fleire likningar enn ukjende. Orda “Minste kvadrat” siktar til at den endelege løysinga minimerer summen av kvadrata av feila gjort for kvar enkel likning.

For å forstå korleis denne metoden faktisk fungerer, tek vi utgangspunkt i  $n$  par med eksperimentelle data  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Dersom vi har  $n \geq m + 1$ , vil vi då kunne finne eit unikt polynom

$$f(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

slik at summen,  $S$ , av dei kvadrerte residuala,  $r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2$ , er minimert.  $f_i$  er her den spådde verdien av polynomet evaluert i  $x_i$ . Vi får altså

$$S = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1x_i + \dots + a_mx_i^m))^2.$$

Ved å partiellderivere  $S$  med omsyn på  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , og setje desse deriverte lik 0, får vi eit system av  $m$  likningar og  $m$  ukjende,  $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ :

$$\begin{array}{cccccc} s_0a_0 & + & s_1a_1 & + & \dots & + & s_ma_m & = & t_0 \\ s_1a_0 & + & s_2a_1 & + & \dots & + & s_{m+1}a_m & = & t_1 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_ma_0 & + & s_{m+1}a_1 & + & \dots & + & s_{2m}a_m & = & t_m \end{array} \quad (9)$$

der  $s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$  og  $t_k = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k$ .

Mengda av koeffisientar  $a_0, a_1, \dots, a_m$  er den unike løysinga av dette systemet. For  $m = 1$ , då vi har lineær regresjon, kan vi finne igjen dei kjende likningane:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Å berekne liknande uttrykk for koeffisientar til polynom av høgre grad enn 1, er sjeldan nytta sidan desse er svært kompliserte. Det er heller vanleg å løyse likningssettet 9 for koeffisientvektoren  $(a_0, a_1, \dots, a_m)$  numerisk. I denne oppgåva vert den innebygde løysaren i Matlab nytta til dette formålet.

Som eit mål på kor god løysinga,  $f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$  er, kan ein berekne forklaringsgraden (“coefficient of determination”), ofte angjeve som  $R^2$ . Denne kan finnast som

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (10)$$

der  $\bar{y}$  er gjennomsnittet av  $y$ -verdiane,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

Det kan visast at  $0 \leq R^2 \leq 1$ , der funksjonar som gjev  $R^2 = 1$  vil vere ei ideell tilpassing, der kurva går gjennom alle datapunkta, mens kvaliteten funksjonen klarar å estimere dei gjevne datapunkta med, minkar mens  $R^2$  nærmar seg 0. Eit annan mål på kvaliteten av løysinga er sjølv sagt også verdien til  $S$ , der  $S = 0$  angjev ei perfekt tilpassing. Dette målet er derimot noko vanskelegare å vurdere, sidan storleiken på sjølve  $y$ -verdiane også spelar inn, i motsetning til  $R^2$ -verdien som heile tida er normalisert til intervallet  $[0,1]$ . Sjølv om ein også kunne ha normalisert  $S$ , er det i denne masteroppgåva valt å nytte  $R^2$  til formålet med kvalitetsanalyse av funksjonsapproximasjonane utrekna med Minste kvadraters metode.

## F Tabellar av berekningar

$C_D$ $10^{-5}$	$D$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\phi_0$	$b_0$ [m]	$\alpha$	Avvik frå ønska startradius [%]
1.36	8.11	0.344	71.1	0.0287	0.0006
1.03	7.25	0.357	77.9	0.0153	0.0168
0.83	2.42	0.346	19.5	0.0129	0.0000
1.12	2.13	0.353	78.5	0.0185	0.0060
1.44	2.85	0.342	57.4	0.0231	0.0057
1.15	6.11	0.349	17.3	0.0263	0.0438
1.18	3.22	0.352	30.8	0.0140	0.0090
1.17	7.93	0.346	51.0	0.0111	0.0087
0.87	9.79	0.341	61.8	0.0143	0.0548
0.84	7.35	0.358	62.3	0.0218	0.0160
1.47	8.20	0.340	21.8	0.0268	0.0073
1.38	4.52	0.360	52.7	0.0292	0.0108
1.12	4.18	0.348	51.7	0.0110	0.0006
1.08	2.42	0.347	46.4	0.0157	0.0012
1.23	9.58	0.358	70.0	0.0174	0.0014
0.55	7.34	0.356	20.6	0.0172	0.0019
1.02	8.17	0.342	41.6	0.0103	0.0182
1.07	2.33	0.358	78.2	0.0138	0.0070
1.17	7.83	0.358	69.5	0.0147	0.0265
0.86	6.66	0.349	31.9	0.0122	0.0051
1.19	6.90	0.354	59.6	0.0134	0.0028
0.86	8.82	0.358	12.4	0.0280	0.0000
0.60	6.67	0.345	73.7	0.0239	0.0036
0.66	9.39	0.358	20.5	0.0164	0.0186
1.17	6.64	0.349	60.1	0.0106	0.0195
0.83	6.71	0.357	66.5	0.0111	0.0172
0.99	8.19	0.353	65.9	0.0240	0.0133
0.82	3.33	0.344	39.0	0.0150	0.0081
0.80	7.12	0.359	59.8	0.0157	0.0001
0.84	5.41	0.349	22.0	0.0271	0.0045
0.78	5.68	0.356	62.5	0.0207	0.0324
1.09	3.40	0.345	12.5	0.0157	0.0052
0.77	6.11	0.353	30.2	0.0274	0.0053
1.28	3.08	0.351	13.9	0.0252	0.0063
1.28	8.46	0.359	17.9	0.0270	0.0125
1.27	7.79	0.340	71.3	0.0120	0.0020
1.38	9.87	0.344	62.1	0.0118	0.0102
1.12	8.54	0.342	33.7	0.0247	0.0002
1.45	4.85	0.358	41.2	0.0225	0.0043
1.09	4.14	0.352	12.5	0.0276	0.0042
0.84	5.45	0.359	42.9	0.0208	0.0001
1.28	3.40	0.342	38.9	0.0157	0.0128
1.43	9.27	0.343	67.4	0.0219	0.0336
1.26	2.87	0.341	69.6	0.0231	0.0270
1.04	8.78	0.353	24.0	0.0211	0.0094
1.25	3.50	0.359	46.7	0.0293	0.0046
1.48	7.28	0.340	43.4	0.0145	0.0232
1.20	9.43	0.356	58.4	0.0239	0.0027
1.01	6.26	0.359	63.2	0.0139	0.0045
1.45	2.92	0.358	66.6	0.0130	0.0240
Maksverdi					0.0548
Middelverdi					0.0110

