Misoppfatningar i algebra på ungdomsskulen

- ei diagnostisk tilnærming

Masteroppgåve i matematikkdidaktikk

Anne Berit Hompland

Matematisk institutt

Universitetet i Bergen

1. juni 2012

FORORD

Eg hugsar godt mitt fyrste møte med bokstavar i ein matematikktime. Læraren min skulle hjelpa meg med ei oppgåve eg ikkje fekk til og brukte bokstavar for å uttrykka problemet. Eg veit ikkje lenger kva oppgåva gjekk ut på eller kvifor eg ikkje fekk det til, men eg hugsar godt responsen min på dette nye: ”kva er vitsen med å ha bokstavar i reknestykket?”. Det spørsmålet trur eg ikkje er åleine om å ha stilt, og eg trur det kan vera bakgrunnen for mykje av utfordringane med arbeidet med algebra i skulen. Når ein opplever arbeid utan meining og forståing, er det vanskeleg å finna motivasjon for læring. Som sitatet frå Alexander Kielland sin roman ”Gift” frå 1883 syner, har emnet vore utfordrande i generasjonar:

> ”Marius kunne omsider til nød forstå at x kunne ha forskjellig verdi i de forskjellige eksempler. Men hva man så skulle med dette x? Hvortil alle disse omsvøp – hvorfor jage tavlen ned over stokk og sten efter denne ene ubekjente, når det ikke var annet enn for eksempel 28 – kanskje bare 15? – nei, det kunne lille Marius virkelig ikke begripe.”
>
> (Kielland, 1999, s. 32)

Sjølv om nok den grunnleggande forståinga til tider var manglande, fekk eg etter kvart taket på algebra, og likte det svært godt. Dette, kombinert med eit gruppearbeid om diagnostisk undervising i eit matematikkdidaktikkemne på Universitetet i Bergen, var nok det som fanga interessa mi for temaet. Målet mitt for å skriva ei masteroppgåve har gjennom heile studietida vore å utvikla meg som lærar, og det var difor naturleg å velja eit tema nært knytt opp til undervising.

Eg vil med dette takka Hop ungdomsskule for all velvilje og positive tilbakemeldingar i samband med arbeidet mitt på skulen. Vidare vil eg retta ein takk til min rettleiar, Christoph Kirfel, for tilbakemeldingar og god hjelp undervegs, både i skriveprosessen og i samband med alt forarbeidet.

Bergen, mai 2012

Anne Berit Hompland

SAMANDRAG

Denne oppgåva handlar om elevar i 10.klasse sitt arbeid med algebra. Meir spesifikt har eg tatt utgangspunkt i ei kvalitativ tilnærming for å undersøka misoppfatningane dei har innan emnet. Vidare har eg sett på korleis ein med dette utgangspunktet kan handsama misoppfatningane i undervisinga ved hjelp av diagnostisk arbeidsmetode. Med desse måla for arbeidet valde eg å gjera eigne undersøkingar for å skaffa materiale.

Konstruktivistiske læringsteoriar utgjer det teoretiske rammeverket for oppgåva. Meir spesifikt omhandlar det omgrep som misoppfatningar, diagnostiske oppgåver og diagnostisk undervising. Med dette som bakgrunn har eg tatt utgangspunkt i tidlegare forsking om misoppfatningar innan algebra og nytta det i mine eigne undersøkingar.

Sjølv om det kvalitative aspektet var motivasjonen for å gå i gang med undersøkingane, valde eg å nytta metodetriangulering fordi det gav ei meir heilskapleg tilnærming til det eg ville undersøka. Dei kvalitative delane var intervju med tre elevar og diagnostisk undervising i ei gruppe på 14 elevar. Før dette hadde eg hatt ei kvantitativ kartleggingsprøve på heile 10.trinn. I etterkant gjennomførte eg ein ny kartleggingsprøve på gruppa med 14 elevar.

Resultata, både frå kartleggingsprøvane og intervjua, synte ei elevgruppe med store utfordringar innan algebra, noko som gjenspeglar det både PISA- og TIMSS-undersøkingar frå tidlegare år alt har peika på. Tidlegare dokumenterte misoppfatningar, både frå norske og utanlandske undersøkingar, synte seg hjå desse elevane. I arbeidet med diagnostisk undervising retta eg fokuset direkte inn mot misoppfatningane for om mogeleg å bearbeida dei. Kartleggingsprøva i etterkant synte eit svakt resultat med tanke på forbetringar. Men som drøftinga i samband med dette syner, kan det ha andre orsakar enn akkurat mi tilnærming til diagnostisk arbeid med algebra.

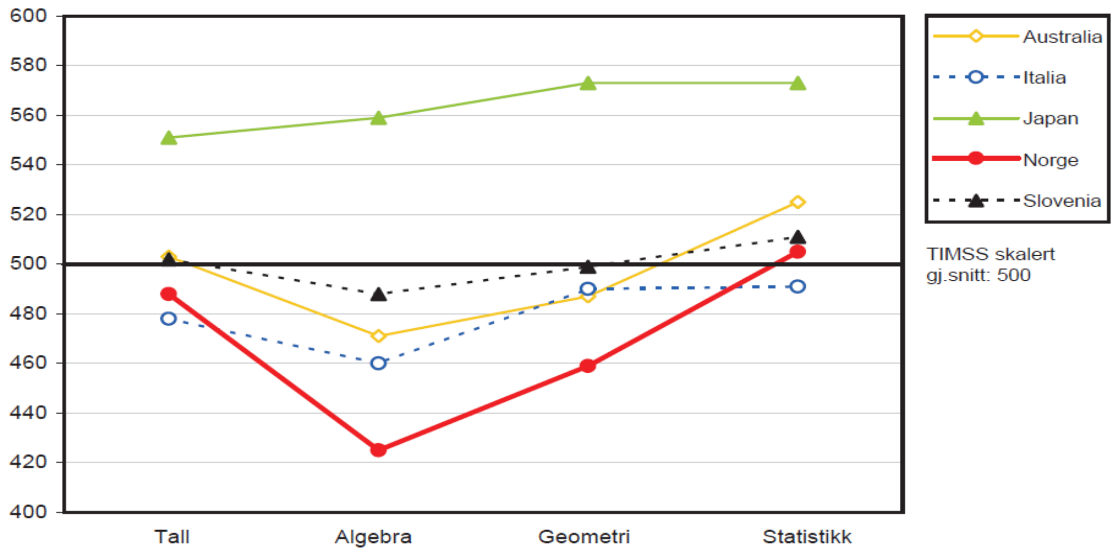
Avslutningsvis peiker eg på tre punkt som eg ser på som hovudutfordringar i arbeidet med misoppfatningar i algebra; det aritmetiske grunnlaget, forståing av bokstavsymbola og elevane sin bruk av intuitive strategiar. Sjølv om utvalet mitt ikkje er stort nok til å seia om dette er generelle tendensar, meiner eg å ha grunnlag for å seia at dette er utfordringar som er viktige for matematikklærarar å kjenna til.

INNHALD

1 INNLEIING

1.1 Bakgrunn

Store internasjonale undersøkingar som PISA[1] og TIMSS[2] har i dei seinare åra gjeve oss verdifull tilbakemelding på korleis stoda er for matematikkfaget i den norske skulen. Medan PISA måler ei meir overordna ”mathematical literacy”, som kan sjåast på som den matematikken elevane treng i daglegliv og samfunn, er TIMSS er basert på læreplanane til dei einskilde landa (Grønmo, 2005). Så sjølv om begge to fortel om trendar i skulematematikken, vil resultata frå TIMSS i større grad gje informasjon om prestasjonar i dei einskilde emneområda frå faget slik oppbygginga er i skulen, slik figuren under syner:



Figur 1.1: Prestasjonar i matematikk på ulike emneområde på 8.trinn. Frå TIMSS 2007. Henta frå Grønmo & Bergem (2009, s.57).

På denne figuren er det tydeleg at algebra peiker seg ut som eit område der norske ungdomsskuleelevar presterer svakt, både i seg sjølv, og samanlikna med andre land. Grønmo

[1] ”Programme for International Student Assessment”, er eit internasjonalt prosjekt i regi av OECD (Organisation for economic cooperation and development). Det blir gjennomført kvart 3. år og har som mål å kartlegga 15-åringar sin kompetanse og dugleikar innan fagområda lesing, matematikk og naturfag. (www.pisa.no)

[2] ”Trends in International Mathematics and Science Study”, er eit internasjonalt forskningsprosjekt om matematikk og naturfag i grunnskulen. Det blir gjennomført kvart 4. år, på elevar på 4. og 8. trinn. (www.timss.no)

& Bergem (2009) meiner at Noreg i lenger tid har nedprioritert dette emneområdet, og at det no er på tide med ein debatt kring denne nedprioriteringa.

I mellom anna PISA- og TIMSS-undersøkingane frå 2003 og i TIMSS 2007 presterte norske elevar svakt òg i emneområdet tal, sjølv om dette har ein framtredande plass i norske læreplanar (Grønmo, 2005). Grunnen til at eg òg trekker fram dette emneområdet, er fordi elevane sine grunnleggande kunnskapar der kan ha innverknad på korleis dei seinare presterer i algebra. Kanskje er det ein slik samanheng som gjer at det er nettopp desse to emneområda norske elevar presterer svakast på i TIMSS 2007?:

> ”Norske elever presterer svakest på områdene *tall* på 4. trinn og *algebra* på 8. trinn. Prestasjonene på disse områdene er markert lavere enn internasjonalt skalert gjennomsnitt.”
>
> (Grønmo & Bergem, 2009, s. 111)

Vidare syner den siste PISA-undersøkinga, frå 2009, at norske elevar presterte relativt sett svakast på oppgåver innan ”talforståing”. Dette er det emnet som dekker tal og algebra (Olsen, 2010).

Med andre ord står den norske skulen ovafor store utfordringar når det gjeld algebra, og dette var ein motivasjon for å arbeida med ei masteroppgåve som omhandlar særskilte problem elevane har på området. PISA- og TIMSS-undersøkingane gav utgangspunkt for mange interessante problemstillingar, og ikkje minst var det mange ulike metodiske tilnærmingar og arbeidsmåtar som kunne vore brukt. For å avgrensa arbeidet valde eg å sjå på algebra med utgangspunkt i ein diagnostisk arbeidsmetode. Vidare har eg valt å nytta mitt eige materiale sidan det gav meg høve til å seia noko meir konkret om stoda på skulen eg samarbeidde med. Ein annan ting som bidrog til at eg ønskte å gjennomføra eigne undersøkingar var at eg var interessert i det kvalitative aspektet ved elevane sitt arbeid med algebra.

1.2 Problemstilling

I arbeidet med oppgåva har eg hatt denne problemstillinga som utgangspunkt:

> *Kva misoppfatningar i matematikk (algebra) kjende frå tidlegare forsking er å finna på 10.trinn og kva er elevane sine eigne tilnærmingar til dei? Korleis kan desse misoppfatningane handsamast ved hjelp av diagnostisk undervising?*

Arbeidet har gått for seg i eit område der det skjer mykje forsking og der det er mange mogelege, interessante innfallsvinklar til emnet. Dermed har eg sett det som naudsynt å gjera visse avgrensingar undervegs for at arbeidet ikkje skal bli for omfattande for ramma av ei 30 studiepoengs masteroppgåve. Mellom anna inneber det at eg har valt å fokusera på dei misoppfatningane som er kjende frå tidlegare forsking, og ikkje eventuelle andre som dukka opp i eigne undersøkingar. Vidare har eg måtta avgrensa kva misoppfatningar eg ville undersøka og enda opp med å velja ut ni tema, sjå avsnitt 2.3.

Undersøkingane mine var gjort på ein skule som har nivådeling i matematikktimane, med 5 som det høgaste og 1 det lågaste meistringsnivået. Når det gjeld gruppa eg har arbeidd med gjennom mesteparten av undersøkingane, var den på meistringsnivå 3. Dette for å ha elevar på eit middels nivå. Med det vona eg å få arbeida med elevar som var eit "representativt utval" av heile trinnet, for slik å kunna svara best mogeleg på problemstillinga. Eg var til dømes ikkje interessert i å knyta undersøkingane opp til matematikkvanskar, noko som kunne vore aktuelt med nivå 1.

Med bruken av ordet ”tilnærmingar” i problemstillinga meiner eg å undersøka korleis elevane arbeider med oppgåvene dei møter i algebra. Med andre ord såg eg på elevane sine strategiar og arbeidsmåtar. Ofte har ikkje elevane reflekterte tankar kring strategiane sine, difor kan korkje orda ”tankar” eller ”strategiar” nyttast for å skildra det eg ville undersøka. Dette var òg ein grunn for å velja eit kvalitativt intervju som metode, fordi eg på den måten vona at tilnærmingane deira skulle koma til syne på ein best mogeleg måte.

1.3 Oppbygging av oppgåva

- **Kapittel 1 – Innleiing**

I denne delen skildrar eg bakgrunnen for val av oppgåva, og ser vidare på problemstillinga og avgrensingar gjort i den samanheng. Deretter gjev eg ein kort oversikt over oppbygginga av oppgåva.

- **Kapittel 2 – Teori**

Teoridelen har to hovuddelar. Avsnitt 2.1 omhandlar algebra, både historisk algebra og ei kort skildring av algebra i skulen. Det neste avsnittet, 2.2, gjev ei innføring i diagnostisk arbeidsmetode. Her ser eg nærare på konstruktivistisk læringsteori som det teoretiske rammeverket. Vidare skildrar eg kva som ligg i omgrepa misoppfatningar, diagnostiske oppgåver og diagnostisk undervising. Til slutt ser eg dei to delane i samanheng, og gjev ei oversikt over mine eigne tilnærmingar til diagnostisk undervising og dei misoppfatningane i algebra som eg undersøkte nærare.

- **Kapittel 3 – Metode**

I dette kapittelet gjev eg ei oversikt over mine metodiske tilnærmingar til undersøkingane; kartleggingsprøvar, intervju og diagnostisk undervising, og grunngjev kvifor eg valde å nytta metodetriangulering. Eg skildrar metodebruken i dei ulike delane av undersøkingane, og vidare korleis analyse og etterarbeid gjekk for seg. Som ei avslutning drøftar eg reliabilitet og validitet.

- **Kapittel 4 – Resultat og analyse**

Dette er hovuddelen med drøfting av funna frå undersøkingane sett i samanheng med litteratur og tidlegare forsking på området. Fyrste delen omhandlar eit utval av misoppfatningane som synte seg på kartleggingsprøva, støtta av elevane sine eigne utsegn på intervjua. I den neste delen skildrar eg korleis eg tok konsekvensane av desse funna, og gjennomførte fire timar med diagnostisk undervising med mål om å fjerna misoppfatningane. Til slutt drøftar eg oppfølgingsprøva, og ser denne i samanheng med dei to føregåande delane, med tanke på om det var mogeleg å sjå forbetringar.

- **Kapittel 5 – Avslutning og oppsummering**

I dette siste kapitlet trekker eg saman trådane frå undersøkingane ut frå problemstillinga. Eg samanfattar resultata frå mi diagnostiske tilnærming til arbeidet med misoppfatningar i algebra i tre punkt. Desse punkta blir utdjupa litt nærare, samstundes som eg peikar på aktuelle utfordringar når det gjeld vidare arbeid med dei. I det siste avsnittet gjev eg ein konklusjon.

2 TEORI

2.1 Algebra

Det fyrste mange tenker når dei høyrer ordet algebra er bokstavrekning (Bergsten m.fl., 2009). Bokstavane og symbola er element som gjer at algebra skil seg frå aritmetikk[3]. Men det er ikkje heile biletet. Sjølve hjartet i arbeidet med algebra er å uttrykka generalitetar (Mason m.fl., 2005). Difor kan algebra seiast å vera eit språk som gjer det mogeleg å presist uttrykka generalitet, og vidare for å kunne resonnera om tala sine eigenskapar (ibid).

> ”Written language is to oral language what algebra is to arithmetics.”
>
> Sitat av Vygotsky i (Brekke m.fl., 2000, s. 7)

I følgje Grønmo & Rosén (1998) er viktige delar av algebra å ha kunnskap om strukturar, forståing av variablar og funksjonar, evne til å handtera symbol og generaliseringar, forståing av inverse og inverterande operasjonar, i tillegg til å kunna formalisera aritmetiske mønster. Omgrepet algebra vil i denne oppgåva bli nytta om algebra slik den framstår i grunnskulen og i den vidaregåande skulen, for på denne måten å skilja det frå den algebraen som blir nytta til dømes på universitetsnivå.

2.1.1 Kort historisk bakgrunn

Ordet algebra kjem frå det arabiske ”al-jabr” som tyder å binda saman (Holme, 2004). Det dukkar opp for fyrste gong i samband med matematikaren Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780 – 850) sitt hovudverk: ”Hisab al-jabr wa-l-al-muqabala” (forkorta tittel). Oversett tyder den fulle tittelen: ”Den konsentrerte boken om regning *(aritmetikk)* ved al-jabr *(binda saman)* og al-muqabala *(setje lik/balansere)*” (ibid). Her ser ein korleis algebra var, og framleis er, knytt til likningar og løysningar av desse. Det som derimot har endra seg er framstillingsmåte og notasjon. Hovudstega i utviklinga fram mot algebra slik me kjenner den i dag kan delast inn i retorisk-, synkopert- og symbolsk algebra.

[3] Aritmetikk: læra om tala sine eigenskapar og metodar til talrekning. Omfattar dei 4 rekneartane; addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, i tillegg til brøkrekning, potensisering, rotutdraging og logaritmerekning. Henta frå: http://snl.no/aritmetikk (24.01.12)

Retorisk algebra var den "opprinnelege" algebraen slik den for det meste var fram mot moderande tid, med unntak av i den indiske kulturen (til dømes Brahmagupta). Ein skildrar problem og løysingar på desse med ord, utan å nytta forkortingar eller symbol (Eves, 1983). Den vidare utviklinga gjekk innom det som blir kalla *synkopert algebra*. I det ligg det at ein nytta symbolske forkortingar for storleikar og operasjonar. Matematikaren Diofantos frå Alexandria som levde i det tredje århundre e.kr., er kjent for å vera den som synkoperte den greske retoriske algebraen. På trass av dette var algebra i hovudsak retorisk i mange hundre år etter dette, og det var ikkje før i det 16. århundre at ein fekk innslag av symbolsk algebra i Vest-Europa. Ein må vidare heilt ut til midten av 1600-talet før ein finn at denne vart veldig utbreidd (ibid).

Med *symbolsk algebra* meiner ein når notasjonen framstår på ein matematisk kortfatta måte med symbol som har lite direkte samanheng med storleikane dei representerer (ibid). François Viète (1540–1603) og Leonhard Euler (1707-1783) var matematikarar med viktige bidrag til utviklinga av den symbolske algebraen. Det er i denne symbolske forma algebra framstår i dag, og det er dette elevane skal få eit innblikk inn i når dei lærer om algebra på skulen.

2.1.2 Algebra i skulen

Grunnlaget for å arbeida med algebra blir lagt i den rekninga med tal som elevane møter heilt frå starten av skuletida. Dersom denne kunnskapen ikkje er tilstade hjå elevane vil møtet med algebra bli ei utfordring. Sjølv om algebra ikkje er eksplisitt formulert i kompetansemåla før på ungdomstrinnet, i hovudområdet "tal og algebra", finnast det likevel spor av algebraisk tenking i matematikken på tidlegare trinn. Eit av kompetansemåla innan hovudområdet "tal" etter 2. årssteget syner dette:

> "Eleven skal kunne kjenne att, samtale om og vidareføre strukturar i enkle mønster av tal."[4]

Sitatet frå kompetansemålet er heilt i tråd med eit syn på overgangen mellom aritmetikk og algebra som i dei seinare åra har utvikla seg. Dette inneber at ein tidleg skal gje næring til elevar si algebraiske tenking, noko som er i strid med det tidlegare rådande synet som sette eit større skilje mellom dei to. Målet er at elevane skal får ei djupare forståing av aritmetikk som

[4] Henta frå udir.no (11.01.2012): http://www.udir.no/Lareplaner/Grep/Modul/?gmid=0&gmi=156340&v=5&s=2&kmsid=29593

vil kunna bidra til at dei seinare i større grad forstår og finn meining i arbeidet med algebra (Carraher m.fl, 2000). Dette er viktig når ein tenker på at dersom elevane ikkje finn meininga i algebraundervisinga og den berre opplevast som abstrakt og vanskeleg, kan det lett gå utover motivasjonen for læring (Bergsten m.fl, 2009).

Tre viktige fasar i arbeidet med algebra kan samanfattast i den såkalla ”algebraiske sykelen”: oversetjing, omskriving og tolking av symboluttrykk. Dersom ein av desse fasane blir prioritert framfor dei andre, misser ein delar av det store biletet. Til dømes blir det i skulen brukt mykje tid på omskrivingar, noko som fører til at meining, forståing og tolking misser fokus, og arbeidet kan opplevast som mekanisk og meiningslaust (ibid).

> ”Access to the original situation which puzzled someone and led to the solution may be missing, yet this is where the potential motivation lies.”
>
> (Mason m.fl., 2005, s. 274).

Ei mogeleg tilnærming for å gjera noko med dette er å arbeida med diagnostisk undervising.

2.2 Å arbeida diagnostisk

Å arbeida diagnostisk kan gjerne sjåast på som å undervisa med utgangspunkt i elevane si forståing av emnet. Fyrste steget er å kartlegga forståing og finna eventuelle misoppfatningar. Deretter må ein finna ut korleis ein best kan ta tak i desse. Målet er at elevar med misoppfatningar skal finna ut at dei treng ei ny og alternativ omgrepsforståing. Som teoretisk rammeverk rundt den diagnostiske undervisinga finn ein konstruktivismen.

2.2.1 Konstruktivistisk læringsteori

> ”Misconceptions arise when students fail to link new knowledge to previous knowledge for which the brain has established cognitive networks. If new knowledge is not anchored to existing networks, to solve new problems, students rely on strategies developed through their experience with similar material.”
>
> (Hiebert & Carpenter (1992) referert i (Russel m.fl., 2009, s. 416))

I dette sitatet er det tydeleg at misoppfatningane blir skildra ut frå eit konstruktivistisk perspektiv, som er ei læringsteoretisk retning med bakgrunn i mellom anna teoriar av Piaget og Bruner. Deira perspektiv kan klassifiserast under kognitiv læringsteori der ein fokuserer på psykiske prosessar som persepsjon, tenking og læring (Hermansen, 2006). Med andre ord er det dei mentale prosessane som er i fokus.

Konstruktivisme har både ei vitskapleg side og ei side som omhandlar læringa hjå individ (Sjøberg, 2009). Eg vel her å fokusera på det siste. I sjølve ordet konstruktivisme ligg det kva læringsteorien går ut på, nemleg at det einskilde mennesket aktivt konstruerer sin eigen kunnskap (Skaalvik & Skaalvik, 2007). Kunnskap er altså noko som blir til i individet i møtet med omgivnadane, og som ikkje minst blir tolka, reflektert over, og sett i samanheng med den kunnskapen individet har frå før. Det vil seia at ein lærar ikkje kan overføra sin kunnskap direkte til elevane utan at elevane aktivt tilpasser den nye kunnskapen til tidlegare lært kunnskap. Konstruktivisme kan dermed sjåast på som ein motsats til behavioristiske læringsteoriar, der dei indre mentale prosessane får lite og inga merksemd (ibid).

Sitatet i byrjinga av avsnittet skildra korleis misoppfatningar oppstår sett i samanheng med dei kognitive nettverka, som er kjenneteikn på den konstruktivistiske tilnærminga til læring. Jean Piaget (1896 – 1980) sin konstruktivistiske læringsteori baserer seg på at alle erfaringane eit menneske gjer blir lagra som mentale representasjonar samanknytt til store nettverk, eller ”skjema”. Når ein elev møter ny lærdom på skulen, er det to ting som kan skje. Anten blir den nye kunnskapen assimilert, tilpassa, til det allereie eksisterande nettverket, eller så må anten den nye kunnskapen eller dei gamle kunnskapsstrukturane endrast. Dette siste blir kalla akkomodasjon (ibid). Denne kunnskapen kan i Piaget sin terminologi skildrast som operativ kunnskap. Motsatsen til dette er figurativ kunnskap som er læring lagra i hukommelsen utan relasjon til større kognitive strukturar (Imsen, 2006). Modning og kognitiv utvikling blir av Piaget sett på som ei føresetnad for læring (Skaalvik & Skaalvik, 2007), der dei ulike modningsstadia fylgjer alderen. Synet hans på læring kan gjerne skildrast som oppdagingslæring (ibid).

Ei motsetnad til dette er formidlingslæring, som David Ausubel (1918 – 2008) kan seiast å vera ein representant for (ibid). Som Piaget ser òg Ausubel på kunnskap som noko som blir konstruert og tilpassa til store strukturar av kunnskap. Der synet deira skil seg er på korleis sjølve undervisinga skal gå for seg. Der Piaget meiner at den nye lærdomen må oppdagast av elevane sjølv, meiner Ausubel at læraren må presentera den systematisk for elevane (ibid).

Dette synet på undervising er meir i tråd med korleis undervisinga i norske klasserom i stor grad blir lagt opp.

Ein anna læringsteori, som òg har eit konstruktivistisk utgangspunkt, er Lev Vygotsky (1896 – 1934) sin sosiokulturelle læringsteori. Dette perspektivet på læring er òg viktig i samband med diagnostisk undervising, fordi den i større grad legg vekt på samspelet med andre. Mediering er her eit viktig omgrep som omfattar språket som ein reiskap mellom stimulering og handling (Imsen, 2006). Vygotsky er kjent for tanken om den næraste og den proksimale utviklingssona. Den fyrste viser kva barnet kan gjera åleine, medan den andre kva barnet kan få til med støtte frå til dømes ein lærar som legg til rette for læring.

> ”Det sentrale er at det foreligger et tankesamarbeid mellom læreren og eleven, det vil si at læreren må fatte elevenes nivå og kunne tenke seg inn i elevens tankeverden.”
>
> (Bråten (1996) referert i Imsen (2006, s. 259))

Her ser ein det viktige i at læraren må prøva å setja seg inn i elevane sine misoppfatningar for å forstå korleis dei tenker. Med eit slikt grunnlag vil ein kunna ta utgangspunkt i elevane sitt nivå, og hjelpa dei over i den proksimale utviklingssona der han eller ho ikkje hadde kome seg på eigenhand. På denne måten kan ein jamført med Piaget sin læringsteori skapa ei kognitiv konflikt, som er eit viktig omgrep innan diagnostisk undervising (sjå avsnitt 2.2.4). Ved ei kognitiv konflikt oppdagar eleven at den nye kunnskapen ikkje stemmer overeins med dei allereie eksisterande kunnskapsstrukturane. I tråd med Piaget sin terminologi vil då ein akkomodasjon skje, og det er då viktig at det er dei gamle kunnskapsstrukturane som blir endra, og ikkje den nye kunnskapen. Samla sett bidreg både Piaget, Ausubel og Vygotsky sine læringsteoriar til å danna eit teoretisk grunnlag for den diagnostiske arbeidsmetoden.

Vidare er konsekvensar av eit konstruktivistisk syn på læring:

- Å leggja til rette for aktivitetar der elevane kan vinna erfaringar dei kan byggja kunnskapen sin på.
- Å gje elevane anledning til å stoppa opp undervegs i arbeidet sitt for å reflektera over det dei har utført, og det dei har lært eller funne ut gjennom dette arbeidet.