Tabell 1: Tabell for prosentvise avvik mellom ønska startradius og startradius berekna med utgangspunkt i formel 3.3, for 50 tilfeldige trekte parametarar av  $C_D$ ,  $D$ ,  $\phi_0$ ,  $b_0$  og  $\alpha$ .

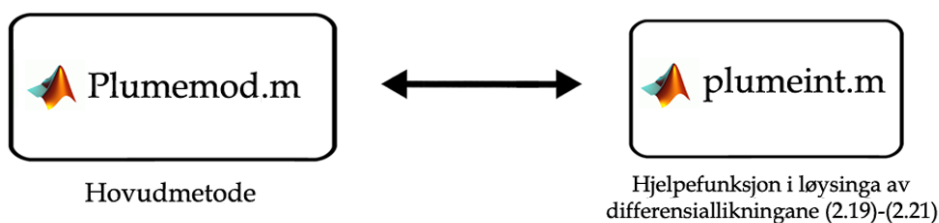
$C_D$ $10^{-5}$	$D$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\phi_0$	$\alpha$	Maks avvik mellom korresponderande komponentar [%]	Midla avvik mellom korresponderande komponentar [%]
0.9313	3.1643	0.3575	0.0165	0.1702	0.0256
0.8502	7.5137	0.3538	0.0134	0.3184	0.0242
0.7891	9.9691	0.3541	0.0105	0.3880	0.0241
0.6267	6.3067	0.3704	0.0237	0.3332	0.0252
0.8900	8.6065	0.3726	0.0211	0.3499	0.0275
0.5021	3.0885	0.3538	0.0125	0.4253	0.0252
0.6268	3.2975	0.3745	0.0236	0.4700	0.0236
0.9754	8.9543	0.3773	0.0150	0.3147	0.0252
1.1072	4.8076	0.3690	0.0117	0.4215	0.0222
0.9068	6.1060	0.3545	0.0187	0.3585	0.0260
1.4181	6.9764	0.3781	0.0126	0.3349	0.0209
0.9778	8.8242	0.3671	0.0177	0.4433	0.0260
1.0639	3.1596	0.3700	0.0157	0.1757	0.0252
0.8939	2.6077	0.3518	0.0111	0.1581	0.0225
1.3760	3.9196	0.3529	0.0100	0.1988	0.0218
1.4175	3.4713	0.3535	0.0193	0.4268	0.0211
0.9387	2.9866	0.3775	0.0222	0.2266	0.0270
1.4008	5.2145	0.3711	0.0114	0.2533	0.0210
1.4001	3.9193	0.3506	0.0101	0.3224	0.0217
0.8801	6.3989	0.3701	0.0133	0.4180	0.0256
1.1745	6.6376	0.3553	0.0176	0.4628	0.0227
0.5902	8.5384	0.3694	0.0151	0.2652	0.0290
1.1383	2.0371	0.3527	0.0119	0.4315	0.0215
1.2651	5.5414	0.3565	0.0238	0.3259	0.0239
1.4103	9.6952	0.3573	0.0221	0.3008	0.0218
0.8937	2.6254	0.3505	0.0103	0.4610	0.0210
0.9656	2.8532	0.3696	0.0154	0.3443	0.0251
1.1170	8.9496	0.3527	0.0100	0.3370	0.0222
0.6333	8.1993	0.3754	0.0189	0.2099	0.0279
1.1991	5.6043	0.3587	0.0152	0.2331	0.0213
1.4255	2.6755	0.3794	0.0132	0.2283	0.0208
1.1521	7.9852	0.3621	0.0137	0.4312	0.0216
1.1357	2.6706	0.3556	0.0172	0.4640	0.0230
0.8303	3.2190	0.3788	0.0218	0.3963	0.0266
1.3481	9.3067	0.3650	0.0215	0.3881	0.0234
1.3402	3.8318	0.3749	0.0141	0.2259	0.0215
1.1604	4.4897	0.3574	0.0136	0.4385	0.0208
1.1897	5.1983	0.3514	0.0175	0.2549	0.0214
0.8010	4.1104	0.3690	0.0233	0.1831	0.0285
1.1166	3.4548	0.3720	0.0233	0.4688	0.0260
0.6633	9.2852	0.3576	0.0135	0.2621	0.0258
1.0014	5.4513	0.3744	0.0208	0.2237	0.0260
1.3898	8.4005	0.3611	0.0196	0.4007	0.0217
1.3542	4.0790	0.3529	0.0211	0.4624	0.0217
0.9702	8.3543	0.3653	0.0243	0.4609	0.0269
1.3619	3.3252	0.3515	0.0150	0.4627	0.0212
1.1391	6.8159	0.3788	0.0171	0.4432	0.0255
1.0311	4.1038	0.3773	0.0149	0.3598	0.0252
1.4277	6.2283	0.3623	0.0139	0.4713	0.0209
1.0823	7.8895	0.3617	0.0132	0.3608	0.0225
Maksverdi				0.4713	0.0290