(Brekke, 2002, s. 3)

2.2.2 Misoppfatningar

Eit sentralt problem i matematikkundervisinga er å få elevane til å forstå at dei omgrepa og ideane dei har danna seg, ikkje alltid gjeld i alle nye situasjonar:

> ”Et begrep er sjelden fullstendig utviklet ved at en har gjort erfaringer på et avgrenset felt.”
>
> (Botten, 2003, s. 101)

I dette ligg det kva det er som blir kalla misoppfatningar. Det er dei ufullstendige tankane knytte til eit omgrep. Når ein har ufullstendige tankar hender det at ein tenker at det som gjeld i ein situasjon òg vil gjelda i ein annan, noko som ikkje alltid stemmer. Ei slik overgeneralisering kjem gjerne av at ein elev forsøker å sjå meininga eller samanhengen i det han eller ho har lært (Brekke, 2002). Som ein konsekvens av dette får ein ei forståing som ikkje samsvarer med den vitskaplege forståinga av omgrepet.

Ei misoppfatning kan føra til at elevane gjer feil på oppgåver der forståinga deira ikkje strekk til. Ein slik feil er ikkje det same som slurvefeil, feil som kjem på grunn av liten konsentrasjon eller gjetting, men sit enno djupare. Omgrepet må heller ikkje blandast med misforståingar, som òg fører til feil, men som ikkje på same måte gjennomsyrer tenkemåten og forståinga av røynda. Misoppfatningar er ein del av ei forståing eleven har danna seg og denne blir brukt i situasjonar der eleven kan finna meining i den.

Ut frå eit konstruktivistisk perspektiv, der eleven konstruerer sin eigen kunnskap, er det naturleg å anta at misoppfatningane er individuelle. På trass av dette finst det mange misoppfatningar som går igjen både på tvers av alder og landegrenser. Så sjølv om dei oppstår individuelt hjå kvar einskild elev, fins det felleselement i mange av dei. Dette har gjerne å gjera med alle dei felles grunnane som verkar inn på danninga av misoppfatningane, sjå nedanfor.

Det at mykje forsking på området[5] har avdekka slike standardmisoppfatningar, var grunnlaget for undersøkingane i denne oppgåva. Og det er desse standardmisoppfatningane som vil få merksemda i drøftinga av resultata. Å kjenna til slike ”vanlege” misoppfatningar kan vera til

[5] Viser mellom anna til: Booth L. R. (1999), Booth & Koedinger (2008), Brekke, Grønmo & Rosén (2000), Grønmo & Rosén (1998), Russel, O'Dwyer, & Miranda, (2009), Steinle, Gvozdenko, Price, Stacey & Pierce (2009)

hjelp for lærarar når dei skal legga opp undervisinga, slik at ein best mogeleg kan hindra dei i å festa seg.

Eit døme på ei misoppfatning kan vera ei oppfatning om at i eit uttrykk som 2a + 3b, må bokstavane a og b ha ulik numerisk verdi (sjå avsnitt 2.3.7). Her kan eleven ha samanlikna symbola for variablar med bruken av bokstavar i skriftspråket, der kvart symbol har ulik tyding. Dersom ein ikkje kjenner til reglane for det algebraiske symbolsystemet er det naturleg å dra parallellar til andre kjende situasjonar, og overgeneraliseringa er eit faktum.

I tillegg til ein slik analogi til andre symbolsystem, både frå dagleglivet og frå andre delar av matematikken, kan det vera fleire grunnar til at misoppfatningar oppstår. I litteraturen finn ein ulik argumentasjon når det gjeld dette. Küchemann (1981) viser til elevane sine kognitive utviklingsnivå, medan MacGregor & Stacey (1997) meiner andre orsakar ligg bak. Både lærarar og læremateriell kan bidra, ubevisst, til at misoppfatningar oppstår. Sjølve undervisingsmetodane ein brukar kan òg verka inn. Det at det har vore vanleg praksis å skilja mellom aritmetikk og algebra kan nok framleis verka inn på undervisinga. Dette til trass for at det har vore eit skifte mot å fokusera på generaliseringar på tidlegare trinn enn før (Carraher m.fl., 2000), sjå òg avsnitt 2.1.2.

Vidare kan ein peika på elevane sine eigne intuitive antakingar[6] og innblanding frå ny læring i matematikken (ibid). At ny læring frå matematikken verkar inn ser ein tydeleg på eit av elevsvara på oppgåve 2a i kartleggingsprøva der dei skal legga saman 4x og 7x, og eleven skriv svaret som $11x^2$. Eit slikt svar vil ein ikkje finna hjå yngre elevar som ikkje har lært om potensar.

Språket i seg sjølv kan verka inn på korleis elevar handsamar algebra (Stacey & MacGregor, 1997). I det daglegdagse språket byrjar ein å lesa frå venstre til høgre, og det er aldri slik at ein må finna ut kva ein skal lesa fyrst. Overført til matematikken kan dette vera ei kjelde til misoppfatninga om at $5 – 2 \cdot x = 1$ skal handsamast frå venstre mot høgre (sjå avsnitt 2.3.1). I følgje Booth (1981) kan òg språket bidra til misoppfatningar dersom lærar og elev arbeider i kvart sitt "språksystem". Han peikar ei mogeleg kjelde til misoppfatningar ved å visa til Donaldson (1978):

> ”She makes the point that there is a difference between language as a formal system, in which words can be manipulated according to the rules of the system and without

[6] I avsnitt 4.1.2 blir det forklart nærare kva som ligg i dette omgrepet

regard for any relationship to any 'real' event, and language as used to represent things and events that actually occur."

(Donaldson (1978) referert i Booth (1981, s. 35))

Misoppfatninga kjem slik når eleven prøver å gje meining til det formelle systemet (algebra) ved å bruka språk frå daglegtalen.

Misoppfatningar kan hjå mange elevar sitta godt fast og prega tenkemåten deira i ulike greinar av matematikken. Dersom lærarar ikkje tek dei på alvor i undervisinga, med tanke på å fjerna dei, vil konsekvensen bli at dei blir til stabile oppfatningar etter kvart som åra går (Grønmo & Rosén, 1998).

2.2.3 Diagnostiske oppgåver

Diagnostiske oppgåver har som mål å kartlegga elevane sine dugleikar, og eventuelle misoppfatningar, på eit område før ein tek til med undervisinga. Dermed kan dei sjåast på som fyrste steget i arbeidet med diagnostisk undervising. Dei er meint for å gje læraren innsikt i elevane sine tilnærmingar til oppgåvene, altså korleis elevane tenker og kva strategiar dei nyttar. Poenget er ikkje å vurdera elevane, men at det skal vera eit hjelpemiddel til den følgjande undervisinga (Brekke, 2002).

For at ei oppgåve skal fungera diagnostisk må den vera laga slik at elevane ikkje får rett svar tilfeldig dersom dei eigentleg ikkje har forstått omgrepet. Oppgåve 3 i kartleggingstesten hadde som mål å syna om nokon av elevane hadde den misoppfatninga at dei ikkje ville godta opne svar (sjå avsnitt 2.3.9):

3) Legg saman:

a) 3 og 5y Svar:

....

b) x og 7x Svar:

....

Figur 2.2.3.1: Utdrag frå kartleggingsprøva.

Oppgåve a er meir diagnostisk enn oppgåve b, som i utgangspunktet var med som ein motivasjon fordi den for dei fleste opplevast som enklare enn dei andre deloppgåvene. I oppgåve b kan ein ved hjelp av ei objekttolking (sjå avsnitt 2.3.6) få rett svar, medan denne tolkinga vil vera utilstrekkeleg på a (Brekke m.fl, 2000). Her vil mange fyrst koma fram til det rette svaret 3 + 5y, før dei slår det saman til å bli 8y eller liknande.

Diagnostiske oppgåver kan og tilretteleggast for bruk i ei undervisingsøkt, gjerne som eit element i undervisinga som provoserer fram den kognitive konflikta.

2.2.4 Diagnostisk undervising

Diagnostisk undervising skil seg frå tradisjonell undervising med at ein har få aktivitetar retta mot generelle tilfelle, noko som gjev elevane meir fridom til å utforska eigne idear (Birks, 1987). Metoden skil seg vidare ut ved at ein ikkje bygger opp timane stegvis rundt spesialtilfelle som skal leia elevane forbi områda der det er lett å gjera feil (ibid). Derimot skal ein provosera fram feil for å setja elevane i ei kognitiv konflikt. Dette er ein tilstand der elevane opplever avgrensingane kring sine eigne strategiar og tenkemetodar, anten at dei ikkje er tilstrekkelege eller at dei ikkje samsvarar med det dei no møter. Dette kan sjåast på som den destruktive fasen i arbeidet (Brekke, 2002).

Ei kognitiv konflikt er ein måte å få elevane til å bli mentalt aktive på. Ein elev kan vera fysisk tilstade i ein time, og han eller ho kan vera fysisk aktive med løysing av oppgåver, men dette treng ikkje vera det same som at eleven er mentalt aktiv (Birks, 1987). Ein føresetnad for at eleven, i konstruktivistisk terminologi, skal kunna konstruera og reflektera over ny kunnskap, er mental aktivitet og nærver. Som ein konsekvens av dette har ein fokus på bevisstheit for å hindra at elevane arbeider utan å vera medvitne om det dei gjer. Ein etterfølgjande konfliktdiskusjon som stimulerer til refleksjon kring dei motstridande elementa i den kognitive konflikten, er ein måte å rydda misoppfatningane av vegen på (Brekke, 2002). Denne diskusjonen, eller samtalen, kan seiast å vera ei løysingsfase. Og denne skal ideelt sett bidra til å danna nye berekraftige omgrep hjå eleven.

Diagnostisk undervising krev at elevane tek ansvar for eiga forståing. Dessutan må dei vera viljuge til både å uttrykka korleis dei tenker og til å diskutera dette med sine medelevar. Eit slikt fokus på feil og eigne meiningar kan vera sårbart, og det er viktig at elevane ikkje tek det som personlege nederlag å svara feil. Difor bør ein starta eit slikt opplegg med å samtala om det positive i å vera opne om feilsvara sine, fordi det kan føra til læring (Birks, 1987).

Eit mål for diagnostisk undervising er arbeid med læring og danning av solide omgrep på lang sikt. Pugging resulterer gjerne i lærdom som fort forsvinn, medan intensivt arbeid med oppgåver som krev innsikt i emnet gjev vinning i eit større tidsperspektiv (Bell, 1993b). Vidare er det eit poeng at elevane i arbeidet med generelle tilfelle, og ikkje spesialtilfelle, får høve til å uttrykka seg og koma fram til generelle reglar og samanhengar (Birks, 1987). Dette er viktig fordi misoppfatningar gjerne kjem av at elevar prøver å generalisera frå spesialtilfelle.

Avslutningsvis er tilbakemeldingar viktige i dette arbeidet. Dersom eleven har gjort ein feil på ei oppgåve skal han eller ho umiddelbart få kjennskap til det (Bell, 1993b). Dette kan virka som ei stor oppgåve for læraren, men ein del av arbeidsmetodane gjev tilbakemelding i seg sjølv. Døme på dette kan vera klassesamtale, der munnleg tilbakemelding naturleg vil vera ein del av metoden. Elles kan til dømes bruk av spel gjeva umiddelbar tilbakemelding fordi ein ikkje kjem seg vidare med feil svar.

Bell m.fl. (1986) referert i Birks (1987, s. 45) viser eit standardoppsett for diagnostisk undervising:

1. The opening activity, designed to familiarize pupils with the problem context and prepare the way for conflict discussion by presenting them with materials deliberately designed to provoke errors.
2. The conflict discussion where pupils are encouraged to reflect, debate and resolve the inconsistencies revealed by conflicting viewpoints or different sets of answers.
3. Consolidation in the form of a further activity designed to provide pupils with a deeper understanding of the concept and to provide feedback.

2.2.5 Ulike tilnærmingar til arbeid med diagnostisk undervising

Korleis skal eit diagnostisk undervisingsopplegg gjennomførast? Eit svar på dette vil vera avhengig av emne, elevgruppa og ikkje minst av den einskilde læraren sjølv. Ein må finna fram til kva som kan fungera i ulike situasjonar, og som alt anna vil dette gjerne føra til litt prøving og feiling i starten. Ved hjelp av forskingsartiklar og tidlegare arbeid med diagnostisk undervising kan ein få tips til kva som kan fungera. Eg vil nedanfor gje ei kort oversikt over punkta eg i hovudsak nytta meg av:

Kartleggingsprøve

Denne delen er gjerne fyrste steget i arbeidet med diagnostisk undervising. Kartleggingsprøva gjev verdifull informasjon om den einskilde elev si forståing, og vil vera eit naturleg utgangspunkt for å tilpassa undervisinga best mogeleg til klassa. Sidan det alt finst mykje dokumentasjon på mange kollektive misoppfatningar kan dette nyttast som utgangspunkt for å laga kartleggingsprøva. Elles kan både forsking og erfaring i seg sjølv vera utgangspunktet for det vidare arbeidet, utan å gå vegen om å ha ein kartleggingsprøve.

Klassesamtale

Ein slik samtale er ein viktig del av løysingsfasen i det diagnostiske arbeidet. Skal ein klassesamtale kunna fungera diagnostisk er det viktig at elevane er medvitne, og ikkje minst får stimulus nok til å stilla seg spørsmålet: ”kvifor er ikkje mi eiga forklaring tilstrekkeleg?” Ein måte å få dette til på, er ved hjelp av den destruktive fasen, eller den kognitive konflikten (Birks, 1987). Klassesamtalen er styrt av lærar, med utgangspunkt i elevane si forståing, og med mål om å endra omgrepsstrukturen hjå elevane.

Gruppeoppgåver

Elevane i gruppa får ei oppgåve å arbeida med og dei diskuterer seg fram til eit felles svar. I etterkant får kvar gruppe bidra med sine svar i plenum, noko som gjerne blir utgangspunkt for ein konfliktdiskusjon der svara blir utfordra. På denne måten får ein fram svar som representerer ulike syn og oppfatningar, i tillegg til at det er gruppa og ikkje den einskilde som står ”til ansvar” for svaret (Bell m.fl., 1986).

Retting av andre elevar sitt arbeid

Elevane får utdelt både oppgåver og løysingar til desse som er gjort av ein fiktiv elev, men må sjølve finna ut om det er dei rette løysingane som er gjevne. Dessutan må dei grunngje kva som eventuelt er feil. Slike oppgåver vil i følgje Bell m.fl. (1986) gje god mogelegheit for diskusjon og refleksjon. Dessutan kan det vera ein motivasjon for elevar å sjå at andre òg kan gjera feil.

Elevane får utarbeida liste over misoppfatningar

Etter arbeid med ei oppgåve der ei kognitiv konflikt har kome til syne, er elevane klar over at det fins ulike feller å gå i. Dermed er det mogeleg anten individuelt eller i grupper, å skriva ei liste over desse misoppfatningane (Birks, 1987). Ved at elevane får reflektera over mogelege måtar å tenka på som kan resultera i feil svar, vil dei bli meir bevisst på dei, og etter mi meining unngår ein lettare slike i framtida.

Elevane får formulera reglar sjølv

Å formulera eigne reglar er ein av måtane Birks (1987) arbeidde diagnostisk på. Ved at elevane sjølve får formulera reglar får dei eit større eigarforhold til dei enn om dei skulle fått dei forklart av læraren. Igjen kan ein knyta dette til å fremja lærdom ved å vera kognitivt aktiv.

Spel

Denne delen kom i mitt arbeid gjerne i etterkant av ein konfliktdiskusjon for å nytta kunnskapen i andre kontekstar. Slik kan ein til dømes nytta teknikkar i å rekna med variablar som eit middel, og ikkje som eit mål i seg sjølv (Mason m.fl., 2005). Dette er gjerne meir motiverande enn å øva på rekneteknikkar i form av rutineoppgåver. Bell m.fl (1986) peikar på at dersom slike spel er gjennomtenkte inneheld dei element som å sjekka svara, dei kan justerast til elevane sitt nivå og dei fører til repetisjon med variasjon.

2.3 Dei ulike misoppfatningane

Blant dei misoppfatningane eg har valt ut går nokre direkte på algebra medan andre kan seiast å vera meir aritmetiske problem. Grunnen til at eg likevel har dei med i studien er fordi dei to omgrepa aritmetikk og algebra er svært nært samanknytt, og i store delar av litteraturen blir algebra omtala som generalisert aritmetikk (Mason m.fl., 2005). Mellom anna ser ein denne samanhengen i følgjande sitat:

> ”To appreciate the generalization of arithmetical relationships and procedures, requires first that those relationships and procedures be apprehended within the arithmetical context.”
>
> (Booth, 1999, s. 304).

Dersom ikkje dei aritmetiske misoppfatningane blir tekne på alvor, kan dei føra til problem i algebra på eit seinare tidspunkt (ibid), og av denne grunn ser eg på dei som viktige. Eg har i hovudsak valt å avgrensa skildringane til å omfatta sjølve misoppfatningane og legg mest vekt på dei som hadde fokus gjennom heile prosjektet. For meir om bakgrunnen for misoppfatningane viser eg til avsnitt 2.2.2 og meir detaljerte skildringar i annan litteratur, til dømes: Booth (1999), Küchemann (1981), Stacey & MacGregor (1997) og MacGregor & Stacey (1997).

2.3.1 Prioriteringsproblem

Dette er eit problem som gjerne syner seg best i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Brekke m.fl. (2000) knyter dette, saman med forståinga av likskapsteiknet, til det som blir kalla prealgebra. Med andre ord er det noko som må vera tilstades for å bygga algebralæringa på ein fruktbar måte. Nærare bestemt vil det i samband med innføring av variablar skapa eit problem når elevane ikkje veit korleis dei skal prioritera rekkefølgja for ein rekneoperasjon. Spesielt vil det bli vanskelegare å sjå kor ein har gjort feil med variablane når det er prioriteringa av rekneoperasjonane som er utfordringa (Brekke, m.fl., 2000).

Sjølv om dette gjerne er eit meir aritmetisk problem, må det seiast å vera eit viktig grunnlag for emnet. I KIM-undersøkinga[7] sin algebradel inkluderte ein ei slik oppgåve i starten av oppgåvesettet fordi det syner elevane sine kunnskapar og dugleikar knytte til rekkefølgja på rekneoperasjonane. Dette vart grunngjeve med at denne kunnskapen er grunnleggande for den seinare utviklinga til rekning med prosedyrer og generalitet, som jo er kjenneteikn på algebra (Grønmo & Rosén, 1998).

Spesielt valde eg å fokusera på to kjelder til prioriteringsproblem i oppgåve 5 og 6 på kartleggingsprøva, nærare bestemt bruken av parentesar og det at ein løyser uttrykka frå venstre mot høgre. Bruken av parentesar kan sjåast på som ”the main stumbling block of algebraic fluency” (Mason m.fl, 2005, s. 143). Kieran (1979), referert til i Küchemann (1981), meiner at mange elevar aldri har forstått kvifor det er så viktig å bruka parentesar. Dermed vil alternative strategiar syna seg, som til dømes å ignorera dei (Booth, 1999). Om feil bruk av parentesar kan sjåast på som ei misoppfatning, eller som utilstrekkelege kunnskapar på området, kan diskuterast[8].

Den andre kjelda som fekk fokus i denne samanhengen, er at mange elevar meiner at den skrivne rekkefølgja av operasjonane, bestemmer rekkefølgja dei skal løysast på (ibid). Dette har samanheng med at dei ikkje veit at nokre rekneoperasjonar skal prioriterast framfor andre (Grønmo & Rosén, 1998).

2.3.2 Likskapssymbolet som ein kommando

Elevane møter sjølve likskapssymbolet lenge før dei lærer algebra, og nettopp grunnlaget som blir lagt der verkar inn på korleis dei seinare møter algebraiske problem.

> ”[…] This answer is consistent with the misconception that the purpose of the equals sign is to show the answer to the problem rather than to show that the expressions on either side are equivalent.”
>
> (Booth & Koedinger, 2008, s. 575)

[7] Kvalitet i matematikkundervisinga. Prosjektet vart starta opp i 1993, og gjennomført av Telemarkforsking – Notodden, og Institutt for lærarutdanning og skoleutvikling ved UiO.

[8] ”Alle teller!”, av Alistair McIntosh er ei handbok om misoppfatningar innan tal og talforståing. På side 70 – 71 meiner han at feil på grunn av parentesar heller skjer ved oversjåingar eller at eleven ikkje hugsar regelen.

Booth & Koedinger (2008) viser i sitatet til tidlegare forsking (Knuth et al., 2006), der det kjem fram at forståinga av likskapssymbolet er avgjerande for algebraisk problemløysing, og vidare at dette er særskilt utfordrande for elevar som er i overgangen mellom aritmetikk og algebra. Russel m.fl (2009) peiker på fleire døme frå forsking korleis likskapssymbolet blir assosiert med ein kommando om noko som skal utførast. På denne måten vil symbolet hjå mange elevar få tolkninga ”gir” eller ”blir”, i staden for ”er like mykje som”[9,10]. Til dømes vil uttrykk som 5=5 vera problematiske, fordi det ikkje involverer ein operasjon. Andre ”problem” kan vera 5 = 3x + 2x, fordi då står ”svaret” ferdig på venstre sida, der ein er vant med at reknestykket står.

Med slike misoppfatningar kan elevar få vanskar med å forstå at når ein adderer eller subtraherer same mengde frå begge sider i ein likskap, gjeld likskapen framleis. Hadde ein derimot sett på likskapsteiknet som ”er like mykje som”, ville ein kunna tolka det til at likskapen kan lesast både frå høgre og venstre (Bergsten m.fl., 2009). Dette er heilt naudsynt kunnskap for å kunna løysa likningar.

2.3.3 Handsaming av negative tal

Når ein arbeider med algebra er det viktig med omgrepsforståing av mellom anna variablar, likskapssymbol og teiknet for negative tal. Då må ein ikkje berre kjenne att desse, men og vita korleis dei verkar inn på heile likninga, noko som er nøkkelen til å læra seg algebraisk problemløysing (Booth & Koedinger, 2008).

Sjølve misoppfatninga i denne samanhengen er formulert av Booth & Koedinger (2008) ut frå deira undersøkingar; negative tal kan koma og gå i likningar utan konsekvensar, og samanhengen deira med tal og variablar ikkje er signifikante. Til dømes kan ein tenka at uttrykka 5 – 2y er det same som 5 + 2y, sidan strukturen i dei er så like.

---

[9] Sjå óg Stacey og MacGregor (1997, s.112)
[10] Innan til dømes programmering har ein teke konsekvensane av denne skilnaden, og innført ein skilnad mellom når ein brukar likskapsteiknet som kommando, og som sjølve likskapen

2.3.4 Bokstavar og naturlege tal

Ei anna misoppfatning er at bokstavane i algebra berre kan stå for naturlege tal[11,12]. Spesielt syner dette seg i samband med bruk av uformelle, intuitive strategiar frå aritmetikken (Booth, 1999). Med andre ord prøving og feiling. Booth viser til døme der ein elev løyste $\frac{30}{x} = 6$, men hadde problem med $\frac{4}{x} = 3$, fordi eleven i siste dømet ikkje kunne prøva seg fram med heiltal.

2.3.5 Divisjon er kommutativt

Dette er òg ei misoppfatning som går på aritmetisk struktur, men for å legga eit godt grunnlag for algebra er det viktig med forståing av at divisjon ikkje er kommutativt. Sidan addisjon og multiplikasjon er kommutative er vegen kort til å anta at divisjon òg er det. Dersom elevane i tillegg tenker at det største talet alltid skal delast på det minste, er misoppfatninga til stade. Men det er viktig at dei kan skilja mellom $\frac{a}{b}$ og $\frac{b}{a}$. (Booth, 1999).

2.3.6 Bokstavar som forkortingar for objekt

> ”Algebraisk tenking er mulig uten bokstaver, men bokstavene gjør det mulig å nå lengre og håndtere mer komplekse problemstillinger.”
>
> (Rinvold, 2010, s. 7)

Bruken av bokstavar i algebra fører med seg misoppfatningar, mellom anna i form av å nytta ei ikkje-numerisk tolking som det å sjå på bokstaven som objekt. Küchemann (1981) skriv at dette er ein måte for elevane å endra noko abstrakt til å bli meir verkeleg og konkret. Dette blir og støtta av Brekke m.fl. (2000) som peiker på at slike idear blir forsterka dersom ein i undervisinga prøver å konkretisera innhaldet i samantrekningsreglar, ved å til dømes bruka det Mason m.fl (2005) refererer til som ”fruktsalatalgebra”. Objekttenkinga fungerer greitt for mange elevar så lenge ein har uttrykk som 2a + 3a = 5a, fordi den då kan forklarast med at Per har to appelsinar, han får 3 til, og tilslutt har 5 appelsinar. Problemet vil oppstå når ein kjem

[11] Positive heiltal (1,2, 3…)
[12] Algebra: Some Common Misconceptions. Henta frå: http://www.learnquebec.ca/export/sites/learn/en/content/curriculum/mst/documents/algemisc.pdf (09.01.12)

til uttrykk som 3a·2b = 6ab. Då strekk ikkje ”fruktsalatforklaringa” til lenger (Grønmo & Rosén, 1998).

Ikkje berre blir bokstavane ”oversett” til konkrete objekt, men ein har òg at bokstaven blir sett på som eit objekt i seg sjølv. Til dømes kan ”a” vera sjølve objektet, eller til og med nokre gonger er ”2a” eit uavhengig objekt (Brekke m.fl., 2000). Küchemann (1981) meiner at dette er ein strategi som gjer at eleven kan unngå å sjå på bokstaven som ein spesifikk ukjent.

> ”However, wrongly interpreting an algebraic letter as the name of an object is a well-known and serious obstacle to writing expressions and equations in certain contexts.”
>
> (Stacey & MacGregor, 1997, s. 16)

2.3.7 Ulike bokstavar tyder ulike tal

Formuleringa ”different letter means different number” er henta frå Steinle m.fl. (2009, s.492), og er ei numerisk misoppfatning som omhandlar manglande forståing av kva bokstaven står for. Ein elev vil til dømes i tolkinga av likskapen A + B + C = A + D + C, seia at denne aldri stemmer fordi ulik bokstav må stå for ulikt tal (ibid). Men ein bokstav i algebra er kjenneteikna ved at den symboliserer ein variabel, altså eit vilkårleg tal. Elevar med denne misoppfatninga har enno ikkje forstått variabelomgrepet og tolkar i staden bokstaven som ein spesifikk ukjent (Küchemann, 1981).

2.3.8 Rekning utan variabel

Rekning utan variabel vil kort sagt seia at elevane overser variabelen når dei reknar med eit algebraisk uttrykk. Til dømes kan dette visa seg ved addering av 3x + 7y, der elevane fyrst vil rekna 3+7=10, og så legga til x og y etterpå. På denne måten blir svaret 10xy (Grønmo & Rosén, 1998). Dette svaret har nok òg samanheng med at elevane ikkje vil akseptera 3x + 7y som eit fullstendig svar, sjå avsnitt 2.3.9. At dette er ei utbreidd misoppfatning blir òg støtta av Küchemann (1981) og Steinle m.fl (2009).