Tabell 2: Tabell for prosentvise avvik mellom korresponderande komponentar for fartsvektorar rekna ut av høvesvis formel 2.22 og 5.4, for 50 tilfeldige trekte parametrar av  $C_D$ ,  $D$ ,  $\phi_0$  og  $\alpha$ .

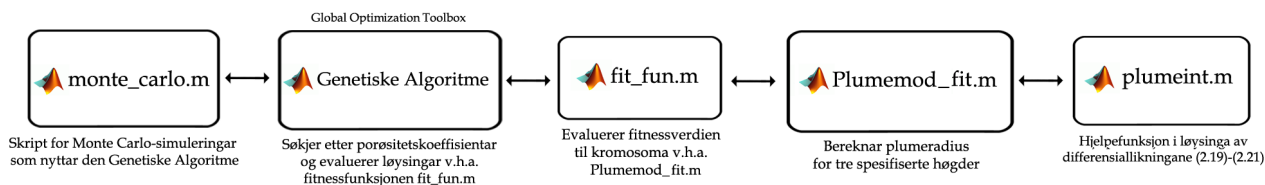
## G Matlab-skript og -kodar

I denne masteroppgåva er det nytta mange ulike Matlab-skript og -kodar, og dei viktigaste av desse vil bli gjengjeve og forklart i dette delkapittelet. Før sjølve kodane blir lista opp har eg valt å demonstrere korleis dei ulike kodane samarbeider med kvarandre. Dette er gjort for å skape ei oversikt som forhåpentlegvis kan betre forståinga av korleis berekningane blir utført.

Berekning av plumeradius, stigetid, vidde- og hastigheitsprofil:



Monte Carlo-simuleringar:



Dei aktuelle kodane blir presentert i sin heilskap over dei komande sidene, med meir detaljerte kommentarar. Det bør nemnast at det også er nytta fleire kodar og skript i masteroppgåva enn dei opplista, men alle desse er relativt enkle å utleie frå dei følgjande hovudkodane, og har derfor av plassomsyn ikkje blitt lagt ved.



```

%Plumemod
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tek inn input-parametrane startporøsitet og porøsitetskoeffisient.
%Gjev ut plumeradius ved botnen av krateret, stigetid, viddeprofil og
%hastigheitsprofil.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [R, T] = Plumemod(phi, lin_kof)

global Hp H Rho0 Rhog0 g n Patm P0 mdot c mu D Alfa phi0 a

a = lin_kof; %Porøsitetskoeffisient
g = 9.81; %Tyngdeakslerasjon [m/s^2]
Hp= 250; %Djupn til det porøse laget [m]
Hs=730; %Havdjupn [m]
H=Hs+Hp; %Total djupn [m]
Rho0 = 1025; %Tettleik for sjøvatn [kg/m^3]
Alfa =0.015; %Medrivningskoeffisient for sediment
c = 1.5*10^(-5); %Friksjonskoeffisient
D = 0.2*10^(-5); %Granulatdiameter [m]
mu = 1.8*10^(-5); %Dynamisk viskositet [kg/(m·s)]
Patm = 101325.0; %Trykk ved havoverflata [Pa]
P0 = Patm + Rho0*g*H; %Hydrostatisk trykk ved utlaupet [Pa]
n = 1.4; %Gasskonstant

%Startvilkår:
phi0 = phi; %Startporøsitet for sediment, ved z=0
Rhog0 = 85; %Gasstettleik ved utlaupet [kg/m^3]
b0 = 75; %Utlauprsradius [m]
Vdot = (Rho0-Rhog0)*g/c/mu*pi*75^2*... %Volumrate ved utlaupet [m^3/s] (P0)
5.55*10^(-3)*phi0^3*D^2/(1-phi0)^2;
mdot = Rhog0*Vdot; %Masserate [kg/s]
w0 = Vdot/(pi*b0^2); %Tophat-starthastigheit [m/s]
y_1 = Rhog0*w0*b0^2; %Sjå likning (2.18)
y_2 = w0*b0^2; %Sjå likning (2.18)
y_3 = Rhog0*w0^2*b0^2; %Sjå likning (2.18)
Y0 = [y_1 y_2 y_3]'; %Startvilkår for y1 - y3
xi0 = 0; xiend = (Hp-12)/H; %xi=0 tilsvarar utlaup
%xi=1 tilsvarar havoverflata
%xi=(Hp-12)/H tilsvarar botn av krateret

[xi,Y]=ode45('plumeint',[xi0,xiend],Y0); %ode45 løyser ønskja ODE
%ode45(funksjon,domain,startvilkår)

W = Y(:,3)./Y(:,1); %Sjå likning (2.22)
Rho = Y(:,1)./Y(:,2); %Sjå likning (2.22)
b = sqrt(Y(:,1).*Y(:,2)./Y(:,3)); %Sjå likning (2.22)
R=b(length(b)); %Bereknar plumeradius ved botn av krateret