Misoppfatninga har nær samanheng med, og har i mange tilfelle blitt blanda saman med ein annan misoppfatning, nemleg at variabelen blir sett til 1 (MacGregor & Stacey, 1997). Det kan vera vanskeleg å skilja mellom desse to, spesielt når elevar ikkje alltid viser korleis dei har tenkt for å koma fram til svaret. Av denne grunn har eg her valt å sjå dei under eitt.

2.3.9 Handsaming av opne svar

> ”I arbeidet med oppgåver i algebra får elevane ofte opne svar, til dømes a + 7. Skal eit slikt svar gje meining, må elevane vera fortrulege med oppfatninga av likeverd, elles kan likskapar som 7x + 11 = 13x – 19 vanskeleg få eit meiningsinnhald.”
>
> (Brekke m.fl, 2000, s. 8)

Her ser ein korleis forståing av algebra krev eit godt aritmetisk grunnlag, som mellom anna gjeld for misoppfatninga der elevane ikkje godtek opne svar. Frå aritmetikken er elevane kjende med numeriske svar med eit ledd. Dette er noko som kan forklara kvifor mange forkortar svaret dei har kome fram til, og til dømes let 2 + 5b bli 7b (Booth, 1999).

Det blir vidare i same artikkel peika på ein studie frå 1975 (Collis, 1975, referert til i Booth, 1999) der det blir uttrykt at ei slik misoppfatning kan ha samanheng med manglande forståing for at eit algebraisk uttrykk har fleire hensikter. For ei av utfordringane med algebraiske uttrykk, som verkar inn på at denne misoppfatninga set seg hjå mange, kan ha bakgrunn i det som blir kalla ”the name-process dilemma” (ibid). Det same blir og skildra i anna litteratur:

> ”In algebra, it is vital to be aware of the triple nature of any expression of generality: as an expression of generality, as the process of calculating the result, and the result itself.”
>
> (Mason m.fl., 2005, s. 49)

3 METODE

3.1 Val av metode

Ein metode kan sjåast på som ein planmessig framgangsmåte for å nå målet ein har sett seg (Grønmo, 2004). Kva metode ein vel er dermed avhengig av kva som er målet med studien.

3.1.1 Kvantitative og kvalitative metodar

Når ein nyttar kvantitative metodar er ein interesserte i å svara på spørsmålet ”kor mykje av ein slags?” (Kvale & Brinkmann, 2009). Med andre ord er målet i ei slik undersøking å visa oversikt og breidde, noko som gjerne blir framstilt i form av statistiske oversyn. Kvalitative metodar, på andre sida, svarar på ”kva slags?” (ibid). Når ein arbeider kvalitativt er ein oppteken av å få større innsikt og går dermed djupare enn ein gjer i ei kvantitativ undersøking.

3.1.2 Metodetriangulering

I mitt tilfelle fann eg det mest hensiktsmessig med innslag av både kvalitativ og kvantitativ metode, det som i litteraturen blir kalla metodetriangulering (Grønmo, 2004). På denne måten kan noko bli studert frå fleire ulike synsvinklar samstundes. Grønmo (2004) peiker på fordelar med dette, mellom anna at det bidrar til eit meir allsidig og nyansert lys på fenomena ein forskar på, i tillegg til at det kan bidra til å styrka tilliten til både metodane og resultata i ei studie. Skulle kvalitativ metode åleine vore brukt i mitt tilfelle måtte det på førehand ha vore klart kva som var viktige utfordringar å ta tak i. Og dersom kvantitativ metode skulle vore det einaste fokuset måtte målet for studien vore meir i retning av å gje ei statistisk oversikt over misoppfatningane blant dei undersøkte elevane.

Målet i min studie var å arbeida med diagnostisk undervising med bakgrunn i elevane sine misoppfatningar. For å kunna ta til med dette arbeidet var det naudsynt med ei oversikt over kva som var viktig å ta tak i. Bruk av kvantitativ metode var då naturleg fordi det gav meg eit overblikk over dei tilstadeverande misoppfatningane. Dette vart gjort i form av ei kartleggingsprøve på heile 10.trinn. Då eg vidare skulle studera dei misoppfatningane som peika seg mest ut, ville eg ha ei djupare forståing av desse, og dermed vart kvalitativ metode valt. Denne delen omfatta intervju og fire undervisingstimar. Deretter hadde eg ein ny kvantitativ test i etterkant av undervisinga som samanlikningsgrunnlag før og etter.

På denne måten meiner eg å seia at metodetriangulering var det beste alternativet i min situasjon og med mine forskingsmål, fordi eg på den måten fekk fylgja elevane gjennom både prøvar, intervju og undervisingstimar. Dette gjorde at eg fekk rikare informasjon enn eg gjerne ville fått ved val av anten kvalitativ eller kvantitativ metode åleine.

3.2 Utval og innhenting av data

Alle data vart samla inn hausten 2011 ved Hop ungdomsskole i Bergen. Dette er ein skule som har nivådelt matematikkundervisinga i fem ulike nivå som ein del av den tilpassa opplæringa. Meistringsnivå 5 er det høgaste og 1 er det lågaste. I veke 39 gjennomførte eg ein kartleggingsprøve på heile 10.trinn. Til saman blei dette 157 prøvar. I mitt vidare arbeid; intervju, undervising og ny prøve, konsentrerte eg meg om ei gruppe på 14 elevar på meistringsnivå 3. Eg valde dette nivået for å korkje ha dei aller flinkaste eller dei svakaste elevane, og tenkte i utgangspunktet at det var meir å finna på eit middels nivå.

3.2.1 Kartleggingsprøve

> ”It is only by asking the right, probing questions that we discover deep misconceptions, and only by knowing which misconceptions are likely do we know which questions are worth asking.”
>
> (Swan (1983) referert til i Steinle m.fl. (2009, s. 497))

Sitatet ovafor viser kor viktig bakgrunnskunnskapen er for å nå det målet ein har sett seg. Med dette i bakhovudet vart kartleggingsprøva laga ut frå det eg alt hadde lese om vanlege misoppfatningar i algebra. Kvar av oppgåvene var strukturert slik at ei allereie kjent misoppfatning vart undersøkt i kvar av dei, sjølv om det i ettertid viste seg at fleire misoppfatningar kom til syne i ei og same oppgåve.

Eg meiner å kunna seia at ei slik kartleggingsprøve vil kunna gje grunnlag for både ei kvantitativ og ei kvalitativ analyse. Ei kvalitativ analyse vil til dømes gå djupt inn på elevsvara og drøfta desse, saman med mogelege bakgrunnar for problemet. Dette kunne vore ein aktuell framgangsmåte for meg, men sidan eg på dette tidspunktet hovudsakleg var interessert i å læra meir om kva type misoppfatningar som var utbreidd, valde eg ei kvantitativ analyse som gav meg ei oversikt over kven og kor mange som hadde desse. Når eg seinare arbeidde med elevane sine tilnærmingar til oppgåvene, såg eg meir på det kvalitative innhaldet i prøva.

For at elevane skulle få vera anonyme skreiv dei ikkje namna sine på prøvane. Av praktiske orsakar gjaldt ikkje dette for den vesle gruppa eg arbeidde vidare med. For å vita kven som var aktuelle å intervjua, var det naudsynt at dei skreiv namna sine på prøvane. Dessutan valde eg å heller ikkje gjera oppfølgingsprøva anonym for dei same elevane, slik at eg hadde mogelegheit for å kunna sjå på utviklinga til den einskilde eleven frå kartleggingsprøve til oppfølgingsprøve.

3.2.2 Intervju

Eit intervju er ein samtale mellom to eller fleire personar der målet for samspelet er å konstruera kunnskap. Det er altså to viktige aspekt i ein slik samtale; menneskeleg interaksjon og kunnskapsproduksjon (Kvale & Brinkmann, 2009). Mi hensikt med å ha intervju var for å forstå elevane sine måtar å tenka på då dei løyste utvalde oppgåver på kartleggingsprøva, både der dei hadde svara rett og der dei svara feil.

Her hadde eg valet mellom å få kvalitative data ved uformell intervjuing, og kvantitative data ved strukturert utspørjing (Grønmo, 2004). Ved bruk av den kvantitative tilnærminga er det viktig at ein på førehand veit kva spørsmål som skal stillast, og ein kan på førehand formulera aktuelle svar. Dette blir samla i eit spørjeskjema som anten informantane fyller ut sjølv, eller alternativt at intervjuar stiller spørsmåla og fyller ut skjemaet (ibid).

Det uformelle intervjuet er på andre sida kjenneteikna ved at intervjuar på førehand har klart tema, medan sjølve utspørjinga går for seg på ein fleksibel måte. På denne måten vil retninga på intervjusamtalen bli påverka av kva svar informanten kjem med og korleis intervjuar tolkar desse. For i eit slikt intervju søker ein å forstå verda frå dei intervjua si side (Kvale & Brinkmann, 2009). Intervjuet kan dermed ikkje planleggast i detalj på førehand, slik som ved strukturert utspørjing, noko som òg vil syna seg i intervjuguiden. Kvale & Brinkmann (2009) omtalar ein intervjuguide til semistrukturert intervju, som tilsvarer uformelt intervju, som ein som sirklar inn bestemte tema, og som inneheld forslag til spørsmål.

Sidan eg vanskeleg kunne formulera aktuelle svar for elevane på førehand, og heller ikkje visste kva dei eventuelt ville svara, valde eg å nytta det uformelle intervjuet for slik å få innsikt i tenkemåten deira. Skulle det kvantitative perspektivet vore nytta måtte eg hatt klart for meg aktuelle forklaringar på misoppfatningane, og då kunne målet mitt til dømes vore å undersøka kor utbreidde desse einskilde forklaringane var.

Veka etter kartleggingsprøva hadde eg ein individuell samtale med tre av elevane frå gruppa mi, med varigheit på i underkant av 15 minutt. Desse var plukka ut frå kva dei hadde svara på prøva, og kva som verka å vera mest problematisk for heile gruppa. Det var ikkje så mange som hadde levert inn tilbakemelding på at dei var viljuge til å bli intervjua, men eg fann det eg trengte hjå dei eg hadde til rådigheit. Under intervjua nytta eg diktafon til å ta opp samtalane for slik å kunna ha fullt fokus på å vera tilstade som intervjuar.

Intervjuguiden min inneheldt generelle spørsmål for å få informanten i gong, og forslag til oppfølgingsspørsmål. Dei generelle spørsmåla kan klassifiserast som introduksjonsspørsmål (Kvale & Brinkmann, 2009). Vidare hadde eg for kvar informant eit tema eg ønska å fokusera på, og oppgåver knytte til desse. I samband med det uformelle intervjuet er oppfølgingsspørsmåla viktige. Dei er viktige både for at intervjuar skal vera ein aktiv lyttar, og fordi det gjer det mogeleg for intervjuar å leia samtalen mot å svara på forskingsspørsmåla sine (ibid). Med ein slik intervjuguide var eg fri til å gå der dei interessante utsegna var, samstundes som eg hadde retningslinjer for å halda fokus på det som var målet.

I all forsking er det viktig å ha fokus på etikk, men kanskje spesielt bør ein ha fokus på dette når det gjeld intervju, fordi ein då er i direkte konktakt med informantane. Ein kan peika på mange punkt der etikken spelar inn, men spesielt tre av desse var i mitt fokus i samband med intervjua. Dette var informert samtykke, konfidensialitet, og ikkje minst rolla til forskaren, med det assymetriske forhold mellom intervjuar og informant (ibid).

Det informerte samtykket, og informasjonen gjeve til både elevar og føresette i den samanheng, var viktig for at elevane skulle vita kva dei eventuelt svara ja til å vera med på. Det fungerte som ei slags kontrakt mellom meg som intervjuar og elevane som informantar slik at begge partar visste kva dei hadde å halda seg til. Studien vart 07.06.2011 meldt til personvernombodet for forsking, Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste A/S (NSD). Dei godkjente både prosjektet og informasjonen elevane skulle få. I eit intervju er vidare konfidensialitet viktig av omsyn til informasjonen informantane kjem med. Dette vart og avklara med NSD på førehand og forklart til elevane i informasjonsskrivet, sjå vedlegg 7.1.1.

Med det assymetriske forholdet mellom meg som intervjuar, og elevane, tenkte eg særskild på at eg sat inne med mykje meir kunnskap på området enn dei. Under intervjua fokuserte eg difor på å prøva å ikkje stilla leiande spørsmål, men å la kunnskapen og bidraga frå elevane koma fram mest mogeleg upåverka av mine innspel. Dette viste seg å vera utfordrande, noko som gjerne òg syner seg i transkripsjonane.

3.2.3 Tiltak i klasserommet

I veke 42 – 44 hadde eg fire timar i algebra med dei 14 elevane på meistringsnivå 3, der dei ulike temaa var:

1. Parentesar og prioriteringar
2. Likskapssymbolet
3. Forståing av den variable
4. Å rekna med variablar

I timane brukte eg ei diagnostisk tilnærming, og tok utgangspunkt i misoppfatningar frå kartleggingsprøva. Dei vart valt ut på bakgrunn av resultat frå kartleggingsprøva, kombinert med kva eg sjølve såg på som viktig.

I denne delen føregjekk arbeidet slik at eg underviste elevane. Målet her var at kunnskap skulle bli konstruert i samspelet mellom lærar og elev, og mellom elev og elev. For å dokumentera timane skreiv eg ein logg rett etterpå, som eg prøvde å få så detaljert som mogeleg. På denne måten fekk eg dokumentert viktige punkt som kom fram i løpet av timen. Andre mogelege dokumentasjonsmetodar kunne vore å få ein annan person til å observera og ta notat, eller installera eit kamera for å filma timane. Ein slik ekstra person hadde eg ikkje tilgjengeleg, difor vart dette utelukka. Filming kunne vore eit aktuelt alternativ, men sidan det ville ført med seg eit veldig omfattande etterarbeid, var det på grunn av omfanget av forskinga mi mest aktuelt med bruk av logg.

3.2.4 Oppfølgingsprøve

Veka etter, veke 45, gjennomførte dei same 14 elevane ei ny prøve. Denne likna på kartleggingsprøva, men hadde små justeringar, og omhandla dessutan berre dei misoppfatningane eg hadde fokusert på i timane mine. Målet med denne var å sjå om undervisinga hadde hatt nokon resultatmessige innverknadar på elevane sine misoppfatningar. Og vidare for å ha eit grunnlag for å undersøka om det var spesielle utfordringar som hadde peika seg ut gjennom heile prosjektet.

Eg meiner det er grunnlag for å samanlikna denne med kartleggingsprøva trass i at oppgåvene på dei to prøvane ikkje var heilt identiske. Grunnen til dette er at strukturen i oppgåvene er samsvarande. Eg vil dermed påstå at ein kan samanlikna dei dersom ein samstundes tek atterhald om ulikskapane frå oppgåve til oppgåve. Sjølv om eg kunne ha brukt dei same oppgåvene i begge prøvane valde eg å ikkje gjera det slik, men å heller endra litt på innhaldet. I Küchemann (1981) sine undersøkingar peikar han på to fundamentale kriterium som påverkar elevsvara, nemleg den strukturelle kompleksiteten på oppgåvene, og dei ulike elementa i oppgåvene (tal, variablar osv). Ut frå dette tenker eg at dei same misoppfatningane mest sannsynleg vil syna seg i same grad så lenge desse to krava blir møtt tilsvarande i dei to prøvane. Det skal seiast at det i etterkant synte seg at eg ikkje var godt nok førebudd på korleis elevane på ulikt vis tolka element eg tenkte var samsvarande, noko som påverka svara dei gav. Sjå avsnitta 4.1.4 og 4.3.1 for meir utdjuping angåande dette.

3.3 Etterarbeid og analyse av data

Det som i følgje Grønmo (2004) pregar analyse av kvalitative data, er at dei blir analysert etterkvart som dei blir samla inn. På denne måten er analysen ein prosess som går for seg parallelt med undersøkingane, men som tek meir og meir over. Sjølv om ikkje heile studien min utelukkande var kvalitativ, var det likevel naturleg at analysen kom inn tidleg, fordi den utgjorde grunnlaget for ein del val som måtte takast. Dessutan vil dei tankane ein på førehand gjer seg opp om målet for analysen prega måten arbeidet blir utført på undervegs, og ikkje minst prega val av metode (Kvale & Brinkmann, 2009).

Kartleggingsprøva vart analysert i løpet av dei påfølgjande dagane. Sidan fokuset der var av det kvantitative slaget, strukturerte eg svara i tabellar. For kvart svar kryssa eg ut for kor mange som hadde svara slik, og gav stundom korte kommentarar som forklara svaret. Dessutan hadde eg ei eiga kolonne for elevane i den gruppa eg skulle arbeida vidare med. Dette var viktig for å få ein oversikt over kva val eg skulle gjera med tanke på emne for undervisinga:

Oppgåve 2a: Legg saman 4x og 7x	**Mi gruppe**	**10.trinn**
Ikkje svart	1	3
11x	12	146
$11x^2$ (potensnotasjon)	1	3
16 og 49 = 65 (gir verdi til variabelen: 4x=4·4 og 7x=7·7)	0	1
11·2x (x + x = 2x)	0	1
12x (slurvefeil)	0	1
4x7x	0	1
21x	0	1

Figur 3.3.1: Fyrste utkast til strukturering i tabell

Tabellane vart sidan endra for å gjera dei meir oversiktlege til slik dei kan sjåast i kapittel 4: ”Resultat og analyse”. Ut frå desse tabellane kunne eg sjå kva misoppfatningar som var mest utbreidd. Desse emna utgjorde i fyrste omgang grunnlaget for intervjuguiden, og seinare for dei fire undervisingstimane. Ein grundigare analyse vart gjort på kartleggingsprøvane til dei elevane eg intervjua, slik at eg hadde grunnlag for å laga ein passande individuell del for kvar av dei til intervjuguiden.

Etterarbeidet knytt til intervjua var i fyrste omgang transkribering. Transkribering kan gjerast på mange måtar, alt etter kva som er målet med studien. Kvale & Brinkmann (2009) meiner at eit viktig spørsmål å stilla seg er: ”kva er nyttig transkripsjon for mi forsking?” Ein må altså velja det som er mest hensiktsmessig, så lenge ein forklarar korleis ein har gjort det.

Sidan målet mitt var å forstå meir av korleis elevane hadde tenkt då dei løyste oppgåvene, valde eg å skriva ordrett slik dei snakka. Lange og korte pausar har eg i hovudsak ikkje teke med, unntatt dersom det var særs lange pausar. Alt av kommentarar, både dei som forklarer svara, og av ting som skjedde som ikkje kom med på opptaka, er skrivne i kursiv. Eg har dessutan nytta meg av linjenummer for å gjera det heile meir oversiktleg. Eit døme som viser dette, er frå intervjuet med elev 2:

Meg: Ja..så bra. Då skal du få sjå på desse likningane her. *(Gir eleven eit ark med 3 likningar på).* Her har du fått oppgitt 3 ulike likningar. Så viss du ser på dei. Er det nokon skilnad på dei 3? Eller kva er likt og kva er ulikt på dei?

Elev: hm.. *(elev tenker lenge)* Det blir jo i alle fall ulike svar. Ehm..viss me tar denne her *(likning 1)* som er 7x minus 3x som er lik 4x, som er lik 4. Så tar eg og deler 4 på 4. x ja

Eg gir eleven ein blyant viss han vil notera når han reknar. Han tenker, småsnakker og noterer litt

Meg: Så nå sette du 4x er lik 4, og delte på 4 på begge sider?

Elev: Mhm. Og stryke. Så får eg x er lik 1

Meg: Det var på den fyrste likninga, der fekk du at x er lik 1?

Elev: Mhm

Eg transkriberte kort tid etter at intervjua var gjennomført for at eg ikkje skulle gløyma vekk detaljar ikring dei. Det vidare analysearbeidet gjekk for seg slik at eg las gjennom intervjutranskripsjonane og markerte interessante utsegn som eg ville sjå nærare på. Mykje av intervjua er dermed ikkje teke med vidare. Dei mest interessante utdraga er å finna i kapittel 4. Intervjua gav meg på denne måten ei djupare innsikt i elevane si omgrepsforståing og tilnærmingar til misoppfatningane, og gav meg vidare eit godt utgangspunkt for undervisinga. Eg har valt å referera til alle intervjuobjekta som ”han”, for at det skal bli mest mogeleg anonymt.

Sidan diagnostisk undervising fokuserer på arbeid med misoppfatningar i timane, var kartleggingsprøva og intervjua naturlege utgangspunkt for å planlegga timane. Ei utfordring var å finna best mogelege oppgåver som kunne få elevane mentalt aktive og engasjerte. Eg fekk ein del tips i diverse litteratur, og elles laga eg nokre oppgåver med utgangspunkt i kartleggingsprøva. Til samtalane i etterkant av oppgåveløysingane valde eg å ta for meg ting eg såg hadde vore særskilt utfordrande på kartleggingsprøva. Etter timane skreiv eg ein logg som vart brukt i ein analyse av timane der eg såg på kva som hadde blitt gjort, og korleis det fungerte, eventuelt ikkje fungerte.

Materiala frå oppfølgingsprøva vart strukturert i tabellar innan få dagar for å gje eit oversyn over resultata. Etterarbeidet med dette materialet vart ein del av ei heilskapleg drøfting som samanlikna dei to prøvane før og etter timane med undervising.

Ei særskilt utfordring knytt til mitt materiale var at det besto av så mange ulike delar. Sjølv om desse delane var knytt til kvarandre, og bygd opp som konsekvens av kvarandre, vart det likevel utfordrande å skulla trekkja saman trådane og sjå samanhengane.

3.4 Datakvalitet

> ”Datamaterialets kvalitet er høyere jo meir velegnet materialet er til å belyse bestemte problemstillinger.”
>
> (Grønmo, 2004, s. 217)

Sitatet ovanfor syner at for å vurdera datakvalitet må ein sjå dataa i samanheng med problemstillinga og målet for studien. Ein har to omgrep som vert brukt for å måla kvaliteten; reliabilitet og validitet. Dette er to omgrep som er nært samanknytte, og som utfyller kvarandre i ei kvalitetsvurdering. Kvalitetsmålingar kan gjennomførast for både datainnsamling, bearbeiding og analyse.

3.4.1 Reliabilitet

Reliabilitet er eit mål på kor påliteleg datamaterialet er (Grønmo, 2004). Sagt på ein annan måte: kan ein annan forskar koma fram til dei same resultata med det same opplegget for undersøking? Korleis opplegget for undersøkinga er utforma, og korleis innsamling av data er gjennomført, er viktige punkt reliabiliteten er avhengig av (ibid).

I ei kvalitativ undersøking kan det vera vanskeleg for andre å gjennomføra ei undersøking på nøyaktig same måte. Eit døme på dette er intervjua og tiltaka i klasserommet frå mine eigne undersøkingar, der kunnskapen vaks fram i interaksjonen mellom personar der og då. Men på trass av dette meiner Grønmo (2004) at det òg vil vera grunnlag for samanlikning og diskusjon av reliabilitet i undersøkingar med kvalitative innslag.

Når ein gjer undersøkingar i skulen er det mange faktorar som spelar inn. Elevane kan vera slitne og ukonsentrerte, motivasjonen kan variera og dei ulike lærarane sine haldningar til å gjennomføra prøvane kan ha verka inn på elevane sine prestasjonar. Så det er klart at heilt identiske resultat ville gjerne ikkje synt seg ved ei tilsvarande undersøking på andre skular. Men når eg samanliknar resultata mine med til dømes resultat frå KIM-undersøkinga (Brekke m.fl., 2000), er det tilsvarande tendensar som syner seg. Med det meiner eg at til dømes i oppgåva som tilsvarar oppgåvene 2 og 3 på kartleggingsprøva (der elevane skal legga saman ulike ledd), syner det seg både i mine undersøkingar og i KIM-undersøkinga svar som at elevane legg ledda inntil kvarandre, ignorerer variablar, eller nyttar potensnotasjon på feil måte. Når det gjeld oppgåva der elevane skulle skriva ei matematikkforteljing til ei likning, nytta eg same strukturering av svara som i KIM-undersøkinga fordi det i stor grad var same typen svar som kom fram. Altså har andre kome fram til tilsvarande resultat, om enn ikkje med heilt samsvarande opplegg for undersøkingar. Vidare retta eg prøvane sjølv slik at alle vart retta på same måte. På dette grunnlag meiner eg å kunna seia at reliabiliteten i samband med prøvane var god.

Eit viktig punkt å tenka på når ein vel ei problemstilling er tanken om at andre skal kunna koma fram til samsvarande resultat med same problemstillinga. Både utforminga og gjennomføringa av prøvane, intervjua og undervisingstimane vil jo sjølvsagt vera prega av eigne subjektive tilnærmingar, men poenget er at problemstillinga må vera utforma slik at dette ikkje verkar inn i for stor grad på resultata. Dette meiner eg har blitt gjort i denne studien, fordi problemstillinga i så stor grad støtter seg på eit rammeverk av tidlegare forskingsresultat og retningslinjer for diagnostisk undervising.

Vidare er det i samband med analyse og bearbeiding av materialet mykje som lett kan bli påverka av mine subjektive meiningar. Difor har eg gjennom heile arbeidet prøvd å støtta meg til anna litteratur om emnet for å bekrefta funna mine. Dette meiner eg var relevant sidan eg leita etter misoppfatningar som alt var dokumenterte andre stader.

Alt i alt meiner eg reliabiliteten er så god som ein kan får det i ei slik undersøking.

3.4.2 Validitet

Når ein ser på validiteten, ser ein på om metoden undersøker det den er meint å undersøka. Altså om datamaterialet er gyldig for dei aktuelle problemstillingane (Grønmo, 2004). Ein ser då fyrst og fremst på arbeidet med å velja ut opplegget til undersøkingane, altså det som blir gjort i forkant av sjølve utføringa av opplegget (ibid).

At det er eg sjølv som har sett saman både prøvane og opplegga for timane kan verka inn på validiteten. Det som veg opp for kartleggingsprøva sin del, er at dei fleste av oppgåvene anten er henta direkte frå, eller inspirert av, oppgåver nytta i tidlegare forsking[13]. Oppgåvene på oppfølgingsprøva var ei vidareutvikling av desse. På same måten var nokre av oppgåvene til undervisingstimane henta frå forsking på det aktuelle feltet[14]. Når det gjeld gjennomføringa av timane prøvde eg å halda meg til retningslinjer gjeve i tilsvarande litteratur[15]. I desse timane samarbeidde eg med læraren som hadde det faglege ansvaret for gruppa. Han godkjende opplegget mitt, var tilstade i timane og utfylte meg der det var naudsynt. Dette meiner eg er ei styrke for validitetsvurderinga.

Så viser undersøkingane mine det dei er meint å undersøka? I dette tilfellet vil eg svara ja, og seia at validiteten er god.

[13] Viser mellom anna til Booth & Koedinger (2008), Brekke, Grønmo, & Rosén (2000) og Steinle, Gvozdenko, Price, Stacey, & Pierce (2009)
[14] Viser mellom anna til Brekke, Grønmo, & Rosén (2000) og Bergsten, Häggström, & Lindberg (2009)
[15] Viser mellom anna til Bell (1993b) og Birks (1987)

4 RESULTAT OG ANALYSE

Som problemstillinga syner har eg valt ut misoppfatningar som alt er kjende frå tidlegare forsking[16], sjå tabell 4.1. Mykje kunne vore sagt og drøfta når det gjeld resultata frå desse undersøkingane. Difor har avgrensingar vore viktige. Eg valde å legga fokuset på å drøfta dei misoppfatningane som har vore gjennomgåande i heile prosjektet. Det vil seia dei som på kartleggingsprøva synte seg tydelegast blant elevane eg skulle undervisa, og som det dermed vart naturleg å arbeida med både i samband med intervju, undervising og oppfølgingsprøve. I 4.1 ser eg på resultata frå heile 10.trinn, medan eg i 4.2 og 4.3 fokuserer på gruppa eg arbeidde med vidare.

Oppgåvenummer		**Misoppfatning**	*Omtale i kapittel 2:*
Kartleggingsprøve	**Oppfølgingsprøve**		
1		Ulike bokstavar tyder ulike tal	*2.3.7*
2	1	Rekning utan variabel	*2.3.8*
3		Godtek ikkje ”opne” svar	*2.3.9*
4		Negative tal ”oppfører” seg som positive tal	*2.3.3*
5	2	Prioriteringar: reknar konsekvent frå venstre mot høgre	*2.3.1*
6	3	Prioriteringar: handsaming av parentesar[17]	*2.3.1*
7		Divisjon er kommutativt	*2.3.5*
8		Bokstavar kan berre stå for naturlege tal	*2.3.4*
9	4	Likskapssymbolet er ein kommando om å utføra ein operasjon	*2.3.2*
10	5	Bokstavane som forkortingar for objekt	*2.3.6*

Figur 4.1: Misoppfatningane i fokus på kartleggingsprøva og oppfølgingsprøva

Sjå vedlegg 7.2.1 for dei samla resultata på alle oppgåvene.

4.1 Kartleggingsprøve og intervju

I denne delen vil eg sjå nærare på oppgåvene eg valde ut som grunnlag for det vidare arbeidet med prosjektet. Eg fokuserer på misoppfatningane kjende frå tidlegare forsking som synte seg på desse.

[16] Viser mellom anna til: Booth L. R. (1999), Booth & Koedinger (2008), Brekke, Grønmo, & Rosén (2000), Grønmo & Rosén (1998), Russel, O'Dwyer, & Miranda, (2009), Steinle, Gvozdenko, Price, Stacey, & Pierce (2009)

[17] Som blir drøfta seinare i kapittelet, kan nok ikkje denne kallast misoppfatning, men er heller eit spørsmål om trening med slike oppgåver

Tabellane viser frekvensen av elevane som gav dei ulike svara. Vidare er prosentandelen rekna ut frå alle elevane som var med på kartleggingsprøva. Eg har nummerert dei ulike svara for å gjera det enklare å visa til dei undervegs. Utdrag frå intervjua nyttar eg for å gje elevane sine eigne forklaringar til svar på nokre av oppgåvene. Transkripsjonane frå alle tre intervjua finnast i vedlegg 7.6**.**

4.1.1 Oppgåve 2 og 3

I både oppgåve 2 og 3 var fokuset å studera korleis elevane handsamar rekning med variablar. Sidan oppgåvene er såpass like har eg valt å drøfta dei under eitt, med fokus på både å sjå om elevane rekna utan variabel og om dei godtok opne svar.

Oppgåve 2a: Legg saman 4x og 7x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		3	1,91
1	*11x*		146	93,0
2	$11x^2$	Potensnotasjon	3	1,91
3	16 og 49 = 65	Gir verdi til variabelen: 4x=4·4 og 7x=7·7	1	0,64
4	11·2x	x + x = 2x	1	0,64
5	12x		1	0,64
6	4x7x	Legg ledda inntil kvarandre	1	0,64
7	21x		1	0,64

Figur 4.1.1.1: Svar på oppgåve 2a

Dei fleste elevane klarte denne oppgåva veldig greitt sjølv om nokre har misoppfatningar som syner seg. Den tydelegaste er å bruka potensnotasjon, noko som vart drøfta i avsnitt 2.2.2. Blant andre svar finn ein meir tilfeldige feil (12x), men òg at elevane legg ledda inntil kvarandre (4x7x). Svaret 65 er interessant fordi eleven her gir ein verdi til variabelen for å unngå å bruka den. Küchemann (1981) rangerer denne måten å evaluera bokstavar på til å vera på det lågaste av seks nivå når ein ser på tolking av bokstavane i samanheng med kompleksiteten på oppgåvene. Eit anna døme på å gje verdi til variabelen kom fram i samtale med elev 3:

134 Meg: Så du har skrive no at 1x pluss 2x er lik 3x?

135 Elev: Ja

136 Meg: x'en, kva er den for noko? Kva tyder den?

137 Elev: Ehm..eh..1? Blir det det?

138 Meg: Kvifor tenker du at x er lik 1?

139 Elev: At 1 gonger 1 er 1, 2 gonger 1 er 2, og då blir det 3.

Oppgåve 2b: Legg saman 3y+ 5x – 2y		Kommentarar	Frekvens	Prosent
	Ikkje svart		8	5,10
1	*5x + y*		122	77,7
2	1y – 5x		1	0,64
3	5x – y		3	1,91
4	1y, 5x	Får ut to ”svar”	1	0,64
5	6x, 6y	Overser variabel	4	2,55
6	5x1y	Legg inntil	5	3,18
7	6xy	Handsamar fyrst tala, og legg variablane inntil	2	1,27
8	8yx – 2y	Summerer dei positive ledda	1	0,64
9	8x – 2y	Slurvefeil, bytta om to variablar	1	0,64
10	5x + 5y	Overser at det eine leddet er negativt	3	1,91
11	5y – 5x		1	0,64
12	1·2y + 5x		1	0,64
13	15y		1	0,64
14	10y	Summerer alle tala	1	0,64
15	5y		1	0,64
16	$6y^2x$	Handsamar fyrst alle tala, slår saman variablane, og legg inntil	1	0,64
17	0		1	0,64

Figur 4.1.1.2: Svar på oppgåve 2b

I denne oppgåva er det fleire ledd, og dessutan ein ekstra variabel samanlikna med den førre. For mange elevar blir dette meir utfordrande, noko som syner seg i talet på feilsvar. I følgje Brekke m.fl. (2000) kan ein unngå å ta omsyn til bokstaven i algebraiske uttrykk anten ved å la bokstaven stå, men å ignorera han, eller ved å kvitta seg med han. Vidare er ein tredje mogeleg måte å nytta ei konkret tolking av bokstaven, noko som blir nærare drøfta under oppgåve 10 (skriv matematikkforteljing til 2a + 5a = 7a).

Svara 10y og 15y er døme på å kvitta seg med ein bokstav, ved at ein summerer (i eine tilfellet er minuset blitt oversett) tala fyrst, og så berre nyttar den eine variabelen. Ei alternativ forklaring til at eleven har kvitta seg med bokstaven, er at han eller ho i staden har gjeve bokstaven verdi, i dette tilfellet 1 (MacGregor & Stacey, 1997).

Å la bokstaven stå, men å oversjå han, kjem tydeleg fram i svaret 6xy. Her har ein rekna ut den numeriske verdien fyrst, og så lagt variablane inntil. Küchemann (1981) meiner at mange elevar fyrst tek for seg ledda som for dei sjølve gjev meining (tala), for deretter å evaluera dei andre (variablane). Det er nok ein slik framgangsmåte nokre av elevane har hatt her. Eit liknande svar viste seg òg i oppgåve 2c (legg saman 6y – 5x), med svaret 11xy. Her har elevane i tillegg til å oversjå bokstavane, òg oversett at det er eit negativt ledd i uttrykket (sjå avsnitt 2.3.3).

Oppgåve 3a: Legg saman 3 og 5y		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		17	10,8
1	*3 + 5y*		87	55,4
2	8y	Summerer tala, og legg variabel inntil	45	28,7
3	7y		1	0,64
4	35y, 5y3	Slår saman	3	1,91
5	$\frac{5y}{5} = \frac{3}{5}$		1	0,64
6	3 + y		1	0,64
7	15y	Multipliserer tala og legg til variabelen	2	1,27

Figur 4.1.1.3: Svar på oppgåve 3a

På ei slik oppgåve blir det vanskeleg å nytta seg av ei konkret tolking av bokstavane. Hadde oppgåva vore 3y + 5y, kunne det nok gjeve meining for nokre av elevane å snakka om til dømes 3 yoghurtar pluss 5 yoghurtar til, og på denne måten enda opp med 8 yoghurtar (8y). Men i dette uttrykket er det eit ledd med variabel og eit utan, altså kan ein ikkje omformulera uttrykket til å innehalda færre ledd. På trass av dette er det mange som likevel prøver å gjera noko meir med uttrykket. 8y er, som i drøftinga av oppgåve 2, eit døme på at ein adderer tala fyrst og så legg inntil variabelen. Elevane som har svara 35y og 5y3 har slått saman ledda til å bli eitt ledd. Ein slik måte å slå saman ledda på meiner Booth (1999) kan ha røter i at elevar dreg parallellar til andre område av matematikken. Han peikar særskilt på arbeid med blanda tal[18] og plassverdisystemet[19].

Oppgåve 3c: Legg saman 2x og 3y		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		23	14,6
1	*2x + 3y*		91	58,0
2	5xy	Summerer tala og legg variablane inntil	30	19,1
3	2x3y	Legg tal og variablar inntil kvarandre	7	4,46
4	6xy	Multipliserer tala, og legg variablane inntil	2	1,27
5	5y	Gir verdi til x, evt overser den	1	0,64
6	7y	Gir verdi til x? Til dømes: 2·2 + 3y = 7y	1	0,64
7	3x + 3y		1	0,64
8	$5x^y$	Potensnotasjon	1	0,64

Figur 4.1.1.4: Svar på oppgåve 3c

I denne oppgåva er det to ulike variablar, og ei drøfting av svara vil tilsvara den for oppgåve 2b (legg saman 3y+ 5x – 2y). Eg vil difor heller her sjå nærare på ei grunngjeving for svaralternativ 2, henta frå intervjuet mitt med elev 2. Han fekk sjå oppgåve 3c saman med fire svaralternativ henta frå figur 4.1.1.4: 2x + 3y, 5xy, 2x3y og 6xy. Oppgåva hans var å argumentera kvifor eller kvifor ikkje alternativa var rette svar:

[18] Består av heital og brøk, der $2\frac{3}{4}$ tyder $2 + \frac{3}{4}$

[19] Her vil 35 tyda 3 tiarar + 3 einarar

Meg: Ok. Då har eg ein til oppgåve her. Det står legg saman 2x og 3y. Og der har eg oppgitt nokre ulike svaralternativ. Viss du ser på den fyrste der..

Elev: ..5xy

Meg: Kva sa du nå? At det er 5xy som er rett svar?

Elev: mhm

Meg: 2x pluss 3y, kvifor er ikkje det rett svar?

Elev: 2x + 3y, altså det der? *(peiker på oppgåveteksta)*

Meg: Nei, den der tenkte eg på *(peiker på det fyrste av svaralternativa)*

Elev: Å ja..2x og 3y..

Meg: Ja

Elev: Hm..skal eg plussa dei saman nå?

Meg: Nei, eg bare tenkte..det er eit mogeleg svaralternativ som nokon ville svart på denne oppgåva. Så bare lurer eg på kvifor syns du ikkje at det er eit rett svar?

Elev: Det er fordi dei må slåast saman

Meg: Så det har eigentleg ikkje blitt gjort nokon ting her?

Elev: Nei

Meg: Nei, ok. Og 5xy meinte du var eit rett svar, fordi at..?

Elev: Fordi at me tar 2 pluss 3, som blir 5, så set du saman x og y.

Dei to siste svaralternativa avskreiv eleven som usannsynlege.

Eleven viser tydeleg at han ikkje godtek opne svar, jf linje 164. Denne argumentasjonen underbygger Küchemann (1981) sine utsegn om korleis elevar ulikt handsamar ledda som gjev meining (tala), og dei som ikkje gjev meining (variablane).

4.1.2 Oppgåve 5 og 6

Desse oppgåvene hadde fokus på å finna ut korleis elevane arbeidde med oppgåver der prioritering av rekneoperasjonar er viktige. Oppgåve 6 hadde i tillegg med parentesar i uttrykka.

Oppgåve 5b: Finn verdi for x i 5 – 2 · x = 1		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		47	29,9
1	*x = 2*		31	19,7
2	x = 0,33	Reknar fyrst 5 – 2, og får 3x = 1	33	21,0
3	3x – 1	Tilsvarande som i 2)	1	0,64
4	x = -2	Overser skilnad mellom · og + ved likningsløysing	12	7,64
5	x = 1		6	3,82
6	x= 3	Får 2x=1+5 fordi han overser skilnad på negative og positive ledd	10	6,37
7	x = -3	Reknar at 3·-3 er det same som 1	3	1,91
8	x = 4		3	1,91
9	x = 0,70		1	0,64
10	x = 0,5		1	0,64
11	x = 2,5		1	0,64
12	x = -1,5		1	0,64
13	x = -1		1	0,64
14	x = -6		1	0,64
15	x = 12	x = 1+5 · 2	1	0,64
16	x = 33		1	0,64
17	3		1	0,64
18	$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$		1	0,64
19	$\frac{x^2}{4}$		1	0,64

Figur 4.1.2.1: Svar på oppgåve 5b

Både at så mange elevar ikkje svara på denne oppgåva, og at det var så mange ulike svar, syner at her var mange av dei usikre. Feilsvaret 0,33 eller $\frac{1}{3}$, var det svaret eg på førehand hadde forventa at mange elevar skulle svara. Det syner seg at 21% av elevane tenker at ein alltid startar på venstre side og arbeider seg mot høgre i staden for å prioritera dei ulike rekneoperasjonane. I svar nummer 6 har elevane ein rett framgangsmåte, men gløymer å ta omsyn til skilnaden mellom positive og negative teikn når dei flytter om på ledda.

Mange av dei andre feilsvara kan ein anta at kjem frå prøving og feiling fordi elevane ikkje veit korleis ein løyser likningar. Eit utbreidd alternativ er at ein då tyr til intuitive strategiar[20].

[20] Strategiar basert på til dømes erfaring eller kjensle av kva som er rett. Booth (1981) skil mellom det formelle systemet ein lærer i skulen, og eigne, intuitive strategiar elevane sjølve utviklar.

Eg vil i denne oppgåva ikkje sjå på intuitive strategiar som misoppfatningar i seg sjølv, men heller som meir generelle strategiar som kan bidra til at misoppfatningar kjem til syne. Booth (1999) viser til anna forsking som har konkludert med at elevar i denne aldersgruppa ofte nyttar seg av slike intuitive problemløysingsmetodar når dei ikkje veit korleis dei skal løysa ei oppgåve. Dette kan forklara skilnaden mellom 5b og 5a (finn verdi for x i 3 + x = 10) der ein enkelt kan prøva seg fram til det rette svaret. I 5a var det 91 % som svara rett mot nærare 20% i oppgåve 5b. I samtale med elev 1 om 5b kjem det fram i linje 86 at han ikkje fann svaret fordi det ikkje var eit heiltal. Dette viser korleis intuitive strategiar som i nokre tilfelle vil fungera, blir utilstrekkelege i møte med andre oppgåver:

Meg: Klare du å løysa den no? Bare prøv og tenk litt høgt undervegs

Elev: Ja..eh..her var det jo det at 5 minus 2, det er jo 3. Som er lik..altså..

Meg: *Gir eleven ein blyant.* Bare skriv om du vil..

Elev: Ja, 5 minus 2 er lik 3.

Meg: Så det er fyrste steget

Elev: Ja. Og då blir jo det 3 ganger x er lik 1.

Meg: Okei

Elev: Men det var det eg ikkje skjønte. Korleis ein skulle få 3 eit eller anna til å bli 1. Sidan 1 er mindre enn 3. Så då blei eg sittande fast

For å unngå slike prioriteringsfeil som førde til svaret 0,33, kan parentesar vera eit nyttig hjelpemiddel. Dette er fordi det kan hjelpa elevane til å sjå kva som skal prioriterast fyrst. Parentesar er vidare nyttige for å skriva matematiske uttrykk meir samansett. Men det syner seg at mange elevar unngår å bruka dei:

> "Children typically do not use parentheses [..] because they believe that the written sequence of operations determines the order in which the computation should be performed."
>
> (Booth, 1999, s. 305)

Eit utsegn frå elev 1 støtter opp om sitatet:

Meg: Nei.. Viss for eksempel ein parentes skulle blitt satt inn for å visa kva som skulle blitt gjort fyrst. Kor ville du satt den inn då?

Elev: Nå veit jo ikkje eg kva som skal reknast fyrst..

Meg: Nei…

Elev: Eh..så eg har egentlig ikkje peiling på kor ein skal setja den.. Eg byrjar jo naturleg med dette fyrst *(meiner 5 – 2)*, sidan det står fyrst liksom. Men eg veit jo ikkje om det er rett.

Meg: Så det du tenker på er at det som står fyrst det byrjar ein med fyrst?

Elev: Ja

Oppgåve 6a: 3x + (2x + x)		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		18	11,5
1	*6x*		81	51,6
2	3x + 3x, 3x + 2x + x	Rett, men ufullstendig	23	14,6
3	$6x^2$	Potensnotasjon	3	1,91
4	7		1	0,64
5	7x	Tilfeldig reknefeil?	3	1,91
6	$7x^3$	Potensnotasjon	1	0,64
7	3x – 2x + x, 3x – 3x	Har sett – før parentesen	6	3,82
8	3x + 2x – x, 5x – x, 4x	Har sett – inne i parentesen	15	9,55
9	3x – 2x – x	Har sett – før og inne i parentesen	1	0,64
10	$3x + 2x^2$	Potensnotasjon inne i parentesen	1	0,64
11	5x + 4x = 9x	Har summert leddet utafor parentesen med kvart av ledda inni	1	0,64
12	3·3 + 2·2 + x = 13x	Gitt den ukjente numerisk verdi	1	0,64
13	$6x^2 + 3x^2$	Multipliserer leddet utafor parentesen med kvart av ledda inni	1	0,64
14	3 – 3x		1	0,64

Figur 4.1.2.2: Svar på oppgåve 6a

Fordi det er så viktig at elevane veit korleis ein handsamar parentesar, fekk oppgåve 6 eit særskilt fokus på dette. Tabellen over 6a viser at om lag halvparten av elevane svara rett på denne oppgåva. Svar nummer 7, 8 og 9 er etter mi meining eit teikn på at elevane har gløymt korleis ein arbeider med parentesar, og ikkje nødvendigvis at dei har ei misoppfatning på området. Dette kom og fram i samtale med elev 1, sjå linje 8 – 25. Potensnotasjonen i svar 3 og 13 har nok same bakgrunn som liknande svar i til dømes oppgåve 2a (legg saman 4x og 7x). Så i all hovudsak er nok arbeidet med parentesar ei treningssak. Men det å forstå kvifor ein bør bruka parentesar, og kvifor einskilde rekneoperasjonar må prioriterast framfor andre, er viktige ting å arbeida vidare med. På denne måten kan ein unngå situasjonar som denne, frå intervjuet med elev 1:

63 Meg: Veit du kva hensikt det har at me brukar parentesar i likningar?

64 Elev: Det har eg faktisk aldri skjønt, kva som er poenget med dei

4.1.3 Oppgåve 9

I oppgåve 9 var målet å finna ut meir om elevane si forståing av likskapsteiknet, i hovudsak om dei tolka det som ”blir” i staden for ”er”.

Oppgåve 9a: Rekn ut 5 = 2x + 3x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		44	28,0
1	x = 1		80	51,0
2	x= -1		1	0,64
3	5 = 5x	Rett, men ufullstendig	5	3,18
4	2x + 3x = 5	Flytta om på ledda, for å få ”svaret” på høgre sida	3	1,91
5	5 = 2x + 3x	Tenker at svaret står der?	2	1,27
6	1x		1	0,64
7	5x		1	0,64
8	10x	Har summert alle tala, og lagt til x i svaret	1	0,64
9	x = 25		1	0,64
10	x = 5	Svaret står alt der?	2	1,27
11	x = -5	Bytter om for å få ”svaret” på høgre sida, og endrar då forteikn på alle ledda	1	0,64
12	x = 0	Tenker at: $x = \frac{5}{5} = 0$	12	7,64
13	2x : 1 = 2		1	0,64
14	5 = 2 + 3		2	1,27

Figur 4.1.3.1: Svar på oppgåve 6a

Det fyrste som peikar seg ut er svar nummer 4, der elevane har flytta om på ledda. På denne måten blir oppsettet meir i tråd med eit kjent oppsett med uttrykket på venstre side og svaret på høgre side. I oppgåve 9b (rekn ut 6 = 4 + 2 **)** var det i underkant av 15% som hadde gjort det same. At mange elevar snur om på ledda for å få ”svaret” på høgre sida kan sjåast i samanheng med det Bergsten m.fl (2009) skriv om at både erfaring og studiar viser at det er ein høgare løysingsfrekvens på likningar der høgre ledd er reint numerisk. Dette er tydeleg når det gjeld oppgåve 9c (rekn ut 3y + 1y = 4y), som ikkje hadde nokon reint numeriske ledd og var den av dei tre deloppgåvene færrast elevar hadde svara rett på. Vidare var det i 9a 2 elevar som svara x=5, noko som syner at dei tenker at det numeriske leddet er svaret som står klart på eine sida av likskapsteiknet. Svar nummer 12 er eit døme på manglande kunnskapar og forståing frå aritmetikken, men som nok ikkje kjem av ei misoppfatning.

Elev 2 fekk i oppgåve å sjå på dei tre følgjande likningane for å finna ut kva som var likt og ulikt med dei:

1) $7x - 3x = 4$
2) $4 = 7x - 3x$
3) $3x = 7x - 4$

Mot slutten av samtalen, finn ein dette utdraget:

Meg: Okei. Eh..viss du studerer desse likningane, så ser du at det er same tala me har på alle. Kva for ein av desse måtane å skriva likningar på ville du brukt?

Elev: Av desse måtane her?

Meg: Ja

Elev: Den fyrste

Meg: Ok, kvifor ville du brukt den?

Elev: For den har allereie oppgitt svaret på venstre side *(meiner høgre..)*

I den vidare samtalen kom det fram at dersom likninga hadde vore $7x - 3x = 4x$, måtte $4x$ ha blitt flytta over på venstre sida: $7x - 3x - 4x = 0$. Altså skil han mellom plassering av variabelledd og numeriske ledd. Det er tydeleg at eleven har ei oppfatning om at likskapssymbolet har funksjon som kommando om at noko skal utførast. Dette til trass for at han òg viste full forståing for at det skal vera likt på begge sider av likskapsteiknet.

Kommandooppfatninga kjem òg fram i dette utdraget frå loggen frå time 2:

" [..] Deretter rekna me det ut, og fekk likninga 24 = 24. Eg spurte dei om det var eit fornuftig uttrykk. Ein elev meinte at det for så vidt var rett, men at det ikkje var noko å rekna ut der."

4.1.4 Oppgåve 10

Fokuset i denne oppgåva var å finna ut meir om elevane si variabelforståing ved at dei skulle skriva ei reknefortеljing. Elevane er ofte meir vant med å gå andre vegen, det vil seia å omsetja tekst til symbol. Dette syner seg både i at få gav eit tilfredsstillande svar på oppgåva i tillegg til at mange ikkje har svara i det heile tatt, noko som er i samsvar med analysen gjennomført i samband med KIM-prosjektet på ei liknande oppgåve (Brekke m.fl., 2000). Eg har henta klassifiseringa av svara frå same kjelde. At det er same typen svar som kjem til syne her, er med på å støtta opp om at det fins standardmisoppfatningar på tvers av tid og stad.

Oppgåve 10: Skriv matematikkforteljing til 2a + 5a = 7a		**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart	63	40,1
1	Rett tolking	15	9,55
2	Konkret objekt	62	39,5
3	Udefinert objekt	4	2,55
4	2a, 5a, 7a heilskaplege objekt	6	3,82
5	Blanding av variabelforståing og konkret objekt	3	1,91
6	Reknar ut for å finna ein verdi til a	3	1,91
7	Reknar ut eit svar (7 + 7 = 14)	1	0,64

Figur 4.1.4.1: Svar på oppgåve 10

Dei elevane som har gjeve svar som kjem inn under kategorien ”rett tolking” er dei som har nytta bokstaven som spesifikk ukjent, generalisert tal eller som variabel[21]. Eit døme på dette:

”Rektoren vet at det er 5 klasser på skolen hans, men han vet ikke hvor mange elever det er i hver, men det er like mange i alle. En annen skole i nærheten stenges ned, og to klasser med likt antall elver kommer til hans skole. a = antall elever i klassen. Rektoren vet at antall elever på skolen hans er 7a”.

Det mest utbreidde svaret var, ikkje overraskande, tolking av bokstav som konkret objekt. Det fins mange måtar ei slik tolking kan syna seg, men felles er at a blir som ei forkorting eller eit namn på eit objekt. Elev 3 hadde svara slik:

”Det var en gang 2 a-klassejenter som spilte fotball sammen i friminuttet. Så kom 5 andre a-klassejenter bort til dem (samme klasse). De spurte om de fikk være med, og selvfølgelig fikk de det. Da var det til slutt 7 a-klassejenter som spilte fotball sammen.”

Ut frå samtalen med elev 3 i etterkant verka det som om denne forklaringa var naturleg sidan ”a” og ”a-klasse” likna på kvarandre. Og det er forståeleg i lys av symbolbruk på andre

[21] Jf. Küchemann (1981, s.104)

område i matematikken, der til dømes m står for meter. Eit interessant poeng som kom fram i denne samtalen var at han tenkte at x og a var ulike typar variable. Før dette hadde me arbeidd med ei oppgåve der x var ein variabel som skildra (det ukjente) talet på fyrstikker i 3 fyrstikkesker:

Elev: Her visste eg jo kor mange..eller når eg tenkte så tenkte eg liksom..2 a-klasseelever og 5 a-klasseelever er liksom 7 a-klasseelever. Men her måtte eg jo fyrst finna ut kor mange fyrstikker det var i eskene og sånt. Men eg trengte jo ikkje finna ut noko sånn på den

Meg: Nei, okei, så der *(oppgåve 10)* tenker du at alt var oppgitt så du ikkje trengte finna ut noko?

Elev: Ja

Meg: Men viss det hadde stått 2x pluss 5x er lik 7x, hadde du tenkt det same då?

Elev: Mm..nei, eg hadde vel ikkje tenkt det same då..

Meg: Så du tenker at det er skilnad, a og x er ulike typar variable?

Elev: Ja, litt

Meg: Kva tenker du er skilnaden?

Elev: Eg veit ikkje, eg tenker liksom bare på at..eller eg veit ikkje om det er nokon skilnad, det kan godt vera, men eg tenker liksom bare at x det veit eg liksom ikkje kva er for noko. Så det må eg finna ut på ein måte. Mens..ja..

Meg: Mens a'en kan du bruka til noko konkret?

Elev: Mhm..