```

```

%Lagar figur over viddeprofil:
figure (1)
plot(-b,xi*H,'k-',b,xi*H,'k-','LineWidth',2); grid
title('Figur 1: Plumevidde');
xlabel('Avstand frå utlaupssenter [m]');
ylabel('Høgde over utlaupet [m]');

%Lagar figur over hastighetsprofil:
figure (2)
r=-b(end):0.01:b(end);
w=zeros(length(b), length(r));
z=zeros(1,length(b));

parfor iz=1:length(b);
z(iz)=xi(iz)*H;
w(iz,:)=2*W(iz)*exp(-r.^2./b(iz)^2);      %Sjå likning (2.26)
end

contourf(r,z,w,20);colorbar;
title('Figur 2: Vertikal hastighet'); hold on
xlabel('Avstand frå utlaupssenter [m]');
ylabel('Høgde over utlaupet [m]');

%Bereknar total stigetid:

Ti = H*(xi(2:end)-xi(1:end-1))./...      %Sjå likning (2.23)
      (0.5*(W(1:end-1)+W(2:end)));      %Trapezmetoden på kvart subintervall

T=sum(Ti);

```

```

%plumeint
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funksjonen som skal løysast av Runge-Kutta-metoden.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function Ydot = plumeint(xi,Y)
global H k Rho0 Alfa Rhog0 g n Patm P0 mdot c mu D phi0 a

Ydot = zeros(3,1);

phi = phi0 + a*xi; %Porøsitet som funksjon av xi

k= 5.55*10^(-3)*phi^3*D^2/(1-phi)^2; %Permeabilitet som funksjon av xi,
%berekna etter Kozeny-Carman-likninga

P = Patm + Rho0*g*H*(1-xi); %Hydrostatisk trykk
Rhog = Rhog0*(P/P0)^(1/n); %Sjå likning (2.8)
gamma = g*mdot*Rho0/(n*pi*P0*Rhog^(n+1)); %Siste ledd av likning (2.13)
%Nytta Rhog til å skrive meir kompakt

Ydot(1) = 2*H*Alfa*Rho0*sqrt(Y(2)*Y(3)/Y(1)); %Sjå likning (19)
Ydot(2) = 2*H*Alfa*sqrt(Y(2)*Y(3)/Y(1)) + gamma*H; %Sjå likning (20)
Ydot(3) = g*H*phi*(Rho0-Y(1)/Y(2))*Y(1)*Y(2)/Y(3) -... %Sjå likning (21)
c*H*mu/k*phi*Y(2)+2*H*Alfa*Rho0*Y(1)^(-3/2)*Y(2)^(1/2)*Y(3)^(3/2);

```

```

%Plumemod_fit
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tek inn input-parametrane startporøsitet, medrivningskoeffisient,
%porøsitetskoeffisient, konstant radius, volumraten som gjev
%startradius lik ønskja konstant radius og gasskonstant.
%Gjev ut plumeradius ved 1/3, 2/3 og full høgde over utlaupet,
%der desse verdiane kan nyttast av fitnessfunksjonen fit_fun.m
%gjennom den Genetiske Algoritme.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [b_1,b_2,b_3] = Plumemod_fit(phi,alfa,lin_kof,bc,V,n_kof)
global Hp H Rho0 Rhog0 g n Patm P0 mdot c mu D Alfa phi0 a

a = lin_kof; %Porøsitetskoeffisient
g = 9.81; %Tyngdeakslerasjon [m/s^2]
Hp= 250; %Djupn til det porøse laget [m]
Hs=730; %Havdjupn [m]
H=Hs+Hp; %Total djupn [m]
Rho0 = 1025; %Tettleik for sjøvatn [kg/m^3]
Alfa = alfa; %Medrivningskoeffisient for sediment
c = 1.5*10^(-5); %Friksjonskoeffisient
D = 0.2*10^(-5); %Granulatdiameter [m]
mu = 1.8*10^(-5); %Dynamisk viskositet [kg/(m·s)]
Patm = 101325.0; %Trykk ved havoverflata [Pa]
P0 = Patm + Rho0*g*H; %Hydrostatisk trykk ved utlaupet [Pa]
n = n_kof; %Gasskonstant

%Startvilkår:
phi0 = phi; %Startporøsitet for sediment, ved z=0
Rhog0 = 85; %Gasstettleik ved utlaupet [kg/m^3]
b0 = bc; %Utlaupe radius [m]
Vdot = V; %Volumrate ved utlaupet [m^3/s] (P0)
mdot = Rhog0*Vdot; %Masse rate [kg/s]
w0 = Vdot/(pi*b0^2); %Tophat-starthastigheit [m/s]
y_1 = Rhog0*w0*b0^2; %Sjå likning (2.18)
y_2 = w0*b0^2; %Sjå likning (2.18)
y_3 = Rhog0*w0^2*b0^2; %Sjå likning (2.18)
Y0 = [y_1 y_2 y_3]'; %Startvilkår for y1 - y3
xi0 = 0; xiend = (Hp-12)/H; %xi=0 tilsvarar utlaup
%xi=1 tilsvarar havoverflata
%xi=(Hp-12)/H tilsvarar botn av krateret

[xi,Y]=ode45('plumeint',[xi0,xiend],Y0); %ode45 løysar ønskja ODE

W = Y(:,3)./Y(:,1); %Sjå likning (2.22)
Rho = Y(:,1)./Y(:,2); %Sjå likning (2.22)
b = sqrt(Y(:,1).*Y(:,2)./Y(:,3)); %Sjå likning (2.22)
ind_1=length(b);
b_1=b(ind_1); %Gir plumeradius ved botn av krateret
ind_2 = round(ind_1*2/3);
b_2=b(ind_2); %Gir plumeradius ved 2/3 av plumehøgda
ind_3= round(ind_1/3);
b_3=b(ind_3); %Gir plumeradius ved 1/3 av plumehøgda