Ein slik skilnad er og kjent frå tidlegare forsking:

> ”Furthermore, it seems likely that children may give different meanings to the letters, which in turn would affect item difficulty in that some items might be solved in unexpected ways.”
>
> (Küchemann, 1981, s. 103)

I ein av undervisingstimane[22] eg seinare hadde kom ein elev med eit utsegn som støtta opp om ulik bruk av ulike bokstavar. Han meinte at det var greiast å nytta x og y som variablar fordi det var dei som var mest brukt i matematikken. Desse utsegna fortel ein del om avgrensa kunnskap når det gjeld forståing av den variable.

Svar nummer 4 kan illustrerast av dette elevsvaret:

”En dag gikk 2a også møtte den 5a, de slo seg sammen og ble til 7a. De hadde ingen venner som var som de, derfor lette de etter noen. Så en dag fant de noen som var helt lik dem, en annen 7a. Så ble alle glade og levde lykkelig resten av livet.”

[22] Sjå logg etter 1.time, vedlegg 7.8.1, linje 10 - 11

4.2 Tiltak i klasserommet

I dette avsnittet vil eg drøfta misoppfatningane i lys av dei fire timane med undervising eg sjølv gjennomførte. Opplegga for timen og loggane finnast som vedlegg 7.7 og 7.8.

4.2.1 Mi rolle i undervisinga

I dei fleste klasserom har læraren ei tydeleg rolle som kunnskapsformidlar og leiar av klassa. I samband med diagnostisk undervising er denne rolla enno viktigare, og inneber i tillegg meir direkte kontroll (Birks, 1987):

> ”The role is far more subtle than the traditional one, being that of a chairperson, generating and maintaining discussion, encouraging active pupil involvement and at times playing ‘devil’s advocate’ if insufficient conflict is aroused or alternative strategies need to be explored.”
>
> (Birks, 1987, s. 71)

Målet mitt var å fylla denne rolla på ein best mogeleg måte. I praksis innebar det at eg leidde timane, gav elevane oppgåvene, gjekk rundt og snakka med dei, og utfordra til samtale undervegs. Etter at elevane hadde fått arbeidd med oppgåvene ei stund leidde eg ein klassesamtale og prøvde å inkludera flest mogeleg av elevane, for på denne måten å få ulike synsvinklar på problema. I denne fasa hadde eg misoppfatningane frå kartleggingsprøva i bakhovudet og prøvde å leia samtalane inn på desse, for om mogeleg å setja elevane i ei kognitiv konflikt som me saman kunne løysa opp i. Vidare såg eg på det som ei viktig oppgåve å vera den som samla trådane mot slutten av timane.

Sidan det var nytt for elevane å arbeida på denne måten brukte eg litt tid i byrjinga av den fyrste timen til å forklara korleis me skulle arbeida framover. Dessutan snakka eg om kor viktig det er å forklara korleis ein tenker, og det å lytta til kvarandre med respekt. Eg peika på at det var lov å gjera feil fordi ein slik kan læra noko av kvarandre.

4.2.2 Parentesar og prioriteringar

Dette var tema i fyrste timen. I hovudsak var det misoppfatninga som fører til at elevane alltid byrjar å rekna frå venstre mot høgre eg ville arbeida med. Bruken av parentesar bryt med denne oppfatninga, og blir viktigare etter kvart som elevane lærer meir algebra.

Eg byrja med ei oppgåve som hadde som mål å få elevane til å reflektera meir kring behovet for prioritering. Oppgåve 1b (der dei skulle nytta variablane til å setja opp eit generelt uttrykk for prisen) var utfordrande for mange fordi dei skulle setja opp eit uttrykk der både pris og antall skulle med. Det at nokre hadde teke med parentesar og andre ikkje, gjorde at eg leidde samtalen etter oppgåva naturleg inn på kvifor det er naudsynt å bruka parentes. Dette vart gjort ved å diskutera feilen i utrekninga i oppgåve 1c . Ein av elevane meinte at parentesen berre forvirra, medan ein annan peika på at det var viktig at dei var der for å skilja.

Eg gjekk så vidare til å peika på at me ut frå dette treng reglar for prioriteringar. Elevane fekk nokre minutt til å prøva å formulera eigne reglar. To av dei bidrog med punkt som me saman sette opp i denne rekkefølgja:

1) Løys opp parentesen
2) Multiplikasjon og divisjon
3) Addisjon og subtraksjon

Me vart dessutan einege om at den fyrste var overordna, medan dei to andre var hjelpemiddel for å løysa parentesen.

Deretter skreiv eg opp likninga: $3x + (2x + x)$ som me løyste i fellesskap ved å nytta reglane. Grunnen til å nytta akkurat denne likninga var fordi det hadde vore litt utfordringar knytt til denne i 6a på kartleggingsprøva. Eg bytta deretter forteikn til: $3x – (2x + x)$, og viste at dersom me berre tok bort parentesen ville ikkje det bli same svar som dersom me fyrst rekna ut inne i parentesen. Med dette vona eg at elevane skulle sjå kvifor dei alltid må løysa opp parentesane fyrst. Sidan det var eit aritmetisk grunnlag som var målet for timen burde eg gjerne heller berre hatt numeriske oppgåver, til dømes $3 – (2 + 1)$, for å visa det same.

Vidare arbeidde me i fellesskap med det egyptiske taltrikset[23]. Me samtala om symbolbruk, og eg peika på at ein kan nytta kva symbol ein vil for det ukjente talet. I denne samanhengen

[23] Ein startar med å tenka på eit tall, og fylgjer ei fast oppskrift med ulike rekneoperasjonar som skal gjerast. Til slutt ender ein alltid opp med talet 3.

nytta me x. Hensikta her var å sjå kvifor det kan vera lurt å nytta parentesar. Då me hadde skrive opp heile uttrykket var det mange parentesar. Desse løyste me steg for steg. Då fekk me til dømes utfordringa med 2(x + 5), og korleis den skulle løysast. Her viste eg korleis me skulle bruka prioriteringsreglane og løysa steg for steg. Eg synte dei etterpå at svaret hadde blitt feil om me berre hadde teke bort parentesen og fått 2x + 5, i staden for 2x + 10.

I lys av etterpåklokskapen ser eg at det nok vart for mykje fokus på bruken av parentesar, og for lite tid til å peika på at ein må bruka det ein kan om prioriteringar for å unngå å alltid rekna frå venstre mot høgre i eit uttrykk. Samstundes er det viktig at elevane greier å bruka parentesar. Vidare er det, som så ofte elles i skulen, eit spørsmål om tid og vurdering av kva som skal få prioritet i timane.

4.2.3 Likskapssymbolet

I time to arbeidde me med forståing av likskapssymbolet. Oppgåvene er henta frå Bergsten m.fl (2009), som meiner at likskapsteiknet saman med forståing av bokstavane utgjer to særskilt viktige faktorar for å kunna løysa likningar. Grunngjevinga for å bruka oppgåvene eg henta frå dei, finnast i dette sitatet:

> ”Et sätt att underlätta förståelse av ekvationer är att använda aktiviteter för att bredda elevernas uppfattning av likhetstecknets betydelse till att omfatta både *är* (statisk, strukturelt) och *blir* (dynamisk, operationellt).”
>
> (Bergsten m.fl., 2009, s. 52).

Dei to fyrste oppgåvene[24] arbeidde me med i form av samtale i klassa. Det verka det å vera god forståing blant elevane om at likskapsteiknet tyder ”like mykje som”, fordi fleire uttrykk passa inn i begge to. Eg spurte så elevane om 24=24 var eit fornuftig uttrykk, fordi dette er ei anvending av likskapsteiknet mange har problem med å forstå. Det at ein elev peika på at det i den likninga ikkje var noko å rekna på, sjølv om det gjekk an å skriva slik, viser likevel at den operasjonelle tydinga sit djupt. Dette vona eg at oppgåve 3 (der dei skulle setja inn rett teikn slik at likskapane stemte) kunne bidra til å løysa meir opp i.

[24] 1) 12 + 10 = __ + __ , 2) 12·2 = __ - __

Ei slik oppgåve er gjerne litt enkel, difor er ein samtale kring resultata i ettertid veldig viktig for å gjera noko med omgrepsforståinga. Elevane arbeidde saman to og to. Den mest fruktbare delen av denne var nok deloppgåve 3.1c (sjekk om likskapen stemmer i: $3 \cdot (8-2) = 25 - 6$), der ein elev meinte at ein ikkje kunne setja likskapsteikn mellom høgre og venstre side når uttrykka ikkje var like. I den samanhengen blir ikkje likskapsteiknet tolka som "blir", men som "er". Å laga eigne oppgåver engasjerte mange av elevane. For mange var målet å laga oppgåvene vanskelegast mogeleg for dei andre, men samstundes fekk det dei til å tenka over oppbygginga av slike oppgåver.

I forlenginga av samtalen kring denne oppgåva spurte eg elevane om $4 + 2 = 6$ var det same som $6 = 4 + 2$. Ein elev kom med eit utsegn som peika på ei kjelde til misoppfatningar; at dei to er heilt like uttrykk, men at det er den fyrste som er den mest vanlege skrivemåten i mattebøker. På den måten kan lærematerielI ubevisst bidra til ei operasjonell forståing av likskapsteiknet. I denne samanheng viser eg til MacGregor & Stacey (1997). For å løysa opp i dette fokuserte eg på at det er viktig å minnast at likskapsteiknet tyder "er lik". Andre ting som dukka opp i timen var dei intuitive måtane å løysa likningar på[25], og misoppfatninga om at ulik bokstav tyder ulikt tal[26].

Oppgåve 4 (der elevane skulle sjekka "Anna" si utrekning[27]) bidrog til å stilla spørsmål ved ein vanleg framgangsmåte når elevane arbeider med tekstoppgåver, i dette tilfellet å skriva: $30 + 125 = 155 - 50 = 105$. Då eg gjekk rundt for å snakka med elevane medan dei arbeidde med denne oppgåva synte det seg at mange ikkje var einege i framgangsmåten brukt i oppgåva. Problemet deira var å sjå kva som var feil, men med litt hint kom dei på å sjekka om likskapane stemte. Så ved å nytta den strukturelle forståinga av likskapssymbolet såg mange kvifor metoden ikkje kunne brukast (får: $155 = 105 = 105$), og nokre foreslo å skriva problemet opp som ei likning i staden. På denne måten kom det ein naturleg overgang mellom bruken av likskapssymbolet i aritmetikken og i algebra.

I denne timen opplevde kanskje ikkje elevane dei store kognitive konfliktane, men eg trur at dersom dei likevel var mentalt aktive i arbeidet med oppgåvene, kan dette ha vore ein fruktbar måte å arbeida på.

---

[25] Sjå linje 37 - 41 og utover i loggen til time 2. Vedlegg 7.8.2
[26] Sjå linje 42 og utover i loggen til time 2. Vedlegg 7.8.2
[27] Bakgrunnen for utrekninga var at Anna fekk 50 kr av mormor, og så kjøpte ho ei bok for 125 kr. Då hadde ho att 30 kr. Kor mykje pengar hadde ho då hatt frå starten?

4.2.4 Forståing av den variable

Då eg spurte elevane om kva dei assosierte med ordet algebra kom tre elevar med desse punkta:

- Likningar
- Bokstavar
- Parentesar

Eg gjekk vidare med punktet om bokstavar og forklarte kvifor det er ein fordel å bruka dei for å uttrykka generelle samanhengar slik at ein ikkje treng å testa ut spesifikke verdiar for kvar gong. Sidan veldig mange av elevane tolka bokstav som objekt på kartleggingsprøva, var dette noko eg ville fokusera på i den tredje timen.

> ”For å forstå at symbol kan representere variable storleikar, må elevane få arbeide mykje med å ”omsetje” frå ein situasjon til eit algebraisk uttrykk og frå eit algebraisk uttrykk til ein situasjon.”
>
> (Brekke m.fl., 2000, s. 81).

Fyrste oppgåve (om mønster med ulike typar fliser) var henta frå Brekke m.fl. (2000). Ei utfordring for mange av elevane var å plukka ut kva som var relevant informasjon i teksta, og dermed òg kva som var dei ukjente storleikane. Dermed måtte eg fortelja mange av dei at det var viktig å lesa oppgåva nøye. I diskusjonen i etterkant av denne oppgåva hadde eg særskilt fokus på om ein skulle sjå på den ukjente som ”fliser” (objekttolking) eller ”antall fliser” (variabeltolking). Desse to tolkingane sleit mange med å skilja mellom. Eg trur heile denne oppgåva gav mange konfliktopplevingar for ein del av elevane, kanskje spesielt for ei av gruppene då dei arbeidde med deloppgåve f (undersøk om teikning og uttrykk gir same resultat). Her skulle dei samanlikna teikninga av flisene med uttrykket dei hadde fått i d (skriv symboluttrykk for mønsteret med dobbelt så mange blå som kvite fliser). Då desse ikkje var samsvarande måtte dei endra på måten dei hadde laga symboluttrykket sitt, og dermed òg endra forståinga av korleis eit slik symboluttrykk skal setjast opp.

I del c (vel symbol å nytta for dei ukjende storleikane) nytta dei fleste symbola x og y. Eg spurte elevane om det var andre symbol ein kunne brukt. Ein elev foreslo b og h. I tillegg til desse peika eg på at eit hjarte eller ei stjerne og kunne vore brukt. Målet med det var å presisera at det ikkje er kva symbol ein bruker som er det viktige, men den faktiske bruken av symbol.

I klassesamtalen i etterkant av denne oppgåva fokuserte eg på at algebra i all hovudsak er arbeid med generelle samanhengar der bokstavane er hjelpemiddel, og at ikkje det er bokstavane som er algebraen i seg sjølv. Mason m.fl (2005, s. 216) vektlegg og eit slikt fokus:

> ”Familiarity with generalizing is much more likely to support algebraic thinking than is a background of algebra as ‘using letters’ ”.

Den andre oppgåva, der dei skulle diskutera tre alternative forklaringar til ei likning, gav mange ivrige samtalar elevane imellom. Dette var svært interessant å gå rundt og høyra på. Som venta, var det Petter (bokstav som objekt) og Trine (rett forklaring) sine forklaringar det var mest usemje om. Elevane argumenterte for Petter si forklaring med utsegn som at den er ”mest logisk og konkret” og at det er ”den klassiske forklaringa”. Trine si forklaring hadde ifølgje ein annan ikkje noko konkret i seg. Her var det tydeleg at det vart ei kognitiv konflikt for mange.

Det var utfordrande for meg å vita korleis eg skulle rydda opp i konfliktsynet. Etter at elevane hadde jobba med oppgåva i grupper, valde eg å leia diskusjonen inn på å sjå på kva som varierte i dei ulike forklaringane. Grunnen til det var at eg vona at dette ville få dei til å sjå avgrensingane i Jens (bokstav som objekt i seg sjølv) og Petter sine forklaringar. I Jens si forklaring varierte ingenting, og i Trine si var det talet på kantarellar. I Petter si forklaring var det type sjokolade, storleik på sjokolade eller talet på ruter på sjokoladen, men som ein av elevane peika på, var ikkje dette relevant for oppgåva. Sjå og linje 52 – 53 i loggen for ein interessant retning på samtalen, knytt til misoppfatning om å setja variabel lik 1 (jf. avsnitt 2.3.8). Faglærar peika òg på at ein måtte sjå etter i oppgåva kva som var fornuftige forklaringar. Alle elevane, unntatt ein, vart tilslutt einege om kvifor Trine si forklaring måtte vera den rette. Den siste eleven viste forståing i den neste oppgåva som omhandla fyrstikker i ei fyrstikkeske, der han var den fyrste til å peika på at f måtte stå for *antall* fyrstikker. Om dei verkeleg fekk ei ny forståing vil drøftinga av oppfølgingsprøva visa.

Med dei tre tilnærmingane til tolking av bokstaven i denne timen, meiner eg at elevane fekk oppleva å sjå eit problem frå fleire ulike kontekstar, noko og Bell (1993b, s. 13), peikar på som viktig:

> ”It suggests , rather, that there should be extensive exploration of the structural relations within one familiar context, then repetitions of the study in another familiar context, as learners look for signs that the structural aspects are the same”.

Dette var kanskje den timen eg opplevde som mest “effektiv” når det gjeld den diagnostiske undervisingsmetoden. Men det er klart at kva som avgjer om timen var bra, er det langsiktige utbyttet elevane sit att med. Og det kan ikkje berre målast i læraren si gode kjensle etter ein time.

4.2.5 Å rekna med variablar

Tema for den fjerde og siste timen var å læra seg å rekna med variablar. Bakgrunnen for dette var elevar sine misoppfatningar om å rekna utan å ta omsyn til variabelen, og det at nokre ikkje godtek opne svar.

Eg fekk inntrykk av at elevane var blitt meir vant med arbeidsmetoden og dei byrja med ein gong å snakka seg i mellom på diskusjonsoppgåva. På den skulle dei diskutera ulike elevar sine svar på forenklinga av uttrykket 2a + 5b + a. Mange fann fort fram til det rette svaret, men eg ville at dei òg skulle ta for seg dei andre for å bli meir medvitne om mogelege misoppfatningar. Etter å ha diskutert seg i mellom samtala me om oppgåva i fellesskap. Meir konkret fekk eg nokre av gruppene til å fortelja korleis personane kunne ha tenkt for å ha kome fram til dei ulike svara. På denne måten fekk elevane sjølv tenka gjennom ulike misoppfatningar, noko som kan ha ført til ei kognitiv konflikt dersom det var nokon av elevane som sat med ei eller fleire av desse.

Samtalen i etterkant spora eg inn på om 3a + 5b var eit fullgodt svar sjølv om det var eit plussteikn tilstade. Ein elev forklarte det med at dersom ein hadde teke bort ein av variablane ville ein ikkje fått rett svar dersom ein i ettertid hadde fått oppgitt verdien på dei. Det var difor viktig å la uttrykket stå slik det var.

Elevane fekk fleire høve til å formulera ”feilsvar” og misoppfatningar sjølve. Dette gjorde eg ved å skriva opp uttrykket 2 + 3x på tavla, og fekk elevane til å koma med døme på feil svar det var mogeleg å koma fram til frå eit slikt uttrykk. Dessutan spurte eg dei korleis ein person som svara slik tenkte for å koma fram til det svaret. Grunnen til at eg hadde så stort fokus på dette var at eg ønskte at dei skulle få sjå at det er mange mogelege måtar å gjera feil på, og om mogeleg få litt refleksjon kring det. Då dei sjølve måtte formulera korleis desse feila har oppstått vona eg at dei ville sjå avgrensingane av dei.

Algebrabingo[28] var meint som ein aktivitet der elevane kunne få arbeida med rekning med variablar i ei litt anna kontekst enn dei normalt sett gjer. Aktiviteten er ikkje diagnostisk i seg sjølv, men etter mi meining utfyller den på ein god måte grunnlaget elevane fekk i diskusjonsoppgåva, og gjorde vidare at me tilnærma oss emnet frå ulike innfallsvinklar. Det at målet var å få bingo gjorde at dei arbeidde veldig iherdig. Dette er eit døme på ei oppgåve der ein får umiddelbar tilbakemelding på om svaret er rett. I dette tilfellet ville dei ikkje funne svaret sitt i rutene dersom dei hadde rekna feil. Der elevane ikkje fekk til oppgåvene sjølve, fekk dei hjelp av sidemannen. På denne måten fekk dei arbeida med rekneteknikkar utan at det var målet i seg sjølv, jf. Mason m.fl. (2005).

Eg ser i ettertid at eg gjerne burde brukt meir tid på rekning med ulike bokstavar involvert, for å unngå at nokre elevar tolka ulike bokstavar ulikt (sjå avsnitt 4.1.4).

4.2.6 Oppsummering tiltak

Elevane viste i utgangspunktet ei positiv haldning til å arbeida på ein måte som nok var ny for dei. Dette har gjerne å gjera med at faglærar var veldig positiv til arbeidsmetoden og uttrykte dette klart for elevane ved fleire høve. Dei var òg villige til å ta del i samtalane i fellesskap, noko mange elevar kviar seg for å gjera.

Fleire av elevane viste god forståing i timane, og sett frå mitt perspektiv gav dei uttrykk for at dei verkeleg lærte noko. Men spørsmålet å stilla seg er om dei fekk tilstrekkeleg omgrepskunnskap for å unngå at dei overgeneraliserer i møte med liknande oppgåver i framtida. For som Nilssen (1993) peiker på, er misoppfatningane opparbeidde gjennom mange år, og dermed vanskelege å endra gjennom få timar med undervising. Ideelt sett burde eg difor hatt fleire timar til rådighet, men igjen sette rammene av oppgåva grenser for det.

[28] Henta frå: http://matematikk.org/_voksne/uopplegg/vis.html?tid=65940

4.3 Oppfølgingsprøve

I denne delen vil eg sjå på resultata frå oppfølgingsprøva, og samanlikna desse med kartleggingsprøva. Det at ikkje oppgåvene på kartleggingsprøva og oppfølgingsprøva var identiske, gjer at dei ikkje kan samanliknast direkte ved å telja opp antall rette svar. Det blir meir eit spørsmål om å tolka innhaldet og setja dette i samanheng med kor mange av elevane som svara på kvar av dei. Slik kjem det òg innslag av metodetriangulering inn i denne delen av undersøkinga. Sjå vedlegg 7.3.1 for ei samla oversikt over resultata.

4.3.1 Oppgåve 1

Som i avsnitt 4.1.1, valde eg òg her å sjå på misoppfatningane om å rekna utan variabel og å ikkje godta opne svar, under eitt. I 1a (legg saman 4x + x) var målet å finna ut om dei enno nytta potensnotasjon. Det synte seg at det var ein elev som framleis nytta denne, mot tre på førre prøva (3b: legg saman x og 7x). Dei tre neste deloppgåvene inneheldt opne svar. For å sjå korleis elevane handsama dette, er det interessant å samanlikna resultata på 1b og 1d:

Oppgåve 1b: Legg saman 3a + 5b		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		
1	*3a + 5b*		6
2	8ab	Summerer fyrst tala og legg så variablane inntil	6
3	7ab	Tilsvarande som i 1), men har summert feil	1
4	3a 5b	Legg ledda inntil kvarandre	1

Figur 4.3.1.1: Svar på oppgåve 1b

Oppgåve 1d: Legg saman 5x + 2y – 1x		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		1
1	*4x + 2y*		10
2	6xy	Reknar fyrst saman tala, legg så variablane inntil	2
3	4x 2y	Legg ledda inntil kvarandre	1

Figur 4.3.1.2: Svar på oppgåve 1d

Der det i 1b var 6 elevar som fyrst summerte tala, og så la variablane inntil, var det tilsvarande talet i 1d på 2 elevar. Eit tilsvarande tal frå kartleggingsprøva var 6 elevar på oppgåve 3c (legg saman 2x og 3y). Kva er så bakgrunnen for at dei same elevane gjev ulike tolkingar på to liknande oppgåver som dette? Ei mogeleg forklaring kan vera strukturen i oppgåvene. Kanskje tenkte nokre av elevane at i 1b måtte dei ”gjera noko”, ikkje berre la sjølve oppgåva òg vera resultatet. Ei alternativ forklaring som òg er drøfta tidlegare, er at elevane tolkar ulike bokstavar ulikt, og at det vil bidra til ulike svar på liknande oppgåver. Variablane a og b (i 1b) vil då kunna bli tolka som objekt, det som i avsnitt 2.3.6 vart kalla ”fruktsalatalgebra”, medan x og y (i 1d) av fleire av elevane blir tolka som noko meir generelt. Eit døme på dette er å finna hjå ein av elevane som gav svaret 8ab på 1b, og 4x + 2y på 1d.

Küchemann (1981) drøfter ulike tolkingar av den variable, mellom anna å sjå på den som spesifikk ukjent eller som generalisert tal, og meiner at elevane sine tolkingar varierer i møte med ulike oppgåver. Dette kan gjerne setjast i samanheng med elevane sine ulike strategiar i møte med ulike variablar:

> ”[…] it seems likely that in the course of many algebra problems children will flip from one interpretation to the other, depending on which is momentarily the more convenient.”
>
> (Küchemann, 1981, s. 109).

På kartleggingsprøva nytta eg utelukkande x og y som bokstavar, medan òg a og b vart nytta på oppfølgingsprøva. Dette kan vera med på å forklara kvifor resultata ikkje vart betre på oppgåve 1 samanlikna med på kartleggingsprøva. Vidare kan det òg bidra til å forklara kvifor 3 elevar gav svaret 2 i 1c (legg saman 7 – 5a), altså gav variabelen verdi 1, medan ingen svara tilsvarande på til dømes oppgåve 3a (legg saman 3 og 5y) på kartleggingsprøva. På 1c er det 8 som har oversett variabelen og fått 2a, eller liknande, som svar. Det same talet var å finna i kartleggingsprøva på oppgåve 3a.

4.3.2 Oppgåve 2

Fokuset i denne oppgåva var prioriteringar når elevane løyser likningar. Som eg peika på i drøftinga av den fyrste timen fekk dette mindre fokus enn det gjerne burde fått. Dette er noko ein må ha i tankane ved samanlikning av resultata. Den oppgåva som best synte om elevane framleis valde å arbeida frå venstre mot høgre, var 2a:

Oppgåve 2a: Finn verdi for x i 2 + 2 · x = 16		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		
1	*x = 7*		1
2	x = 4	Reknar frå venstre mot høgre, og får 4x=16	12
3	x = 2		1

Figur 4.3.2.1: Svar på oppgåve 2a

Av svaralternativ 2 ser ein at heile 12 av elevane reknar utan å ta omsyn til rekkefølgja på ulike rekneoperasjonar. I den oppgåva det er naturleg å samanlikna med på kartleggingsprøva, 5b (finn verdi for x i 5 – 2 · x = 1), var det tilsvarande talet 3. Men det skal seiast at alle elevane hadde svara på oppgåva på oppfølgingsprøva, noko som ikkje var tilfelle på kartleggingsprøva. Ein bakgrunn for dette kan vera at på kartleggingsprøva fekk ikkje elevane eit heiltal dersom dei rekna frå venstre mot høgre, noko som kan ha gjort at mange gjerne valde å ikkje svara på oppgåva. Som tidlegare nemnd kan ein grunn til dette vera at mange nyttar intuitive strategiar for å løysa slike problem, ved å prøva seg fram til dei finn eit svar som passar. Dette viser ein av elevane som svara x = 4 på 2a: ”2 + 2 = 4. 4·4 = 16”. Ein kommentar på denne løysinga er bruken av likskapssymbolet på ein rett måte, samanlikna med ein annan elev på same oppgåve som svara: ”2 + 2 = 4·4 = 16”.

Å prøva seg fram med ulike heiltal for bokstavane var ikkje mogeleg i 2b. Dette har nok òg gjort sitt til at mange har prøvd å arbeida i det formelle systemet, som til dømes svara i nummer 3, 5 og 6:

Oppgåve 2b: Finn verdi for x i 16 – 2x = 3x + 5		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		5
1	$x = \frac{11}{5}$		0
2	x = 2		1
3	x = 11	Har rekna 3x – 2x i staden for 3x + 2x	2
4	x = -10		1
5	2x + 3x = 16 + 5	Flytter om på ledda, men overser negative teikn	1
6	2x + 3x = 16 – 5	Tilsvarande som i 5)	2
7	x >3, <2	Prøver seg fram og finn at svaret må ligga mellom 2 og 3 (men set teikna feil veg)	1
8	16 – 2 – 1 = 3 + 5 + 5		1

Figur 4.3.2.2: Svar på oppgåve 2b

Booth (1981) skriv at mange elevar nyttar ulike strategiar som ikkje samsvarar med dei formelle strategiane som blir undervist i skulen, og så lenge desse fungerer på enklare oppgåver, ser dei det ikkje som naudsynt å læra seg andre metodar.