```

```

%fit_fun.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Tek inn input-parametrane startporøsitet, medrivningskoeffisient,
%porøsitetskoeffisient, konstant radius, volumrate som gjev
%startradius lik ønskja konstant radius og gasskonstant.
%Nyttar Plumemod_fit.m som hjelpemetode og bereknar fitnessverdi
%for kromosoma i den Genetiske Algoritme på ønskja måte.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [fitness] = fit_fun(x)
[r1, r2, r3]= Plumemod_fit(x(1),x(2), x(3), x(4), x(5), x(6));

bc=x(4);

%Definerer ein koeffisient, delta, som er 0 dersom radiusverdiane alle
%enten er større eller mindre enn 'bc' meter og 0.02 dersom dei ikkje er det.
%Ønskjer å premiere løysingar med førstnemnde eigenskap,
%sidan dette vil gje ein mest mogeleg loddrett profil.
delta=0;
if (((bc-r1)*(bc-r2)*(bc-r3)>0 && ((bc-r1)<0 || (bc-r2)<0) ) ||...
    ((bc-r1)*(bc-r2)*(bc-r3)<0 && ((bc-r1)>0 || (bc-r2)>0)) )
    delta=0.02;
end

%Bereknar fitnessverdi som lengda på avviksvektor addert med eit eventuelt
%ekstra ledd som straffar løysingar som gjev avvik med ulikt forteikn.

fitness=((bc-r1)^2+(bc-r2)^2+(bc-r3)^2)^0.5+delta;
end

```

```

%monte_carlo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Matlabskript som køyrer ønskja antal Monte Carlo-simuleringar.
%Dei sensitive parametrane blir trekt frå føreskrivne sannsyns-
%stettleikar, og porøsitetskoeffisienten blir berekna ved hjelp av
%den Genetiske Algoritme. Skriptet gjer ut minimum-,
%maksimum- og middelerverdi samt standardavvik til målingane og lagar
%til slutt eit histogram.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Bestem antal simuleringar
nsamples=10000;

%Set dei ønskja instillingane for den Genetiske Algoritme:
opt = gaoptimset;
opt = gaoptimset(opt, 'PopulationSize', 24);
opt = gaoptimset(opt, 'Display', 'off');
opt = gaoptimset(opt, 'FitnessLimit', 0.08);
opt = gaoptimset(opt, 'Generations', 50);
opt = gaoptimset(opt, 'CrossoverFcn', { @crossoverintermediate 1.0 });
opt = gaoptimset(opt, 'MutationFcn', @mutationadaptfeasible);
opt = gaoptimset(opt, 'EliteCount', 2);
opt = gaoptimset(opt, 'SelectionFcn', @selectionroulette);
opt = gaoptimset(opt, 'PlotFcns', { @gaplotbestf @gaplotbestindiv });
opt = gaoptimset(opt, 'UseParallel', 'always');

tic %Startar tidtaking

a_list=zeros(1,nsamples);

%Initialiserer nyttige parameter
c = 1.5*10^(-5);
D = 0.2*10^(-5);
mu = 1.8*10^(-5);

%Initialiserer prosenttellar
pros=0;

for i=1:nsamples

    Alfa= 0.015+0.005*randn(1); %Trek medrivningskoeffisient
                                %frå ønskja sannsynstettleik
    while Alfa<0 %Forkastar negative verdjar
        Alfa= 0.015+0.005*randn(1);
    end

    phi0= 0.35+0.0025*randn(1); %Trek startporøsitet
                                %frå ønskja sannsynstettleik

    bc=75+5*randn(1); %Trek konstant radius
                     %frå ønskja sannsynstettleik

    n=1+rand(1)*0.8; %Trek gasskonstant
                    %frå ønskja sannsynstettleik

    V = (1025-85)*9.81/c/mu*pi*bc^2*... %Bereknar volumrate ved utlaupet
        5.55*10^(-3)*phi0^3*D^2/(1-phi0)^2; %som gjev ønskja sartradius