> ”The point is, however, not that these child-methods are ’incorrect’, but that each such method has a limit in applicability […]”
>
> (Booth, 1981, s. 30).

Det viktige blir då at ein i fortsetjinga prøver å få elevane til å sjå at dei intuitive metodane er utilstrekkelege på meir komplekse problem, og bidrar til at dei lærer seg formelle metodar.

4.3.3 Oppgåve 3

Denne oppgåva tilsvarer oppgåve 6 på kartleggingsprøva, og fokuserer på bruken av parentesar. Det at 13 av 14 svarer rett på 3a (løys opp og trekk saman (3a + a) + 4a)), kan tolkast som at alt som var naudsynt var repetisjon av reglane, slik som i fyrste undervisingstimen. Dette støtter opp om antakinga frå avsnitt 4.1.2 om at det gjerne ikkje ligg noko misoppfatning til grunn her.

Oppgåve 3b: 3 + 2(a – b)		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		2
1	*3 + 2a – 2b*		2
2	3 + 2a – 2b = 7ab	Løyser opp parentesen rett, men trekker saman svaret	1
3	5c	c = a – b	1
4	5 + a – b		1
5	5ab	Summerer fyrst tala, legg så variablane inntil	4
6	6ab	Multipliserer tala, legg så variablane inntil	1
7	5 · 2a – 2b		1
8	3a – 3b + 2a – 2b	Multipliserer begge tala med variablane i parentesen	1

Figur 4.3.3.1: Svar på oppgåve 3b

Der elevane godtok opne svar på kartleggingsprøva, har fleire av dei i 3b slått svara saman til eitt ledd (svaralternativ 2, 5 og 6). Det er vanskeleg å seia kva som kan vera grunnen til dette. Kanskje har det samanheng med dei ”ulike” variablane som blei diskutert i avsnitt 4.3.1? Det er i hovudsak dei same elevane som ikkje godtok opne svar i fyrste oppgåva som slår saman svara her òg.

4.3.4 Oppgåve 4

Oppgåve 4 hadde som mål å visa elevane sine kunnskapar om likskapsteiknet. Å finna ut meir om dette blir gjerne eit spørsmål om tolking av elevane sine framgangsmåtar.

Oppgåve 4a: Rekn ut 8 = 5 + 3		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		1
1	*8 = 8*		6
2	5 + 3 = 8	Har snudd om for å få ”svaret” på høgre sida	4
3	8 – 3 = 5	Flytta over eine leddet	1
4	8 = 3 + 5	Flytta om på ledda på høgre sida	1
5	8		1

Figur 4.3.4.1: Svar på oppgåve 4a

I 4a er det ikkje mykje å rekna ut, men det eg ville sjå var til dømes om elevane flytta om på ledda før dei gjorde noko meir. Det at fire elevar svara 5 + 3 = 8 (svar nummer 2), syner ei operasjonell forståing av likskapsteiknet, der det som skal reknast ut må vera på venstre sida. Det er ytterlegare to elevar som fyrst flytta om på ledda før dei enda opp med svar nummer 1.

Ein av elevane skreiv dette etter å ha flytta om på ledda: ”antallet er det same, på begge sidene av =tegnet”. Er det kanskje formuleringa av oppgåveteksta som gjer at nokre av elevane tenker at dei må flytta om på ledda?

Svara 1 – 4 er alle rette svar som viser likskap på høgre og venstre sida. Og at det er 4 fleire enn på kartleggingsprøva (9b: rekn ut 6 = 4 + 2) som godtek 8 = 8 som eit svar, må seiast å vera ei utvikling i rett retning. Vidare er det fleire som svarer på oppgåvene no enn sist. Oppgåve 4b (rekn ut 5x = 2x + 3x) syner tilsvarande resultat som 4a.

Oppgåve 4c: Rekn ut 4 + 4x = 12x		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		4
1	$x = \frac{1}{2}$		2
2	4 + 12 – 4 = 12	Prøver å få det likt på begge sider av likskapsteiknet?	1
3	4 + 4x + 4 = 12x	Prøver å få det likt på begge sider av likskapsteiknet?	1
4	8x = 12x	Overser variabel, og trekker saman 4 og 4x på venstre sida	1
5	x = 1,5		1
6	x = 4	Endrar ikkje forteikn når leddet blir flytta over på andre sida.	1
7	16 = 4	Flytter 4x og 12x over på same sida, men endrar ikkje forteikn	1
8	x = 2	Reknar med 12 i staden for 12x: 4 + (4·2) = 12	1
9	$4 + 4x \neq 12x$		1

Figur 4.3.4.2: Svar på oppgåve 4c

Oppgåve 4c kan samanliknast med 9a (rekn ut 5 = 2x + 3x) på kartleggingsprøva, med den skilnaden at i 4c får ein eit rasjonalt tal[29] som svar. På denne måten var oppgåva gjerne litt utfordrande for ein del av elevane, og berre to stykk har gjeve eit rett svar. Sjølv om svaralternativa 2 og 3 ikkje kan seiast å vera rette, syner dei likevel at elevane prøver å få like mykje på kvar side av likskapsteiknet. Dessutan er det ingen av elevane som berre flyttar om på ledda for å få 4 som ”svar” på høgre sida, som avsnitt 4.1.3 syner at var meir utbreidd på kartleggingsprøva.

Ein av elevane skriv slik: ”uten x’en bak 12 hadde jeg tenkt: 4 + (4·2), 4 + 8 = 12, x=2”. På denne måten viser han at ”svaret” skal stå på høgre sida, og når det ikkje er eit numerisk ledd som står der byr det på utfordringar. Det positive her er å sjå bruken av parentesar.

Ei vidare drøfting av denne oppgåva vil nok likna skildringa av 2b (finn verdi for x i 16 – 2x = 3x + 5). Det som manglar for mange av elevane er å forstå likningsløysing når dei ikkje lenger berre kan prøva seg fram. Eg vil heller kalla det ein kombinasjon av manglande reknetrening og at dei set for stor lit til intuitive strategiar, enn ei misoppfatning.

4.3.5 Oppgåve 5

Oppgåve 5: Skriv matematikkforteljing til 3b + 2b + 2a = 5b + 2a	**Frekvens**
Ikkje svart	4
Rett svar	
Konkret objekt	8
Blanding av rett svar og konkret objekt	2

Figur 4.3.4.1: Svar på oppgåve 4a

Denne oppgåva skulle, slik som oppgåve 10 på kartleggingsprøva (skriv matematikkforteljing til 2a + 5a = 7a), visa elevane si variabelforståing. Like mange elevar tolka bokstavane som konkret objekt både på kartleggingsprøva og oppfølgingsprøva. Ved fyrste augnekast er resultatet her heller dårleg. Men det er fleire faktorar som må takast med i drøftinga. Den fyrste er at fleire av elevane har prøvd å svara på oppgåva, noko som er ei positiv utvikling. For som tidlegare nemnd er dette ei uvant type oppgåve for dei. Vidare er variablane her framleis a og b, og ikkje x og y, noko som kan framkalla vanskar for nokon. Til sist skal det seiast at her har eg brukt to ulike variablar medan det på kartleggingsprøva berre var bokstaven a.

[29] Tal som kan skrivast som brøk, med heiltal i teljar og nemnar

Sjølv om ingen har kome inn i kategorien ”rett svar”, er det to av elevane som er på rett spor. Ikkje slik at tolkinga deira kan seiast å syna kva ein variabel er, men det synast at dei har fått med seg noko frå timane. Men framleis har dei ein veg å gå fram mot ei tilfredstillande omgrepskunnskap om variablar. Ingen av desse to elevane hadde svara på oppgåve 10 på kartleggingsprøva. Kanskje er det slik at elevar som i utgangspunktet ikkje visste korleis ein variabel skulle tolkast var meir opne for ny lærdom om dette, enn dei som alt hadde gjort seg opp ei meining på kartleggingsprøva? Dømet under viser ei slik tolking:

”En gang skulle Lise kjøpe tre snopeposer med x antall snop i. Dagen etter kjøpte hun også to snopeposer med x antall i. Samtidig kjøpte hun 2 poser med klinkekuler med x antall i. Hun regnet ut at det hun hadde fått, og fikk 3b + 2b + 2a = 5a + 2a”

Eleven forklarar vidare at 5b er ”antall snopeposer med x antall snop i”, og 2a ”klinkekuleposer med x antall oppi”. Det som gjer at eg seier at eleven er ”på rett veg”, er at det ikkje er bokstaven som er objektet i seg sjølv. Vidare har eleven forstått at talet framfor bokstaven skildrar ein faktor å multiplisera den variable med. Det som syner at eleven ikkje har forstått alt, er at ho verkar å oversjå bokstavane a og b som variablar i skildringane, men tek med x i staden. Igjen kan dette knytast til antakinga om forståinga av x og y som variablar, medan andre bokstavar som a og b som objekt.

4.3.6 Oppsummering etter oppfølgingsprøva

Resultata på oppfølgingsprøva var nok dårlegare enn eg på førehand hadde sett for meg. Samstundes er det positivt at nokre av elevane får til oppgåver dei ikkje greidde på kartleggingsprøva. Det viktige her er ikkje berre resultata i seg sjølv, men òg kva dei fortel om utfordringane knytt til diagnostisk arbeid med misoppfatningar i algebra. Eg vil i dette avsnittet freista å trekkja saman nokre trådar i den samanheng. Ei konkluderande drøfting er å finna i kapittel 5.

I det vidare arbeidet for å overvinna misoppfatninga om å alltid rekna frå venstre mot høgre, trur eg det kan vera nyttig med ei samanlikning med det daglege språket der ein alltid les frå venstre mot høgre. Ei oppgåve som den i fyrste undervisingstimen der personen rekna feil når ho ikkje prioriterte rekneoperasjonane, kan gjerne vera grunnlag for ein slik samtale om dette med fokus på at algebraisk språk ikkje er det same som språket me nyttar i daglegtalen.

At eg ikkje var kjend med utfordringane knytt til mange av elevane sine tolkingar av dei ulike bokstavane, både i oppgåve 1 (der dei la saman uttrykk) og oppgåve 5 (matematikkforteljinga), syner seg på resultata. Men samstundes gjorde bruken av fleire typar bokstavar på oppfølgingsprøva at denne manglande forståinga synte seg tydelegare. Ikkje minst vart eg var på korleis dette verkar inn på handsaminga av variablane, og på korleis elevane møter opne svar i oppgåver. Alt i alt har desse ulike handsamingane sin bakgrunn i manglande forståing av bokstavane som variablar. Den manglande variabelforståinga og elevane sin bruk av intuitive strategiar vil eg seia er nokre av dei mest framtredande utfordringane som framleis syner seg.

Når det gjeld forståing av likskapsteiknet tenker eg at elevane treng å arbeida meir med oppgåver som fokuserer særskilt på dette, slik som dei fekk i den andre undervisingstimen. Resultata på oppgåve 4 (handsaming av likskapsteiknet i likningar) på oppfølgingsprøva synte at mange hadde fått tenkinga inn på rett spor, sjølv om dei kanskje ikkje hadde fått den fulle forståinga enno. Så for at elevane framover skal få ei djupare forståing trur eg det er viktig, både når det gjeld desse elevane, og generelt, at lærar fokuserar på korleis han eller ho sjølve nyttar likskapssymbolet. Dette, saman med ein bevisst språkbruk, kan vera med på å endra korleis elevane tenker om likskapssymbolet. Slik kan elevane få eit fast og stødig grunnlag for den vidare læringa.

5 AVSLUTNING OG KONKLUSJON

5.1 Konklusjon

Gjennom arbeidet med prosjektet har problemstillinga vore den raude tråden. Denne har blitt gradvis forma og gradvis smalare etter kvart som materialet har vorte større. Eg har fleire stader møtt på vegkryss og har måtta finna ut kva veg eg ville leia analysen inn på. Materialet var stort og hadde potensiale til å gjeva utgangspunkt for mange interessante perspektiv på emnet.

Når det gjeld dei to fyrste delane av problemstillinga; "kva misoppfatningar i matematikk (algebra) kjende frå tidlegare forsking er å finna på 10.trinn, og kva er elevane sine eigne tilnærmingar til dei?", kan dei gjerne svarast enklare på enn tredje delen; "korleis kan desse handsamast ved hjelp av diagnostisk undervising?" Kort sagt kan det seiast at alle misoppfatningane frå litteratur og tidlegare forsking som eg tok med på kartleggingsprøva, synte seg i større eller mindre grad på 10.trinn. I gruppa mi var òg alle misoppfatningane representert. To av dei som peika seg ut i denne gruppa var nok gjerne prioriteringsproblem (avsnitt 2.3.1) og det at ulike bokstavar tyder ulike tal (avsnitt 2.3.7). Denne siste fekk ikkje fokus i ein eigen time i undervisingsopplegget mitt, men vart tatt med inn i timen som omhandla forståing av den variable. Jamt over er det vanskeleg å setja klare skilje mellom kva som skilde seg mest ut fordi fleire misoppfatningar ofte syner seg saman, noko som gjer det vanskeleg å telja dei opp kvantitativt. Måtane elevane arbeidde med oppgåvene på, har eg drøfta i samband med dei aktuelle oppgåvene.

Dei to fyrste delane av problemstillinga la grunnlaget for arbeidet med den siste delen. Korleis kan misoppfatningane handsamast ved hjelp av diagnostisk undervising? For å kunna gje eit svar på dette tok eg for meg eit utval av misoppfatningane frå kartleggingsprøva, og nytta desse som eit utgangspunkt for undervisingstimane. Det skal seiast at måten eg gjorde det på ikkje er eit endeleg "svar", men ei mogeleg tilnærming ved å bruka den metoden som diagnostisk undervising er.

Resultata av arbeidet mitt med den diagnostiske tilnærminga til misoppfatningar i algebra på ungdomsskulen, meiner eg at i hovudsak kan samanfattast i tre punkt. Gjennom arbeidet med dei ulike stega i undersøkingane synte dei seg som hovudutfordringar som verka sterkt inn på korleis elevane handsama algebraoppgåvene:

- Det aritmetiske grunnlaget
- Forståinga av bokstavsymbola
- Elevane sin bruk av intuitive strategiar

Det er vanskeleg å setja eit klart skilje mellom desse tre punkta, særskilt verkar det siste punktet sterkt inn på handsaminga av dei andre. Det er vidare viktig å presisera at eg ikkje seier at desse tre punkta er dei som gjev alle misoppfatningane, men at dei ser ut til å ha innverknad på arbeidet med algebra, og ikkje minst påverknad på korleis elevar møter oppgåver innan emnet. Til trass for at utvalet mitt av elevar var for lite til å kunna trekka nokre generelle konklusjonar, vil eg seia at desse tre punkta peika seg tydeleg ut som store faglege utfordringar. Eg vil i dei neste avsnitta kort utdjupa kva som ligg i punkta for å visa utfordringar knytte til arbeidet med å handsama misoppfatningar i algebra.

5.1.1 Det aritmetiske grunnlaget

Som tidlegare nemnd kan ein ut frå eit konstruktivistisk syn på læring seia at elevane ikkje byrjar med heilt blanke ark når dei skal læra algebra. All ny læring må knytast opp til dei allereie eksisterande nettverka av kunnskap. Og det er i aritmetikken at elevane må ta utgangspunkt for å systematisera algebrakunnskapen sin. Då seier det seg sjølv at dersom elevane alt på det nivået har misoppfatningar, må desse takast på alvor før ein kan bygga på med ny kunnskap for at ikkje denne òg skal bli avgrensa.

Manglande aritmetisk grunnlag synte seg fleire stader i mine undersøkingar[30]. Det kan nemnast at mange elevar "les" oppgåva som ein les ei tekst frå venstre mot høgre, eller støyter på problem når dei kjem fram til svar som ikkje kan skrivast som heiltal. Fleire slike døme, mellom anna når det gjeld arbeid med likskapsteiknet, kan syna korleis manglande aritmetisk omgrepsforståing gjev feil svar når ein kjem til algebra. Meir konkret tenker eg då på at elevane kombinerer fleire steg i ei utrekning på ein måte som gjer at ein ikkje får likskap på kvar side av likskapsteiknet.[31] Sjølv om ikkje likskapsteiknet i seg sjølv er aritmetisk, er dette

[30] Eit døme på dette finn ein ved samanlikninga av oppgåve 5b frå kartleggingsprøva (finn verdi for x i $5 - 2 \cdot x = 1$) og 2a frå oppfølgingsprøva (finn verdi for x i $2 + 2 \cdot x = 16$) i avsnitt 4.3.2.
[31] Sjå avsnitt 4.3.2, der ein elev har vist utrekninga: $2+2=4 \cdot 4=16$. På denne måten er det ikkje likskap over alt.

ein måte elevane har vendt seg til å arbeida på i samband med talrekninga, og som dei har tatt med seg vidare inn i arbeidet med algebra.

Det er mange delar av aritmetikken som bør vera på plass hjå elevane. Ei utfordring er dermed å finna ut kor skoen trykker mest. Og ikkje minst korleis ein best kan handsama desse problema. Eg ser på det som viktig at ein i skulen har eit tidleg fokus på å legga eit slikt grunnlag for å unngå at alt hopar seg opp i dei siste trinna i grunnskulen. Har ikkje elevane eit fast aritmetisk grunnlag, kan ein vidare tenka seg at motivasjonen for å læra algebra lett sviktar når ein ikkje ser hensikta eller meininga i det ein held på med.

5.1.2. Forståing av bokstavsymbola

Som Mason m.fl. (2005) peikar på, er det å forstå kvifor ein nyttar bokstavar i algebra det same som å forstå kva algebra er. Vidare meiner dei at poenget med algebra er å koma til eit punkt der symbola gjer heile arbeidet for ein. Jobben som gjenstår vert å sjekka at utrekningane er gjort skikkeleg. Det syner seg at mange av elevane ikkje har forstått denne bruken av bokstavsymbol, og dermed ikkje greier å handtera dei i møtet med meir utfordrande oppgåver.

Fokuset i mine undersøkingar i denne samanheng låg på både forståinga av bokstavane som variablar, og vidare handsaminga av dei i ulike kontekstar. Det er tydeleg at alle anvendingar av bokstavar i algebra må byggast på den grunnleggande forståinga av kva ein variabel er[32]. Har elevane ikkje denne forståinga vil mange prøva å tolka oppgåvene dei arbeider med på andre måtar, for å prøva å sjå meininga i dei. Utfordringa blir dermed å legga til rette for ei undervising der ikkje berre bruken av bokstavane kjem i fokus, men og forståinga av dei.

5.1.3 Elevane sin bruk av intuitive strategiar

Sjølv om elevane ikkje ser meininga i ei oppgåve, vil dei fleste likevel klara å koma fram til eit ”svar”. Dette er tydeleg når ein ser på talet på ulike svar på mange av oppgåvene.

[32] Dette var tydeleg ut frå til dømes oppgåve 1b i oppfølgingsprøva (legg saman 3a + 5b). Hadde elevane forstått bruken av bokstavane ville dei ikkje ha gjeve svar som 8ab eller 3a 5b på denne.

> ”Learners who have decided that mathematics is not supposed to make sense, but that an answer is always required, manage to produce an answer using the given numbers, but without ’entering’ the situation of the problem.”
>
> (Mason m.fl., 2005, s. 216).

Ein kan seia at elevane tek i bruk alternative strategiar i arbeidet med bokstavane, for på denne måten å koma fram til svara sine. Og slik kjem bruken av dei intuitive strategiane inn. Når det gjeld det aritmetiske grunnlaget og forståinga av bokstavsymbola, er dei begge utfordringar knytte til byggesteinar for algebraundervisinga. Å sjå på elevane sin bruk av intuitive strategiar blir å sjå på elevane sine måtar å handsama oppgåvene dei møter i den samanheng. Men det er klart at dei to andre punkta verkar inn på korleis desse tilnærmingane blir. Dersom ein elev ventar at eit bokstavsymbol skal stå for eit heiltal, kan det gje seg utslag i at han eller ho nyttar ei anna tilnærming enn ein elev som ikkje har det same synet.

MacGregor & Stacey (1997) ser på intuitive antakingar og ”sensible, pragmatic reasoning” om ukjente notasjonssystem som ein av fire kjelder til kvifor det er så utfordrande for mange å nytta algebraisk notasjon. Dette støtter opp om påstanden min om at dei intuitive strategiane verkar inn på møtet med bokstavar i algebra, og på vidare tolkinga og handsaminga av slike oppgåver. At dette er utbreidde strategiar, synte resultata frå TIMSS 2007, der det kom fram at norske elevar gjorde det relativt best på oppgåver der dei kunne resonnera seg fram til svaret utan å nytta formell matematisk kunnskap (Grønmo & Onstad, 2009).

Som vist i sitatet i 4.3.2, vil ein elev som arbeider med intuitive strategiar på eitt eller anna punkt møta ei oppgåve der strategiane hans ikkje strekk til. Og det er nett her at den faglege utfordringa kjem inn. Korleis skal ein få elevane til å innsjå at strategiane deira er utilstrekkelege? Og korleis kan ein gå fram for å innarbeida nye strategiar som kan erstatta dei intuitive, og ikkje minst få elevane til å nytta dei? Dette er spørsmål som kunne vera interessante å arbeida vidare med i samband med algebraundervising, som ei fortsetjing av det som har kome fram i denne oppgåva. Og ikkje minst er det spørsmål som kan bidra til faglege refleksjonar for matematikklærarar i møte med slike utfordringar.

5.2 Avsluttande betraktningar

Når ein arbeider med elevar arbeider ein med mange ulike individ med kvar sine personlegdomar. Dette må takast i betraktning når ein drøftar det som går for seg i klasseromma, òg det som har blitt drøfta i denne oppgåva. Eg meiner å kunna seia at mine tiltak i klasserommet med velvalde oppgåver, samtale og konfliktdiskusjonar retta direkte inn mot dei på førehand avdekte misoppfatningane, er konkrete døme på korleis ein kan koma dei til livs. Men som ein meir generell konklusjon vil eg fyrst og fremst visa til dei tre hovudutfordringane (det aritmetiske grunnlaget, forståinga av bokstavsymbola, og bruken av intuitive strategiar) frå avsnitt 5.1, som meir overordna utgangspunkt for å handsama misoppfatningar i algebra ved hjelp av diagnostisk undervising. Korleis ein vel å tilnærma seg desse vil vera avhengig av elevane ein arbeider med, eigen pedagogisk ståstad og kva erfaringar ein sjølve har gjort seg på området.

Ut frå ei slik undersøking som har blitt gjort her er det vanskeleg å seia noko om relativ suksess. Det eg derimot kan seia noko om er at eg opplevde eit bra engasjement blant elevane i timane. Dei var aktive i arbeidet med oppgåvene og samtalane, og gav respons på utsegn og spørsmål frå meg. Vidare var faglærar svært begeistra over måten undervisinga vart gjennomført på. Men som drøftingane viste hadde ikkje dei fire undervisingstimane dei store resultatmessige innverknadane som eg hadde sett for meg på førehand. Kva fortel det? Vil det seia at min måte å arbeida diagnostisk på ikkje var tilstrekkeleg for å gjera noko med utfordringane i algebra? I hovudsak trur eg mykje ligg i tidsbruken. Skal diagnostisk undervising bli ein suksess som syner seg i konkrete forbetringar i elevprestasjonar, treng ein å arbeida med det over eit lenger tidsrom enn det eg kunne gjera.

Det er klart at alle undervisingsmetodar har sine avgrensingar, fordelar og ulemper. Men studiar gjort på diagnostisk undervising syner suksess samanlikna med andre tilnærmingar, sjå til dømes Birks (1987). Han peikar òg på at dei fleste undervisingsmetodar vil ha vanskar med å fjerna misoppfatningar, men meiner at diagnostisk undervising kan vera med på å hjelpa eleven med å overkoma desse (ibid).

Hovudsaken er at når så mange elevar opplever å koma til kort når det gjeld algebra, må noko gjerast. Med andre ord står ein som lærar ovafor store utfordringar når det gjeld å finna passande tilnærmingar for å handsama alle misoppfatningane. For min eigen del meiner eg å ha vist at diagnostisk undervising er eit godt hjelpemiddel fordi det tek så konkret tak i den einskilde eleven sine utfordringar, og ikkje minst fordi det inneber eit fokus på å vera mentalt aktiv og tilstade i timane. Utfordringar er å finna oppgåver som er best mogeleg tilpassa den misoppfatninga ein vil arbeida med, elevflokken sjølv, og som ikkje minst er mest mogeleg engasjerande.

Det å arbeida med diagnostisk undervising har gjort at eg som lærar har blitt meir bevisst på korleis ein kan tilnærma seg slike utfordringar i matematikken, noko eg trur kan bli verdifullt i møtet med læraryrket. Eg vonar at mine døme i denne oppgåva kan vera med på å gje andre lærarar konkrete døme på korleis ein kan handsama misoppfatningar i algebra. For eg trur at ei diagnostisk undervising som tek på alvor dei tre nemnde utfordringane vil kunna vera fruktbar og ha noko viktig å tilføra matematikkundervisinga.