```

```

%Finn lineær porøsitetskoeffisient som gjev ønskja profil vha GA
X=ga(@fit_fun,6,[],[],[],[],[phi0,Alfa,0,bc,V,n],[phi0,Alfa,0.2,bc,V,n],[],opt);

%Initialiserer lokal løkkelappar
j=0;

%Dersom GA ikkje har klart å finne ei god nok løysing innan 50 generasjonar,
%blir GA køyrt på nytt, i håp om at nye startkromosom kan gjere det betre.
% Dette er ofte tilfelle.
while fit_fun(X)>0.08

    X=ga(@fit_fun,6,[],[],[],[],[phi0,Alfa,0,bc,V,n],[phi0,Alfa,0.2,bc,V,n],[],opt);

    j=j+1;

%Dersom dette ikkje lukkast på totalt 10 forsøk blir det trekt nye verdiar
%for parameterane etter dei gjevne sannsynstettleikane. Dette skjer
%derimot svært sjeldan, kanskje éin av tusen gangar.
if fit_fun(X)>0.08 && j>9
    Alfa= 0.015+0.005*randn(1);
    phi0= 0.35+0.0025*randn(1);
    bc=75+5*randn(1);
    disp(sprintf('Trekk på nytt for indeks %d',i))
end
V = (1025-85)*9.81/c/mu*pi*bc^2*5.55*10^(-3)*phi0^3*D^2/(1-phi)^2;
end

%Legg inn den berekna porøsitetskoeffisienten i ei liste
a_list(i)=X(3);

%Skriv antal prosent av fullført simulering til skjermen.
%(Forutset her at antal simuleringar er deleleg med 100)
if mod(i,nsamples/100)==0
    pros=pros+1;
    disp(sprintf('%d prosent fullført',pros))
end

if mod(i,500)==0
    save a_list.txt a_list -ascii
end

end

toc

a_min = min(a_list)
a_maks = max(a_list)
a_mean = mean(a_list)
a_std = std(a_list)

hist(a_list,80)

```





# Figurreferansar

Figur 1.1: henta frå (Hovland et al., 2005).

Figur 1.2: henta frå (Hovland og Svensen, 2006).

Figur 1.3: laga ved å setje saman to figurar frå (Holt et al., 2008).

Figur 1.4: henta frå (Hovland og Judd, 2007).

Figur 1.5: laga med utgangspunkt i <http://www.sciencephoto.com/media/9658/enlarge>.

Figur 1.6: henta frå (Chen et al., 2010).

Figur 1.7: henta frå <http://eventconference.sblo.jp/>.

Figur 1.8: laga med utgangspunkt i bilete frå Staoil, funne på [www.sintef.no](http://www.sintef.no).

Figur 3.1: laga med utgangspunkt i bilete frå (Hjelstuen et al., 2009).

Figur 3.2: henta frå (Hovland og Svensen, 2006).

Figur 3.3: henta frå (Hovland og Svensen, 2006).

Figur 3.4: laga med utgangspunkt i bilete funne i (Cathles et al., 2010).

Figur 3.5: henta frå (Hovland, 1989).

Figur 3.6: henta frå (Cathles et al., 2010).

Figur 3.7: laga med utgangspunkt i bilete funne i (Cathles et al., 2010).

Figur 3.8: sett saman bilete frå (Hjelstuen et al., 2009; Plaza-Faverola et al., 2011).

Figur 3.9: henta frå [http://math.lbl.gov/voro++/doc/poster/voro++\\_poster.png](http://math.lbl.gov/voro++/doc/poster/voro++_poster.png).

Figur 4.2: laga med utgangspunkt i [www.online-casinos.com/images/american-wheel.jpg](http://www.online-casinos.com/images/american-wheel.jpg).

Figur 4.5: laga med utgangspunkt i [www.mathworks.com/cmsimages/62009\\_wl\\_pct\\_fig0\\_wl.jpg](http://www.mathworks.com/cmsimages/62009_wl_pct_fig0_wl.jpg).

Figur 6.1: henta frå (Bjørlykke et al., 1989).

Figur 6.2: henta frå (Ramm, 1992).

Figur 6.3: henta frå (Bjørlykke et al., 1989).

Figur 6.5: laga med utgangspunkt i bilete 6.2.

Figurar som er laga sjølv, eller er resultat berekna ved hjelp av Matlab eller Excel, er ikkje lista opp.



# Litteratur

- Aarnes, J.E., Gimse, T. og Lie, K.A. An introduction to the numerics of flow in porous media using Matlab. *Geometrical Modeling, Numerical Simulation, and Optimization: Industrial Mathematics at SINTEF*, side 261–302, 2007.
- Anderson, H.L. Metropolis, Monte Carlo, and the MANIAC. *Los Alamos Science*, side 96–108, 1986.
- Archer, D. Methane hydrate stability and anthropogenic climate change. *Biogeosciences*, 4:521–544, Jul 2007.
- Beaudoin, Y.C. Frozen Heat: A Global Outlook on Methane Gas Hydrates. United Nations Environment Programme (UNEP) Global Outlook on Methane Gas Hydrates, Mai 2011. URL [http://www.netl.doe.gov/technologies/oil-gas/publications/Hydrates/2011Reports/FE0003060\\_SemiAnnOct2010-Mar2011.pdf](http://www.netl.doe.gov/technologies/oil-gas/publications/Hydrates/2011Reports/FE0003060_SemiAnnOct2010-Mar2011.pdf).
- Benson, S.M. og Cole, D.R. CO<sub>2</sub> Sequestration in Deep Sedimentary Formations. *Elements*, 4:325–331, Okt 2008.
- Bindel, D. og Goodman, J. *Principles of Scientific Computing*. New York University, 2009.
- Bjørlykke, K., Ramm, M. og Saigal, G.C. Sandstone diagenesis and porosity modification during basin evolution. *Geiologische Rundschau*, 78(1):243–268, 1989.
- Brekke, H. The tectonic evolution of the Norwegian Sea continental margin, with emphasis on the Vøring and Møre basins. Geological Society of London, 2000.
- Brewer, P., Charter, R., Holder, G., Holditch, S., Johnson, A., Kastner, M., Mahajan, D., Parrish, W., Roberts, H., Ruppel, C., Watkins, S. og Smith, M. The Methane Hydrate Advisory Committee. Report of the Methane Hydrate Advisory Committee on Methane Hydrate Issues and Opportunities Including Assessment of Uncertainty of the Impact of Methane Hydrate on Global Climate Change, Des 2002. URL <http://www.netl.doe.gov/technologies/oil-gas/publications/Hydrates/pdf/CongressReport.pdf>.
- Broecker, W.S. CO<sub>2</sub> Capture and Storage: Possibilities and Perspectives. *Elements*, 4: 295–296, 2008.
- Bruce, W.A. og Rose, W. Evaluation Of Capillary Character In Petroleum Reservoir Rock. *Petroleum Transactions, AIME*, 186:127–142, Mai 1949.
- Cathles, L.M., Su, Z. og Chen, D. The physics of gas chimney and pockmark formation,

- with implications for assessment of seafloor hazards and gas sequestration. *Marine and Petroleum Geology*, 2010.
- Chen, Y., Ussler, W., Hafidason, H., Lepland, A., Rise, L., Hovland, M. og Hjelstuen, B.O. Sources of methane inferred from pore-water  $\delta^{13}\text{C}$ . *Chemical Geology*, 2010.
- Cheney, E.W. og Kincaid, D.R. *Numerical mathematics and computing*. Brooks/Cole Publishing Company, 1985.
- Cook, M.J. An Evaluation of Computational Fluid Dynamics for Modelling Buoyancy-Driven Displacement Ventilation. De Montfort University, Leicester, 1998. URL <http://www.lboro.ac.uk/departments/cv/staff/docs/227/appendices/appb.pdf>.
- Csanady, G.T. *Turbulent Diffusion in the Environment*. Geophysics and Astrophysics Monographs. D. Reidel Publishing Company, 1973.
- Dahle, H. Lecture Notes in Continuum Mechanics. Kompendium i Kontinuumsmekanikk. Universitetet i Bergen, 2010.
- Fanneløp, T. K. og Sjøen, K. Hydrodynamics of underwater blowouts. *Norwegian Maritime Research*, side 17–33, 1980.
- Ferrenberg, A.M., Landau, D.P. og Wong, Y.J. Monte carlo simulations: Hidden errors from “good” random number generators. *Physical Review Letters*, 69:3382–3384, Des 1992.
- Forsyth, P.A. An introduction to computational finance without agonizing pain. *Computer*, (519):1–50, 2011. URL <http://scicom.uwaterloo.ca/~paforsyt/agon.pdf>.
- Førre, M. Perspektiv i fysikk. Universitetsforedrag, 2010.
- Furnes, G. Privat kommunikasjon. Universitetet i Bergen, 2012.
- Gudmestad, O.T. og Hovland, M. Potential influence of gas hydrates on seabed installations. *Natural Gas Hydrates: Occurrence, Distribution, and Detection, Geophysical Monograph Series*, 124:307–315, 2001.
- Hafidason, H. Privat kommunikasjon. Universitetet i Bergen, 2012.
- Hafidason, H., Lien, R., Sejrup, H.P., Forsberg, C. F. og Bryn, P. The dating and morphometry of the Storegga Slide. *Marine and Petroleum Geology*, 22(1–2):123–136, 2005.
- Haupt, R.L. og Haupt, S.E. *Practical genetic algorithms*. John Wiley & Sons, 2004.
- Higuchi, T., Liu, Y. og Yao, X. *Evolvable hardware. Genetic and Evolutionary Computation*. Springer, 2006.
- Hjelstuen, B., Hafidason, H., Sejrup, H. og Nygård, A. Sedimentary and structural control on pockmark development—evidence from the Nyegga pockmark field, NW european margin. *Geo-Marine Letters*, Nov 2009.
- Holt, E., Nygaard, E., Brendsdal, A. og Mærli, A. Statoil Hydro. Granskingsrapport. Intern ulykkesgranskning. Utslipp av oljeholdig vann og tap av injeksjonsbrønn, 2008. URL <http://www.greenpeace.org/norway/Global/norway/p2/other/report/2008/granskingsrapport.pdf>.