6 LITTERATURLISTE

- Bell, A. (1993a). Some experiments in diagnostic teaching. I: *Educational Studies in Mathematics, 24(1), 115-137.*
- Bell, A. (1993b). Principles for the design of teaching. I: *Educational Studies in Mathematics, 24(1), 5-34.*
- Bell, A., Swan, M., Onslow, B., Pratt, K. & Purdy, D. (1986). *Diagnostic Teaching. Teaching for long term learning.* Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (2009). *Algebra för alla. Nämnaren Tema 3.* NCM, Göteborgs universitet.
- Booth, L.R. (1981). Child-methods in secondary mathematics. I: *Educational studies in Mathematics, 12(1), 29-41*
- Booth, L.R. (1999). Childrens Difficulties in Beginning Algebra. I: Moses, B. (Red.) *Algebraic thinking, Grades K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Booth, J.L., & Koedinger, K.R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. I: B.C. Love, K. McRae, & V. M. Sloutsky (Red.). *Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society (571-576).* Austin, TX: Cognitive Science Society.
- Botten, G. (2003). *Meningsfylt matematikk, nærhet og engasjement i læringen.* Bergen: Caspar Forlag.
- Birks, D. (1987). *Reflection: A Diagnostic Teaching Experiment.* Master of Education thesis, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
- Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Læringssenteret.
- Brekke, G., Grønmo, L.S. & Rosén, B. (2000). *Rettleiing til algebra. Kartlegging av matematikkforståing.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter (NLS)
- Carraher, D., Schliemann, A.D. & Brizuela, B.M. (2000). *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions.* Plenary Presentation at PME-NA XXII, Tucson, AZ, October 7-10, 2000. (http://earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2003/Carraheretall_PMENA2000_PBS.pdf, 22.03.2012)

- Eves, H. (1983). *An Introduction to the History of Mathematics.* Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Grønmo, L.S. (2005). Matematikkprestasjoner i TIMSS og PISA. *Nämnaren 3/2005, 5-11.*
- Grønmo, L.S. & Bergem, O.K. (2009). Prestasjoner i matematikk. I: L.S. Grønmo & T. Onstad. (red). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007.* Oslo: Unipub.
- Grønmo, L.S. & Rosén, B. (1998). Att tänka algebraisk. *Nämnaren 1/1998, 46-49.*
- Grønmo, L.S. & Rosén, B. (1998). Att förstå algebra. *Nämnaren 4/1998, 35-41.*
- Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder.* Bergen: Fagbokforlaget.
- Hermansen, M. (2006). *Læringens univers.* Oslo: Gyldendal Akademisk.
- Holme, A. (2004). *Matematikkens historie 2. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel*. Bergen: Fagbokforlaget.
- Imsen, G. (2006). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi.* Oslo: Universitetsfolaget.
- Kielland, A.L. (1999). *Gift*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. I: K.M. Hart (Red.). *Childrens understanding of mathematics.* London: John Murray Publishers.
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.
- MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students understanding of algebraic notation. I: *Educational Studies in Mathematics, 33(1), 1-19*
- Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S.(2005). *Developing thinking in algebra*. London: Sage Publications Ltd.
- Nilssen, T.I. (1993). *Konstuktivisme i klasserommet*. Masteroppgåve i realfagdidaktikk, Det matematiske-naturvitenskapelige faktultet, Universitetet i Oslo.
- Olsen, R.V. (2010). Matematikk i PISA. I: M. Kjærnslie & A. Roe (red). *På rett spor. Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009*. Oslo: Univeristetsforlaget.
- Russell, M., O'Dwyer, L.M. & Miranda, H. (2009). Diagnosing students' misconceptions in algebra: Results from an experimental pilot study. I: *Behavior Research Methods, 41(2), 414-424.*

- Skaalvik, E.M & Skaalvik, S. (2007). *Skolen som læringsarena. Selvoppfatning, motivasjon og læring.* Oslo: Universitetsforlaget.
- Sjøberg, S. (2009). *Naturfag som allmenndannelse. En kritisk fagdidaktikk.* Oslo: Gyldendal Akademisk
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. I: *The Mathematics Teacher, 90(2), 110-113.*
- Steinle, V., Gvozdenko, E., Price, B., Stacey, K. & Pierce, R. (2009). Investigating Student's Numerical Misconceptions in Algebra. I: R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Red). *Crossing divide*s*: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2). Palmerston North, NZ: MERGA.

Vedlegg 7.1: Godkjenning frå Norsk Samfunnsvitenskapelig datatjeneste

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Christoph Kirfel
Matematisk institutt
Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 08.07.2011 Vår ref: 27361 / 3 / MAB Deres dato: Deres ref:

KVITTERING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 07.06.2011. Meldingen gjelder prosjektet:

27361	*Misopfatningar i algebra i ungdomsskulen*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Christoph Kirfel*
Student	*Anne Berit Hompland*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, eventuelle kommentarer samt personopplysningsloven/-helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/forsk_stud/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://www.nsd.uib.no/personvern/prosjektoversikt.jsp.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 31.12.2012, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Marte Bertelsen

Kontaktperson: Marte Bertelsen tlf: 55 58 33 48
Vedlegg: Prosjektvurdering
Kopi: Anne Berit Hompland, Klaus Hanssensvei 27 B, 5053 BERGEN

Vedlegg 7.1.1: Informasjonsskriv

Informasjon til elevar og føresette angåande elevdeltaking i masteroppgåve

Eg er student ved Universitetet i Bergen på integrert lektorutdanning, og er no i gang med masteroppgåve i matematikkdidaktikk. Temaet for oppgåva er algebra i ungdomsskulen, med vekt på misoppfatningar elevar har innan dette emnet. Heile 10.trinn kjem til å gjennomføra ein enkel kartleggingstest. Det vidare fokuset vil så liggja på elevane på meistringsnivå 3. Her vil det, i samarbeid med faglærar, bli gjennomført eit undervisningsopplegg knytt til det som kjem fram etter analysering av testane. Dette opplegget vil strekka seg over eit par veker, og blir ein del av undervisinga i algebra for denne gruppa. I etterkant av dette blir det gjennomført ein re-test av elevane for å sjå korleis opplegget har fungert. Undervisingsopplegget vil bli godkjent av faglærar.

I tillegg til at alle elevane i klassa skal delta på dette undervisingsopplegget ønskjer eg å intervjue ca. 4 av elevane. Det er frivillig å delta på intervju. Intervjuet vil omhandle korleis misoppfatningar innan algebra kan oppstå. Det vil foregå som ein samtale om oppgåvene og framgangsmåtar, og vil etter planen vara i om lag 15 minutt. Eg kjem til å bruka bandopptakar medan me snakkar saman.

Alle data vil bli behandla konfidensielt, og ingen enkeltpersonar vil kunna bli gjenkjent i den ferdige oppgåva. Opplysingane blir anonymisert og opptaka blir sletta når oppgåva er ferdig, innan utgangen av 2012.

Dersom de lurer på noko kan de ta kontakt ved å senda ein e-post til anne.hompland@student.uib.no. De kan og ta kontakt med rettleiaren min, Christoph Kirfel, ved matematisk institutt på tlf. 55 58 48 73. I tillegg kan spørsmål rettast til faglærar ved skulen.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste A/S.

Med vennlig helsing
Anne Berit Hompland

Vedlegg 7.2: Kartleggingsprøve

OPPGÅVER I ALGEBRA

Namn: ………………………………………………………………………………………..

Mattelærar: …………………………………………………………………………………..

Dette er ein kartleggingsprøve som ikkje har innverknad på karakteren din i faget. Den vil kun bli brukt som ein hjelp for å forstå din måte å tenka på når du løyser oppgåver, for å kunne gjera mattetimane best mulig.

1) Per skal finna verdiane for x og y i uttrykket: x + y + z = 21. Han har tre forslag:

a) 1, 5, 15

b) 6, 11, 4

c) 7, 7, 7

Sett ring rundt svaret/svara du meiner er rette

2) Legg saman:

a) 4x og 7x Svar:

……………………………………………………………………………………….

b) 3y + 5x – 2y Svar:

……………………………………………………………………………………….

c) 6y – 5x Svar:

………………………………………………………………………………………

3) Legg saman:

a) 3 og 5y Svar:

…………………………………………………………………………………………….

b) x og 7x Svar:

…………………………………………………………………………………………….

c) 2x og 3y Svar:

…………………………………………………………………………………………….

d) 1 og 5+x Svar:

…………………………………………………………………………………………….

4) Kva for nokre av uttrykka nedanfor er like med 2 – 3x? Sett ring rundt det/dei du meiner er rett

a) 2 + 3x

b) 2 + (-3x)

c) -3x + 2

d) 3x – 2

5) Finn ein verdi for x i likningane:

a) 3 + x = 10

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

b) 5 – 2 · x = 1

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

c) $4x + 6 = 18$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

6) Løys opp parentesane og gjer uttrykka enklare:

a) $3x + (2x + x)$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

b) $4a + (a + 2y)$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

c) $2(a – b) + 7(bc)$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

d) $(a + 2b)(2a + b) – (a + b)$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………….

7) Er likningane nedanfor korrekte uansett kva verdi variabelen har? Dersom du meiner eit eller fleire av dei er *feil*, sett ring rundt det.

a) $2 + y = y + 2$

b) $3 \cdot b = b \cdot 3$

c) $\frac{6}{n} = \frac{n}{6}$

Grunngje kvifor du meiner at eit eller fleire av svara er gale:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

8) Rekn ut:

a) $2x = -4$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

b) 4x = 9

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

c) 3 + 5x =3x

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

9) Rekn ut:

a) 5 = 2x + 3x

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

b) 6 = 4 + 2

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

c) $3y + 1y = 4y$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

10) Skriv ei matematikkforteljing som du meiner passar til denne likninga:

$2a + 5a = 7a$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Vedlegg 7.2.1: Resultat frå 10.trinn

Oppgåve 1: Finn verdiane for variablane i x + y + z = 21		**Frekvens**	**Prosent**
1	Ikkje svart	5	3,18
2	a (1, 5, 15)	17	10,8
3	b (6, 11, 4)	17	10,8
4	c (7, 7, 7)	12	7,64
5	ab	48	30,6
6	ac	5	3,18
7	bc	1	0,64
8	*abc*	52	33,1

Oppgåve 2a: Legg saman 4x og 7x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		3	1,91
1	*11x*		146	93,0
2	$11x^2$	Potensnotasjon	3	1,91
3	16 og 49 = 65	Gir verdi til variabelen: 4x=4·4 og 7x=7·7	1	0,64
4	11·2x	x + x = 2x	1	0,64
5	12x		1	0,64
6	4x7x	Legg ledda inntil kvarandre	1	0,64
7	21x		1	0,64

Oppgåve 2b: Legg saman 3y+ 5x – 2y		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		8	5,10
1	*5x + y*		122	77,7
2	1y – 5x		1	0,64
3	5x – y		3	1,91
4	1y, 5x	Får ut to ”svar”	1	0,64
5	6x, 6y	Overser variabel	4	2,55
6	5x1y	Legg inntil	5	3,18
7	6xy	Handsamar fyrst tala, og legg variablane inntil	2	1,27
8	8yx – 2y	Summerer dei positive ledda	1	0,64
9	8x – 2y	Slurvefeil, bytta om to variablar	1	0,64
10	5x + 5y	Overser at det eine leddet er negativt	3	1,91
11	5y – 5x		1	0,64
12	1·2y + 5x		1	0,64
13	15y		1	0,64
14	10y	Summerer alle tala	1	0,64
15	5y		1	0,64
16	$6y^2x$	Handsamar fyrst alle tala, slår saman variablane, og legg inntil	1	0,64
17	0		1	0,64

Oppgåve 2c: Legg saman 6y – 5x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		28	17,8
1	*6y – 5x*		97	61,8
2	6 – 5x		1	0,64
3	6y + 5x		1	0,64
4	1yx	Reknar fyrst tal, legg så til variabel	16	10,2
5	1x, 1y	Får ut to ”svar”	4	2,55
6	5x6y	Legg inntil	1	0,64
7	11xy	Summerer tala, og legg variablane inntil	2	1,27
8	1y5x		1	0,64
9	10x		1	0,64
10	-4y		1	0,64
11	1y + 4x		1	0,64
12	$1y^x$	Potensnotasjon	1	0,64
13	6y og 5x		1	0,64
14	65 – yx	Sortert tal og variablar kvar for seg	1	0,64

Oppgåve 3a: Legg saman 3 og 5y		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		17	10,8
1	*3 + 5y*		87	55,4
2	8y	Summerer tala, og legg variabel inntil	45	28,7
3	7y		1	0,64
4	35y, 5y3	Slår saman	3	1,91
5	$\frac{5y}{5} = \frac{3}{5}$		1	0,64
6	3 + y		1	0,64
7	15y	Multipliserer tala og legg til variabelen	2	1,27

Oppgåve3b: Legg saman x og 7x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		12	7,64
1	*8x*		127	80,9
2	$7x^2$	Potensnotasjon	11	7,01
3	7xx	Legg variablane inntil	1	0,64
4	x7x	Legg variablane inntil	1	0,64
5	7·2x		1	0,64
6	7x		3	1,91
7	8x = 64	8x = 8·8, gir x numerisk verdi	1	0,64

Oppgåve 3c: Legg saman 2x og 3y		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		23	14,6
1	*2x + 3y*		91	58,0
2	5xy	Summerer tala og legg variablane inntil	30	19,1
3	2x3y	Legg tal og variablar inntil kvarandre	7	4,46
4	6xy	Multipliserer tala, og legg variablane inntil	2	1,27
5	5y	Gir verdi til x, evt overser den	1	0,64
6	7y	Gir verdi til x? Til dømes: $2 \cdot 2 + 3y = 7y$	1	0,64
7	3x + 3y		1	0,64
8	$5x^y$	Potensnotasjon	1	0,64

Oppgåve 3d: Legg saman 1 og 5 + x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		21	13,4
1	*6 + x*		87	55,4
2	6x	Legg tal og variablar inntil kvarandre	39	24,8
3	7x		2	1,27
4	1 + 5 + x		1	0,64
5	5x + 1		2	1,27
6	5 + x		1	0,64
7	6 + y	Blanda saman x og y	1	0,64
8	6x – x		2	1,27
9	4x	5 - 1 i staden for 5 + 1	1	0,64

Oppgåve 4: Kva for nokre av uttrykka er like som 2 – 3x?	**Frekvens**	**Prosent**
Ikkje svart	11	7,01
a (2 + 3x)	2	1,27
b (2 + (-3x))	51	32,5
c (-3x + 2)	11	7,01
d (3x – 2)	19	12,1
bc	34	21,7
bd	17	10,8
cd	8	5,10
abc	1	0,64
bcd	2	1,27
abcd	1	0,64

Oppgåve 5a: Finn verdi for x i 3 + x = 10		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		8	5,10
1	*x = 7*		143	91,1
2	x = -7		1	0,64
3	3x = 10	Har ikkje fullført rekninga	1	0,64
4	x=6	Reknefeil?	3	1,91
5	x = 3		1	0,64

Oppgåve 5b: Finn verdi for x i 5 – 2 · x = 1		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		47	29,9
1	*x = 2*		31	19,7
2	x = 0,33	Reknar fyrst 5 – 2, og får 3x = 1	33	21,0
3	3x – 1	Tilsvarande som i 2)	1	0,64
4	x = -2	Overser skilnad mellom · og + ved likningsløysing	12	7,64
5	x = 1		6	3,82
6	x= 3	Får 2x=1+5 fordi han overser skilnad på negative og positive ledd	10	6,37
7	x = -3	Reknar at 3·-3 er det same som 1	3	1,91
8	x = 4		3	1,91
9	x = 0,70		1	0,64
10	x = 0,5		1	0,64
11	x = 2,5		1	0,64
12	x = -1,5		1	0,64
13	x = -1		1	0,64
14	x = -6		1	0,64
15	x = 12	x = 1+5 · 2	1	0,64
16	x = 33		1	0,64
17	3		1	0,64
18	$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$		1	0,64
19	$\frac{x^2}{4}$		1	0,64

Oppgåve 5c: Finn verdi for x i 4x + 6 = 18		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		23	14,6
1	*x = 3*		112	71,3
2	4 + 4 + 6		1	0,64
3	4x = 12,	Har ikkje fullført rekninga	1	0,64
4	4x = -6		1	0,64
5	x = 8	4 + 6 = 10 → x = 8	5	3,18
6	10x = 14		1	0,64
7	x = 7	Fordi 4 + 7 + 6 =18. Reknefeil og feil reknemåte	1	0,64
8	x = 2		2	1,27
9	12x + 6 = 18	Tenker at her er 18=18?	1	0,64
10	x = 12	18 – 6 = 12	2	1,27
11	$x = \frac{9}{2}$	Har tatt 18/4 i staden for 12/4	2	1,27
12	x = 4	Ei forklaring: ”12/4 = 4”	2	1,27
13	x = 6	Har lagt til 6 i staden for å trekke frå	1	0,64
14	$x = \frac{6}{4}$	Fordi 18 – 6 = 4x → 6 = 4x	1	0,64
15	10x + 8 = 18	Summerer 4 og 6, legg så til 8 for å få likevekt på begge sider	1	0,64

Oppgåve 6a: Løys opp og trekk saman 3x + (2x + x)		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		18	11,5
1	*6x*		81	51,6
2	3x + 3x, 3x + 2x + x	Rett, men ufullstendig	23	14,6
3	$6x^2$	Potensnotasjon	3	1,91
4	7		1	0,64
5	7x	Tilfeldig reknefeil?	3	1,91
6	$7x^3$	Potensnotasjon	1	0,64
7	3x – 2x + x, 3x – 3x	Har sett – før parentesen	6	3,82
8	3x + 2x – x, 5x – x , 4x	Har sett – inne i parentesen	15	9,55
9	3x – 2x – x	Har sett – før og inne i parentesen	1	0,64
10	$3x + 2x^2$	Potensnotasjon inne i parentesen	1	0,64
11	5x + 4x = 9x	Har summert leddet utafor parentesen med kvart av ledda inni	1	0,64
12	3·3 + 2·2 + x = 13x	Gitt den ukjente numerisk verdi	1	0,64
13	$6x^2 + 3x^2$	Multipliserer leddet utafor parentesen med kvart av ledda inni	1	0,64
14	3 – 3x		1	0,64

Oppgåve 6b: Løys opp og trekk saman 4a + (a + 2y)		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		23	14,6
1	*5a + 2y*		80	51,0
2	5a – 2y, 4a + a – 2y	Endrar forteikn inne i parentesen	16	10,2
3	5a2y	Legg tal og variablar inntil kvarande	2	1,27
4	4a + a + 2y	Rett, men ufullstendig	9	5,73
5	4a – a + 2y, 3a + 2y	Har sett – før parentesen	6	3,82
6	4a – a – 2y	Har sett – før og inne i parentes	1	0,64
7	4a + 8y	4·2=8	1	0,64
8	4a + 3a = 8 (a + 2y = 3a)		1	0,64
9	4a + 2ay	Slår saman det inne i parentesen	2	1,27
10	4a + 5a + 2y		1	0,64
11	$4a^2 + 2y$	Trekker saman med potensnotasjon	4	2,55
12	$4a^2 + 2ay$	Brukar både potensnotasjon og slår saman siste parentesen	1	0,64
13	$4a^2 + 8ay$	Som i 12), men multipliserer 4 og 2, og får 8 i siste leddet	3	1,91
14	4 + 2ay, 4 + 2ya, 6ay		3	1,91
15	5a + 6ay = 11ay		1	0,64
16	7ay	Har summert alle tala, og lagt alle ledda inntil	1	0,64
17	5ay		1	0,64
18	2ay		1	0,64

Oppgåve 6c: Løys opp og trekk saman 2(a – b) + 7(bc)		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		38	24,2
1	*2a – 2b + 7bc*		59	37,6
2	2a + 2b + 7bc	Endrar forteikn inne i parentes	4	2,55
3	2a – 2b + 7b + 7c, 2a + 2b + 7b + 7c	Feil i siste parentes	9	5,73
4	2a – 2b + 7b·7c = 2a – 9b·7c	Feil i siste parentes	1	0,64
5	2a – 2b + 7	Får problem med dei to variablane i siste parentes	1	0,64
6	2a – 2b + 7b	Tilsvarande som i 5)	1	0,64
7	a – b + 7b + 7c	Feil i fyrste og siste parentes	1	0,64
8	2ab + 7bc, 9abc	Feil i fyrste parentes	9	5,73
9	2a + 7bc		1	0,64
10	2a – b + 7bc	Feil i fyrste parentes	7	4,46
11	2a – b + 7 + bc = 2a + 7c	Feil i fyrste og siste parentes	1	0,64
12	2a – b – 7		1	0,64
13	2a – b + 7		1	0,64
14	2a – b + 7b		1	0,64
15	2a – 9b·7c		1	0,64
16	$2a – b^2 + 7c$		1	0,64
17	$2a^2 – 2b^2 + 7bc$	Potensnotasjon i fyrste parentes	1	0,64
18	$2a^2 – 2b^2 + 7bc^2$	Potensnotasjon i begge parentesar	1	0,64
19	$2ab^2 + 7bc^2$		1	0,64
20	$2a^2 – b^2 + 7bc^2$		1	0,64
21	$a^2 – b^2 + 7bc$	Potensnotasjon i fyrste parentes	1	0,64
22	$a^2 – b^2 + 7c$		1	0,64
23	$9 + a – b^2 + c$ 9 + 1a – 2b + c	Summerer tala fyrst, så variablar	2	1,27
24	$2·a – b + 7·bc = 9 – a + b^2c$		2	1,27
25	2a – 2b + 9 + 7bc		1	0,64
26	2·a + b + 7(-bc)	Endrar forteikn inne i parentesane	2	1,27
27	2a2b + 7		1	0,64
28	2a – 12 + 7b (b=6)		1	0,64
29	2a(-2b)7bc		1	0,64
30	$2b + 1x – 2x = bc^2$		1	0,64
31	2·7 a – b + bc		1	0,64
32	$a^2 + c^7·b^5$		2	1,27

Oppgåve 6d: Løys opp og trekk saman (a + 2b)(2a + b) – (a + b)		Kommentarar	Frekvens	Prosent
	Ikkje svart		47	29,9
1	*$2a^2 - a + 5ab - b - 2b^2$*		20	12,7
2	a·2a + a·b – a – b + 2b·2a + 2b·b	Rett, men har ikkje rekna ut ledda	2	1,27
3	4a + 4b, 2a + 4b, 2a – 4b, 3a + 4b, 2a + 2b etc	Har summert a'ane og b'ane for seg	16	10,2
4	2ab + 2ab – ba, 5ab	Har multiplisert inne i parentesane, og summert ledda	2	1,27
5	a + 2b·2a + b – a – b a + 2b·2a + b – a + b a + 2b·2a + b + a + b	Tar bort parentesen utan å multiplisera	9	5,73
6	a – 2b·2a – b – a – b, a – 2b·2a – b – a + b	Endrar forteikn i parentes, og tar bort parentesen utan å multiplisera	4	2,55
7	$2ba \cdot 2ab - ab = 3ab^2$		1	0,64
8	$2a + ab + 4ab + 2b^2 - ab$	Feil i siste parentes	1	0,64
9	5a + 5b + 4ab		1	0,64
10	6ab	Summerer antal i ledd	1	0,64
11	2aa + ab + 4ab + 2bb – a + b	Legg variablar inntil	1	0,64
12	3a + 3b –ab		1	0,64
13	3a – 3b = 1ab		1	0,64
14	4a + 3ab + 4b		2	1,27
15	2a + 5ab + 4b	2a·a = 3a	1	0,64
16	2a + ab + 4ab + 2b – ab		1	0,64
17	2a + 3b – ab = 7ab	Summerer inne i parentesen	1	0,64
18	$a^2 + b^2$		2	1,27
19	$a^2 + b^2 + 5ab^2$		1	0,64
20	$2a^2 + 4ab + 2b^2$, $2a^2 + 4ab + b^2$		4	2,55
21	$2a^2 + 5ab + 2b^2$		1	0,64
22	$2a^2 + 5ab + 2b - a$		1	0,64
23	$2a^2 + 5ab + 2b^2 - a + b$	Rett, men feil forteikn i siste parentes	7	4,46
24	$2a^2 + 5ab + 2b^2 + a - b$	Rett, men feil forteikn før siste parentes	1	0,64
25	$4a^2 + 6ab + 3b^2$		1	0,64
26	$3a^2 + 3b^2$		2	1,27
27	$3a^2 + 5ab + 3b^2 - a - b$		1	0,64
28	$2a^2 + ab + 4ab^2 + 2b^2 - ab$		2	1,27
29	$2a^2 + ab^2 + 4ab^2 + 3b^2$	Potensnotasjon på kvart ledd, overser siste parentes	1	0,64
30	$2a^2 + ab + 2ab^2 + b^2 - a - b$		1	0,64
31	$2a^2 + ab^2 + 2b^2 - a + b$		1	0,64
32	$2a^2 + ab + 2b^2 - a - b$		1	0,64
33	$2a^2 + 2b^2 - a - b$		2	1,27
34	$2a^2 + 2b^2 - ab$		1	0,64
35	2a + ab + 2b		1	0,64

36	2a + 2b – a + b		1	0,64
37	2a + 2b		2	1,27
38	a + b		1	0,64
39	a + b + 5ab	Gjer om 2a·a til 2a	2	1,27
40	a + b + 5b – $2b^2$		1	0,64
41	a + ab + 2b2a		1	0,64
42	$2a^2$ + ab + 16ab + $2b_2$ – a + b		1	0,64
43	2ba·2ab – ab = 4ab – ab = 4	Har trekt saman inne i parentesane	1	0,64
44	a + 2b – 2a + b + a – b	Har bytta alle forteikn	1	0,64
45	6ab + $2b^2$ + 2b		1	0,64
46	a·a + 2b		1	0,64
47	4a + 7b		1	0,64

Oppgåve 7: Sett ring rundt svaret/svara som er ikkje er korrekte uansett kva verdi variabelen har	**Frekvens**	**Prosent**
Ikkje svart	31	19,7
a	4	2,55
b	3	1,91
c	98	62,4
ab	6	3,82
ac	3	1,91
bc	3	1,91
abc	5	3,18
Ingen er feil	4	2,55

Oppgåve 8a: Rekn ut 2x = -4		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		41	26,1
1	x = -2		93	59,2
2	2x = -4	Har ikkje fullført rekninga	2	1,27
3	x = 2		3	1,91
4	-2x	Rekning utan variabel	2	1,27
5	$x = -\frac{2}{4}$	Ikkje heilt trygg på vanleg likningsløysing	1	0,64
6	$x = \frac{2}{4}$	Tilsvarande som for svaralternativ 5	1	0,64
7	x = 6	x = 4 + 2	1	0,64
8	x = -6	x= -4 – 2, ser på 2x som 2 + x	3	1,91
9	x = -8	x= -4 ·2	5	3,18
10	x = -10		1	0,64
11	x = 1	Gir variabelen ein verdi, og tester ut	1	0,64
12	x = -1		1	0,64
13	-2x + 2x = -4		1	0,64
14	4		1	0,64

Oppgåve 8b: Rekn ut 4x = 9		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		51	32,5
1	$x = \frac{9}{4}$		73	46,5
2	4x = 9	Har ikkje fullført	7	4,46
3	$4x = \frac{9}{9} = 1$		1	0,64
4	$x = \frac{4}{9}$		2	1,27
5	$x = \frac{9}{2}$		1	0,64
6	13x	Summerer 4 og 9	1	0,64
7	x = 5	Ser på 4x som 4 + x, slik at: 9-4 = 5	12	7,64
8	x = 3,589		1	0,64
9	x = 2.5, x=2.4		4	2,55
10	x = 0,75		1	0,64
11	$\sqrt[2]{4x} = \sqrt[2]{9}$		1	0,64
12	$x^2 = \frac{4}{9}$		1	0,64
13	4x·2 = 8 + 1 = 9		1	0,64

Oppgåve 8c: Rekn ut 3 + 5x = 3x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		60	38,2
1	$x = -\frac{3}{2}$		35	22,3
2	$x = \frac{3}{2}$, x = 1,5	Gløymt negativt tal	13	8,28
3	3x + 5x = 3	Flytta rundt på ledda	4	2,55
4	3 + 5x = 3x	Tenker at svaret alt står på høgre sida?	5	3,18
5	5x		1	0,64
6	3x		2	1,27
7	2x, -2x	Tilsvarande som for svaralternativ 8	2	1,27
8	2x = 3, 2x = -3, -2x = 3	Har ikkje rekna ferdig	9	5,73
9	x = -6		1	0,64
10	x = -5		1	0,64
11	x = -4		1	0,64
12	x = -3		2	1,27
13	x = 3		2	1,27
14	x = -1		1	0,64
15	$x = -\frac{3}{8}$	Innverknad for feil forståing av bruk av negative tal	1	0,64
16	$x = \frac{8}{3}$	Tilsvarande som førre svaralternativ	2	1,27
17	x = 0		1	0,64
18	x = 2,5		1	0,64
19	x = 0,5		1	0,64
20	x = 5	2x = 3, flytter så over 2?	4	2,55
21	x = 6, x = -6	Multipliserer -3 og 2 i staden for å dividera	3	1,91
22	3 = 8x		1	0,64
23	8x = 3x	Summerer uavhengig av variabel på venstre	2	1,27

		sida		
24	$3 + 5 \cdot 0 = 3x \rightarrow x = 0$	Prøver seg fram	1	0,64
25	3 + 3x = x	Har trekt frå 2x på kvar side	1	0,64