- Hovland, M. The formation of pockmarks and their potential influence on offshore construction. *Quarterly Journal of Engineering Geology & Hydrogeology*, 22(2): 131–138, Mai 1989.
- Hovland, M. og Judd, A.G. *Seabed fluid flow: the impact of geology, biology and the marine environment*. Cambridge University Press, 2007.
- Hovland, M. og Svensen, H. Submarine pingoes: Indicators of shallow gas hydrates in a pockmark at Nyegga, Norwegian Sea. *Marine Geology*, side 15–23, 2006.
- Hovland, M., Svensen, H., Forsberg, C.F., Johansen, H., Fichler, C., Fosså, J.H., Jonsson, R. og Rueslåtten, H. Complex pockmarks with carbonate-ridges off mid-Norway: Products of sediment degassing. *Marine Geology*, 218:191–206, 2005.
- IPCC, . Intergovernmental Panel on Climate Change. IPCC Special Report on Carbon dioxide Capture and Storage, 2005. URL <http://www.ipcc-wg3.de/publications/special-reports/.files-images/SRCCS-Chapter5.pdf>.
- Judd, A.G. og Hovland, M. *Seabed fluid flow: the impact of geology, biology and the marine environment*. Graham Trotman, 1988.
- Kaviany, M. *Principles of heat transfer in porous media*. Springer-Verlag, New York :, 1991.
- Koornneef, J., Ramírez, A., Turkenburg, W. og Faaij, A. The environmental impact and risk assessment of CO<sub>2</sub> capture, transport and storage - An evaluation of the knowledge base. *Progress in Energy and Combustion Science*, 38:62–86, 2012.
- Kroese, D.P., Taimre, T. og Botev, Z.I. *Handbook of Monte Carlo*. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- Kundu, P.K. og Cohen, I.M. *Fluid Mechanics Fourth Edition*. Academic Press, 2008.
- Lai, C.A., Dietrich, D.E. og Bowman, M.J. Global warming and the mining of oceanic methane hydrate. *Topics in Catalysis*, 32:95–99, Mar 2005.
- L'Ecuyer, P. Good parameters and implementations for combined multiple recursive random number generators. *Operations Research*, 47(1):159–164, 1999.
- Marsaglia, G. og Tsang, W.W. A Fast, Easily Implemented Method for Sampling from Decreasing or Symmetric Unimodal Density Functions. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 5(2):349–359, Jun 1984.
- Marsaglia, G. og Tsang, W.W. The Ziggurat Method for Generating Random Variables. *Journal of Statistical Software*, 5(8):1–7, Okt 2000.
- Matsumoto, M. og Nishimura, T. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1):3–30, Jan 1998.
- May, D. og Monaghan, J. Can a single bubble sink a ship? *American Journal of Physics*, 71(9):842–849, Sep 2003.
- Mazzini, A., Svensen, H., Hovland, M. og Planke, S. Comparison and implications from strikingly different authigenic carbonates in a Nyegga complex pockmark, G11, Norwegian Sea. *Marine Geology*, 231:89–102, 2006.

- McIver, R.D. Gas hydrates. I Meyer, R.G. og Olson, J.C., *Long term energy resources*, side 713 – 726. Boston, Pitman, 1981.
- Mienert, J., Vanneste, M., Haffidason, H. og Büinz, S. Norwegian margin outer shelf cracking: a consequence of climate-induced gas hydrate dissociation? *International Journal of Earth Sciences (Geologische Rundschau)*, side 207–225, Apr 2010.
- Moler, C. *Numerical Computing with MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- Newman, M.E.J. og Barkema, G.T. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Oxford University Press, 1999.
- Otter, R. og Knudsen, S. Ormen Lange 1999, Long Sample MD99 288. Geotechnical and Geological Report. Norsk Hydro, 2000.
- Pengelly, J. *Monte Carlo Methods*. University of Otago, 2002.
- Pettersen, Ø. *Grunnkurs i Reservoarmekanikk*. Matematisk institutt ved Universitetet i Bergen, 1990.
- Phil, M. Numerical Methods in Chemical Engineering Using the Matlab ODE solvers. Førelingsnotat. University of Cambridge, 2008. URL [http://laser.cheng.cam.ac.uk/wiki/images/e/e5/NumMeth\\_Handout\\_7.pdf](http://laser.cheng.cam.ac.uk/wiki/images/e/e5/NumMeth_Handout_7.pdf).
- Plaza-Faverola, A., Büinz, S. og Mienert, J. Repeated fluid expulsion through sub-seabed chimneys offshore Norway in response to glacial cycles. *Earth and Planetary Science Letters*, 305(3-4):297–308, 2011.
- Quasar, G. *Into the Bermuda Triangle : Pursuing the Truth Behind the World's Greatest Mystery* . International Marine, 2003.
- Ramm, M. Porosity-depth trends in reservoir sandstones: theoretical models related to Jurassic sandstones offshore Norway. *Marine and Petroleum Geology*, 9(5):553–567, Okt 1992.
- Reiche, S., Hjelstuen, B.O. og Haffidason, H. High-resolution seismic stratigraphy, sedimentary processes and the origin of seabed cracks and pockmarks at Nyegga, mid-Norwegian margin. *Marine Geology*, 284:28–39, Mar 2011.
- Rosenthal, J.S. Parallel computing and Monte Carlo algorithms. *East Journal of Theoretical Statistics*, 4:207–236, 2000.
- Rothlauf, F. *Representations for Genetic and Evolutionary Algorithms* . Springer, 2006.
- Sundvor, E., Eldholm, O., Gladchenko, T. P. og Planke, S. Norwegian-Greenland Sea thermal field. *Geological Society, London, Special Publications*, 167(1):397–410, 2000.
- Syswerda, G. Uniform Crossover in Genetic Algorithms. I *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, side 2–9. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1989.
- Taylor, C. *The Kingfisher Science Encyclopedia*. Kingfisher, 2006.
- Thomas, D.B., Luk, W., Leong, P.H.W. og Villasenor, J.D. Gaussian Random Number Generators. *ACM Computing Surveys*, 39(2):1–38, Okt 2007.

- Tian, X. og Benkrid, K. Mersenne Twister Random Number Generation on FPGA, CPU and GPU. *2009 NASA/ESA Conference on Adaptive Hardware and Systems*, side 460 – 464, 2009.
- Turner, J.S. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, 2001.
- Wright, A. Genetic Algorithms for Real Parameter Optimization. I *Foundations of genetic algorithms*, side 205–218. Morgan Kaufmann, 1991.
- Wyllie, M.R.J. og Gregory, A.R. Fluid flow through unconsolidated porous aggregates. *Industrial & Engineering Chemistry*, 47(7):1379–1388, 1955.
- Xu, P. og Yu, B. Developing a new form of permeability and Kozeny–Carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry. *Advances in Water Resources*, 31(1):74–81, 2008.