Oppgåve 9a: Rekn ut 5 = 2x + 3x		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		44	28,0
1	x = 1		80	51,0
2	x= -1		1	0,64
3	5 = 5x	Rett, men ufullstendig	5	3,18
4	2x + 3x = 5	Flytta om på ledda, for å få "svaret" på høgre sida	3	1,91
5	5 = 2x + 3x	Tenker at svaret står der?	2	1,27
6	1x		1	0,64
7	5x		1	0,64
8	10x	Har summert alle tala, og lagt til x i svaret	1	0,64
9	x = 25		1	0,64
10	x = 5	Svaret står alt der?	2	1,27
11	x = -5	Bytter om for å få "svaret" på høgre sida, og endrar då forteikn på alle ledda	1	0,64
12	x = 0	Tenker at: $x = \frac{5}{5} = 0$	12	7,64
13	2x : 1 = 2		1	0,64
14	5 = 2 + 3		2	1,27

Oppgåve 9b: Rekn ut 6 = 4 + 2		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		41	26,1
1	6 = 6, 1=1		70	44,6
2	4 + 2 = 6	Har snudd om for å få "svaret" på høgre sida	23	14,6
3	-4 – 2 = -6	Har snudd om likninga, og samstundes endra forteikn på alle ledda	1	0,64
4	6 = 4 + 2		13	8,28
5	6 – 4 – 2 = 0		3	1,91
6	6 – 2 = 4		1	0,64
7	12	Har summert alle tala	1	0,64
8	1	$6 = 6 \rightarrow \frac{6}{6} = 1$	3	1,91
9	$\frac{6}{6} = 0$		1	0,64

Oppgåve 9c: Rekn ut 3y + 1y = 4y		**Kommentarar**	**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart		41	26,1
1	y = y , 4y = 4y		63	40,1
2	3y + 1y = 4y	Tenker at svaret alt står på høgre sida?	18	11,5
3	4y = 3y + 1y	Snur om på likninga	2	1,27
4	4y – 1y = 3y, 3y + 1y – 4y = 0	På rett veg..	4	2,55
5	4y – 3y – 1y = y		1	0,64
6	y = 1		11	7,01
7	y = 2		1	0,64
8	y = 0	Har tenkt slik: $\frac{y}{y} = \frac{4}{4} = 0$	3	1,91
9	30 + 10 = 40	y = 0, set inn for variabel	1	0,64
10	4y	”svaret” står allereie på høgre sida	4	2,55
11	4y = 1	4y står som ”svar”, men endrar på andre sida av likskapsteiknet	2	1,27
12	1y = 4y	Tilsvarande som 11)	1	0,64
13	2y = 4y	Tilsvarande som 11)	1	0,64
14	3y·1y = 4y	Tilsvarande som 11)	2	1,27
15	4 + 4x = 8x	Summerer tala	1	0,64
16	$1y^2$	Potensnotasjon	1	0,64

Oppgåve 10: Skriv matematikkforteljing til 2a + 5a = 7a		**Frekvens**	**Prosent**
	Ikkje svart	63	40,1
1	Rett tolking	15	9,55
2	Konkret objekt	62	39,5
3	Udefinert objekt	4	2,55
4	2a, 5a, 7a heilskaplege objekt	6	3,82
5	Blanding av variabelforståing og konkret objekt	3	1,91
6	Reknar ut for å finna ein verdi til a	3	1,91
7	Reknar ut eit svar (7 + 7 = 14)	1	0,64

Vedlegg 7.2.2: Resultat frå gruppa mi

Oppgåve 1: Finn verdiane for variablane i x + y + z = 21	**Frekvens**
Ikkje svart	
a (1, 5, 15)	1
b (6, 11, 4)	3
c (7, 7, 7)	3
ab	3
ac	2
bc	
abc	2

Oppgåve 2a: Legg saman 4x og 7x	**Frekvens**
Ikkje svart	1
11x	12
$11x^2$	1

Oppgåve 2b: Legg saman 3y+ 5x – 2y	**Frekvens**
Ikkje svart	1
5x + y	9
6x	2
5x1y	1
8yx – 2y	1

Oppgåve 2c: Legg saman 6y – 5x	**Frekvens**
Ikkje svart	4
6y – 5x	4
1yx	4
1x	1
5x6y	1

Oppgåve 3a: Legg saman 3 og 5y	**Frekvens**
Ikkje svart	2
3 + 5y	4
8y	8

Oppgåve 3b: Legg saman x og 7x	**Frekvens**
Ikkje svart	1
8x	10
$7x^2$	3

Oppgåve 3c: Legg saman 2x og 3y	**Frekvens**
Ikkje svart	4
2x + 3y	3
5xy	6
2x3y	1

Oppgåve 3d: Legg saman 1 og 5 + x	**Frekvens**
Ikkje svart	1
6 + x	4
6x	9

Oppgåve 4: Kva for nokre av uttrykka er like som 2 – 3x?	**Frekvens**
Ikkje svart	1
a (2 + 3x)	
b (2 + (-3x))	4
c (-3x + 2)	2
d (3x – 2)	2
bc	3
bd	2

Oppgåve 5a: Finn verdi for x i 3 + x = 10	**Frekvens**
Ikkje svart	1
x = 7	11
x = -7	1
3x = 10	1

Oppgåve 5b: Finn verdi for x i 5 – 2 · x = 1	**Frekvens**
Ikkje svart	7
x = 2	3
x = 0,3	3
x = 1	1

Oppgåve 5c: Finn verdi for x i 4x + 6 = 18	**Frekvens**
Ikkje svart	4
x = 3	5
4 + 4 + 6	1
4x = 12	1
4x = -6	1
x = 8	1
10x = 14	1

Oppgåve 6a: Løys opp og trekk saman 3x + (2x + x)	**Frekvens**
Ikkje svart	1
6x	7
3x + 3x, 3x + 2x + x	2
7x	1
3x – 2x + x	1
3x – 2x – x	1
$3x + 2x^2$	1

Oppgåve 6b: Løys opp og trekk saman 4a + (a + 2y)	**Frekvens**
Ikkje svart	
5a + 2y	6
4a + a + 2y	2
4a – a + 2y	1
4a – a – 2y	1
4a + 8y	1
$4a^2 + 2y$	1
$4a^2 + 8ay$	1
4 + 2ay	1

Oppgåve 6c: Løys opp og trekk saman 2(a – b) + 7(bc)	**Frekvens**
Ikkje svart	5
2a – 2b + 7bc	1
2a + 2b + 7bc	2
2a – 2b + 7b + 7c	1
a – b + 7b + 7c	1
2ab + 7bc	1
2a – b + 7bc	1
2a – 9b·7c	1
$2a^2 – 2b^2 + 7bc$	1

Oppgåve 6d: Løys opp og trekk saman (a + 2b)(2a + b) – (a + b)	**Frekvens**
Ikkje svart	5
$2a^2 – a + 5ab – b – 2b^2$	
4a + 4b, 2a + 4b	2
2ab + 2ab – ba, 5ab	2
a + 2b·2a + b – a – b a + 2b·2a + b – a + b	3
$2a + ab + 4ab + 2b^2 – ab$	1
5a + 5b + 4ab	1

Oppgåve 7: Sett ring rundt svaret/svara som er ikkje er korrekte uansett kva verdi variabelen har	**Frekvens**
Ikkje svart	4
a	1
b	
c	7
ab	1
Ingen er feil	1

Oppgåve 8a: Rekn ut 2x = -4	**Frekvens**
Ikkje svart	6
x = -2	5
-2x	1
$x = -\frac{2}{4}$	1
x = 6	1

Oppgåve 8b: Rekn ut 4x = 9	**Frekvens**
Ikkje svart	8
$x = \frac{9}{4}$	1
4x = 9	1
$x = \frac{4}{9}$	1
13x	1
x = 5	1
x = 2,5	1

Oppgåve 8c: Rekn ut 3 + 5x = 3x	**Frekvens**
Ikkje svart	3
$x = -\frac{3}{2}$	1
$x = \frac{3}{2}$, x = 1,5	1
3x + 5x = 3	3
5x	1
2x = 3, 2x = -3	4
x = -3	1

Oppgåve 9a: Rekn ut 5 = 2x + 3x	**Frekvens**
Ikkje svart	3
x = 1	6
x= -1	1
2x + 3x = 5	1
1x	1
5x	1
10x	1

Oppgåve 9b: Rekn ut 6 = 4 + 2	**Frekvens**
Ikkje svart	3
6 = 6	2
4 + 2 = 6	4
6 = 4 + 2	
6 – 4 – 2 = 0	1
6 – 2 = 4	1
12	1
1	2

Oppgåve 9c: Rekn ut 3y + 1y = 4y	**Frekvens**
Ikkje svart	1
y = y , 4y = 4y	3
3y + 1y = 4y	1
4y = 3y + 1y	1
4y – 1y = 3y, 3y + 1y – 4y = 0	3
y = 1	1
4y	2
4y = 1	1
$1y^2$	1

Oppgåve 10: Skriv matematikkforteljing til 2a + 5a = 7a	**Frekvens**
Ikkje svart	6
Konkret objekt	8

Vedlegg 7.3: Oppfølgingsprøve

OPPGÅVER I ALGEBRA

Namn: ……………………………………………………………………………………..

1) Legg saman:

a) $4x + x$ Svar:

……………………………………………………………………………………….

b) $3a + 5b$ Svar:

……………………………………………………………………………………….

c) $7 – 5a$ Svar:

……………………………………………………………………………………….

d) $5x + 2y – 1x$ Svar:

……………………………………………………………………………………….

2) Finn ein verdi for x i likningane:

a) $2 + 2 \cdot x = 16$

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

b) $16 - 2x = 3x + 5$

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3) Løys opp parentesane og rekn ut:

a) $(3a + a) + 4a$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

b) $3 + 2(a - b)$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

4) Rekn ut:

a) $8 = 5 + 3$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

b) $5x = 2x + 3x$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

c) $4 + 4x = 12x$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5) Skriv ei matematikkforteljing som du meiner passar til denne likninga:

$3b + 2b + 2a = 5b + 2a$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Vedlegg 7.3.1: Resultat frå gruppa mi

Oppgåve 1a: Legg saman 4x + x		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		
1	*5x*		13
2	$4x^2$	Potensnotasjon	1

Oppgåve 1b: Legg saman 3a + 5b		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		
1	*3a + 5b*		6
2	8ab	Summerer fyrst tala og legg så variablane inntil	6
3	7ab	Tilsvarande som i 1), men har summert feil	1
4	3a 5b	Legg ledda inntil kvarandre	1

Oppgåve 1c: Legg saman 7 – 5a		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		1
1	*7 – 5a*		1
2	5a – 7		1
3	2a	Overser variabel	6
4	-2a	Tilsvarande som i 3)	2
5	2	Tilsvarande som i 3)	3

Oppgåve 1d: Legg saman 5x + 2y – 1x		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		1
1	*4x + 2y*		10
2	6xy	Reknar fyrst saman tala, legg så variablane inntil	2
3	4x 2y	Legg ledda inntil kvarandre	1

Oppgåve 2a: Finn verdi for x i 2 + 2 · x = 16		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		
1	*x = 7*		1
2	x = 4	Reknar frå venstre mot høgre, og får 4x=16	12
3	x = 2		1

Oppgåve 2b: Finn verdi for x i 16 – 2x = 3x + 5		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		5
1	$x = \frac{11}{5}$		0
2	x = 2		1
3	x = 11	Har rekna 3x – 2x i staden for 3x + 2x	2
4	x = -10		1
5	2x + 3x = 16 + 5	Flytter om på ledda, men overser negative teikn	1
6	2x + 3x = 16 – 5	Tilsvarande som i 5)	2
7	x >3, <2	Prøver seg fram og finn at svaret må ligga mellom 2 og 3 (men set teikna feil veg)	1
8	16 – 2 – 1 = 3 + 5 + 5		1

Oppgåve 3a: Løys opp og trekk saman (3a + a) + 4a		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		1
1	*8a*		13

Oppgåve 3b: Løys opp og trekk saman 3 + 2(a – b)		**Kommentarar**	**Frekvens**
	Ikkje svart		2
1	*3 + 2a – 2b*		2
2	3 + 2a – 2b = 7ab	Løyser opp parentesen rett, men trekker saman svaret	1
3	5c	c = a – b	1
4	5 + a – b		1
5	5ab	Summerer fyrst tala, legg så variablane inntil	4
6	6ab	Multipliserer tala, legg så variablane inntil	1
7	5 · 2a – 2b		1
8	3a – 3b + 2a – 2b	Multipliserer begge tala med variablane i parentesen	1

Oppgåve 4a: Rekn ut 8 = 5 + 3		Kommentarar	Frekvens
	Ikkje svart		1
1	*8 = 8*		6
2	5 + 3 = 8	Har snudd om for å få ”svaret” på høgre sida	4
3	8 – 3 = 5	Flytta over eine leddet	1
4	8 = 3 + 5	Flytta om på ledda på høgre sida	1
5	8		1

Oppgåve 4b: Rekn ut 5x = 2x + 3x		Kommentarar	Frekvens
	Ikkje svart		2
1	*5x = 5x, x = x*		6
2	5x – 2x = 3x	Flytta over det eine leddet	1
3	3x + 2x = 5x	Har snudd om for å få ”svaret” på høgre sida	3
4	5x = 1x + 4x		
5	5x		1

Oppgåve 4c: 4 + 4x = 12x		Kommentarar	Frekvens
	Ikkje svart		4
1	$x = \frac{1}{2}$		2
2	4 + 12 – 4 = 12	Prøver å få det likt på begge sider av likskapsteiknet?	1
3	4 + 4x + 4 = 12x	Prøver å få det likt på begge sider av likskapsteiknet?	1
4	8x = 12x	Overser variabel, og trekker saman 4 og 4x på venstre sida	1
5	x = 1,5		1
6	x = 4	Endrar ikkje forteikn når leddet blir flytta over på andre sida	1
7	16 = 4	Flytter 4x og 12x over på same sida, men endrar ikkje forteikn	1
8	x = 2	Reknar med 12 i staden for 12x: 4 + (4·2) = 12	1
9	4 + 4x ≠ 12x		1

Oppgåve 5: Skriv matematikkforteljing til 3b + 2b + 2a = 5b + 2a	Frekvens
Ikkje svart	4
Rett svar	
Konkret objekt	8
Blanding av rett svar og konkret objekt	2

Vedlegg 7.4: Intervjuguide

INTERVJUGUIDE

Varigheit: ca 15 min

Byrjar samtalen med å forklara at eg gjerne vil høyra korleis eleven har tenkt for å koma fram til svaret. Og presisera at eg ikkje er ute etter rett eller galt svar, berre framgangsmåten eleven har brukt. Spør om eleven har spørsmål før me starter.

1) Kan du lesa spørsmålet for meg?
2) Kva du sei med eigne ord kva oppgåva spør etter?
3) Kan du fortelja meg korleis du løyste oppgåva?
4) Kan du skriva ned svaret på oppgåva?

(Alle teller, s.147)

<u>Oppfølgingsspørsmål undervegs:</u>

- Kvifor tenkte du slik?
- Kvifor valde du å gjera slik?
- Kva ville du gjort dersom…? (Endra litt på oppgåva for å få fram heilskapsforståinga)
- Kunne du gjort noko annleis?
- Kan du seia noko meir om dette?
- Du meiner altså at..?
- Forstår eg deg rett når du seier at..?
- Eventuelle andre spørsmål som dukkar opp undervegs

Vedlegg 7.5.1: Oppgåver til elev 1

Oppgave 6

a) $3x + (2x + x)$

Kan du forklare meg hvordan du tenkte da du svarte på denne?

b) $4a + (a + 2y)$

Svaralternativer: $4a + a + 2y$, $4a – a + 2y$, $4a – a – 2y$, $4a + a – 2y$

Hvilke av disse alternativene virker mest fornuftig? Hvorfor?

Hvilken hensikt har det at vi bruker parenteser i ligninger?

Oppgave 5

b) $5 - 2 \cdot x = 1$

Kan du vise meg hvordan du vil svare på denne?

Ville det vært noen forskjell om det sto $5 – 2x = 1$?

Hva må vi gjøre først i en ligning når vi har både addisjon og multiplikasjon?

Viss vi skulle satt inn en parentes for å vise hva vi måtte gjøre først, hvor ville du satt den da?

Kan du løse disse oppgavene?

$3 \cdot \square = 21$

$\square \cdot 2 + 4 = 12$

$3 + 2 \cdot \square = 15$

Er det enklere eller vanskeligere når en har ruter istedenfor en bokstav?

Vedlegg 7.5.2: Oppgåver til elev 2

Oppgave 9

b) $6 = 4 + 2$
c) $3y + 1y = 4y$

Kan du forklare meg hvordan du tenkte da du svarte på disse?

1) $7x - 3x = 4$
2) $4 = 7x - 3x$
3) $3x = 7x - 4$

Er det forskjell på disse ligningene? Hva er i så fall forskjellen?

Hva tenker du når du ser tegnet: = ? (likhet eller kommando?)

Oppgave 2

a) $4x + 7x$
b) $6y - 5x$

Kan du vise meg hvordan du vil svare på disse?

Hva er forskjellen på disse to? (en og to variable)

Kunne et svar på b) vært $6y - 5x$?

Oppgave 3c:

Legg sammen 2x og 3y

Svaralternativer: $2x + 3y$, $5xy$, $2x3y$, $6xy$. Hvilke av disse er mest fornuftige? Hvorfor?

Vedlegg 7.5.3: Oppgåver til elev 3

Oppgave 10

Kan du forklare meg hvordan du tenkte da du løste denne oppgaven?

Kunne a hatt en annen betydning?

Hva betyr egentlig bokstaver i et regnestykke?

Oppgave 9a

$5 = 2x + 3x$

Her har du funnet ut at $x = 1$. Kunne x vært 2? Hvorfor/hvorfor ikke? Her har du funnet en fast verdi for x

Prøv å finne hva x er i $2x = 4$ ved bare å prøve deg fram med ulike verdier.

Hva kjennetegner x? Hvorfor kan vi prøve oss fram for å finne verdien til x? (Variabel!)

Gå tilbake til oppgave 10.

Varierer a her? Trenger vi en ny forklaring på a?

Oppgave med fyrstikker:

Jeg har en fyrstikkeske, du har to fyrstikkesker. Ingen av oss vet hvor mange fyrstikker vi har, men vi vet at det er like mange i hver eske.

Kan du sette opp ett uttrykk for hvor mange fyrstikkesker du og jeg har til sammen?

Viss du vil vite hvor mange fyrstikker vi har til sammen, må du telle i alle 3 eskene da?

Kunne vi tenkt på oppgave 10 på samme måten?

Vedlegg 7.6.1: Intervju med elev 1

Fokus: Oppgåve 5 og 6 (prioriteringar). Tid: 9.23 min

6. oktober 2011

Meg: Eh..okei, då skal me byrja med å sjå på oppgåve 6a der *(peiker på arket)*

Elev: 6a ja..mhm..

Meg: Vil du bare lesa oppgåva?

Elev*: Les:* løys opp parentesane og gjer uttrykka enklare. a) 3x+ (2x + x)

Meg: Ja. Korleis tenkte du då du løyste denne?

Elev: Då eg løyste denne hadde eg heilt gløymt om når det var + foran om du skulle bytta teikn inni eller om du ikkje skulle det. Em..eg har byttet de ja.

(Ein lærar stikk hovudet inn døra for å gje ein annan beskjed.)

Elev: Men eg har bytta dei ja, men eg veit ikkje om det er rett. Eg trur kanskje det er feil når eg tenker på det nå.

Meg: Du tenker at det er feil at..?

Elev: At når det er + foran parentesen så kan ein..ja eg husker ikkje om ein då skal bytta innarteiknet når du fjernar parentesen, eller om du bare skal..

Meg: Okei, så du tenkte det at når det står ein parentes så er det mogeleg at ein byttar teikna inni der. Så ser eg at du har bytta forteikn framfor (parentesen) og..?

Elev: Ja, det har eg og gjort.

Meg: Husker du kvifor du gjorde det?

Elev: Nei, det er nok bare ein slurvefeil. Det veit eg jo eigentleg at ein ikkje skal..

Meg: Okei, så det som er konklusjonen her er at du bytta forteikn fordi du trudde du skulle gjera det i ein parentes?

Elev: ja

Meg: Då skal me sjå på denne oppgåva her..*(gir eleven eit ark)…*det er eigentleg då oppgåve 6b. Og der har eg gitt deg 4 ulike svaralternativer. Vil du sjå på dei, og sei for kvar av dei alternativa kva du trur er rett eller feil med dei. Eller kva som er fornuftig med dei og ikkje fornuftig.

Elev tenker litt

Meg: Eventuelt kan du sjå på kva som har blitt gjort..

Elev: Ehm..her er jo bare parentesane fjerna

Meg: Ja, då er du på nummer 1? Då er bare parentesane blitt fjerna.

Elev: Ja

Meg: Er det ein fornuftig ting å gjera trur du? Kan ein bare ta bort parentesane slik?

Elev: Det er det eg ikkje huskar. For eg veit jo at når det er enten pluss eller minus så må ein bytta forteikn inne i parentesen. Og så kan du fjerne parentesen. Men eg huskar ikkje om det er for pluss eller minus. *(Ser på neste)* Her er jo forteiknet bytta..

Meg: Ja, nå er du på nummer 2. Der har ein bytta forteikn.

Elev: Ja. Men det skal jo ikkje gjerast uansett, trur eg.

Meg: Nei, kvifor ikkje?

Elev: Nei, det veit eg ikkje heilt kvifor ein ikkje skal

Meg: Så då tenker du at den er heilt uaktuell?

Elev: Ja, eg trur det.

Meg: Så nummer 3

Elev: Hm..her er jo forteiknet og bytta foran parentesen. Og det trur eg at er feil. Og da blir jo det og feil *(meiner teiknet inni parentesen)*

Meg: Ja, for der har dei bytta inni

Elev: Ja

Meg: Så det er ikkje nokon samanheng mellom forteikna på utsida og teikna inni parentesen?

Elev: Jo, det er jo det.. På ein måte. Fordi at viss det er pluss så skal du bytta inni, eller viss det er minus så..eh..ja

Meg: mhm

Elev: På nummer 4 så er forteikna inni parentesen bytta.

Meg: Ja

Elev: Så eg trur det er anten nummer 4 eller nummer 1 som er riktig.

Meg: Ja. Men det er ikkje mogeleg at det kan vera fleire rette svar? Er det bare ein av dei som er rett eller kan det vera fleire rette?

Elev: Det veit eg ikkje.

Meg: Nei.. Så det me har snakka om med parentesar her er at anten pluss eller minus vil endra teiknet inni parentesen?

Elev: Ja

Meg: Veit du kva hensikt det har at me brukar parentesar i likningar?

Elev: Det har eg faktisk aldri skjønt, kva som er poenget med dei

Meg: Eh ja..men klarer du å tenka deg fram til noko? Eller er det bare forvirrande?

Elev: Når me ganger så er det jo hensiktsmessig, for då skal me jo ganga dei inni heldt eg på å seia. Men elles så veit eg ikkje heilt

Meg: Så det at når du snakkar om å ganga det inni, meiner du då at det må gjerast fyrst då for eksempel? Er parentesen eit teikn på at det må eg gjera fyrst før eg kan gjera det andre?

Elev: Em..det veit eg ikkje..

Meg: Nei..

Elev: Men du må bare ganga saman det som står inni parentesen?

Meg: Okei..skal me sjå..oppgåve 5b. Vil du lesa den for meg?

Elev: *Les:* finn ein verdi for x i likningane. a) 3 pluss x er lik 10.

Meg: Og så b)

Elev: Ehm..b) 5 – 2 ganger x er lik 1

Meg: Okei, eg ser at du ikkje har løyst den, men eg ser at du har byrja å tenka på den

Elev: Ja eg byrja eit eller anna, men så..

Meg: Klare du å løysa den no? Bare prøv og tenk litt høgt undervegs

Elev: Ja..eh..her var det jo det at 5 minus 2, det er jo 3. Som er lik..altså..

Meg: *Gir eleven ein blyant.* Bare skriv om du vil..

Elev: Ja, 5 minus 2 er lik 3.

Meg: Så det er fyrste steget

Elev: Ja. Og då blir jo det 3 ganger x er lik 1.

Meg: Okei

Elev: Men det var det eg ikkje skjønte. Korleis ein skulle få 3 eit eller anna til å bli 1. Sidan 1 er mindre enn 3. Så då blei eg sittande fast

Meg: Så det du tenker er at x den må stå for eit heilt tal..enten 1, 2, eller 3, eller liknande?

Elev: Det kan og vera med desimalar, men det trur eg ikkje me har lært ennå..

Meg: Nei, okei

Elev: Så det må jo vera eit lågare tal enn 3..men eg blei iallefall sitjande fast her

Meg: Okei. Men ville det utgjort nokon skilnad om eg hadde skrive reknestykket som *(skriv: 5 – 2x = 1)* Hadde du tenkt på same måten då?

Elev: Trur det, når eg hadde tenkt over det. Det er jo eit gangeteikn her uansett *(mellom 2 og x)* når dei står inntil kvarandre.

Meg: Så du hadde starta denne likningsløysinga med 5 minus 2?

Elev: Ja, det hadde eg nok.

Meg: Eh..så om me har ei likning med både addisjon og multiplikasjon, så byrjar me fyrst med addisjon? Og utset multiplikasjonen til sist? Eller skal me..?

Elev: Det veit eg ikkje

Meg: Nei.. Viss for eksempel ein parentes skulle blitt satt inn for å visa kva som skulle blitt gjort fyrst. Kor ville du satt den inn då?

Elev: Nå veit jo ikkje eg kva som skal reknast fyrst..

Meg: Nei…

Elev: Eh..så eg har egentlig ikkje peiling på kor ein skal setja den.. Eg byrjar jo naturleg med dette fyrst *(meiner 5 – 2)*, sidan det står fyrst liksom. Men eg veit jo ikkje om det er rett.

Meg: Så det du tenker på er at det som står fyrst det byrjar ein med fyrst?

Elev: Ja

Meg: Okei..Så har eg ei oppgåve til deg her, som du kan prøva å løysa (*Gir eleven eit ark med 3 likningar på).*Her er det likningar på same måten som tidlegare, bare med opne rutar i staden for..

Elev: Mhm.. 3 ganger 7 det er jo 21. Skal eg bare skriva 7 her?

Meg: Ja

Elev: Og her blir det 2 fordi 2 pluss 4 er 6. Og 2 gonger 6 er 12.

Meg: Skal me sjå..kva sa du nå? 2?

Elev: 2 gonger 2 pluss 6. Viss 2 pluss 6, nei 2 pluss 4 meiner eg. 2 pluss 4 blir 6, og 2 gonger 6 blir 12.

Meg: Okei, så då summerer du fyrst dei tala der *(2 og 4)*, og så gonger du med det *(talet i ruta).*

Elev: Ja. Og 3 pluss 2 blir 5. Og då blir det 3 her for å få 15.

Meg: Viss du nå rekner ut på begge sider av likningane for å sjekka om dette stemmer

Elev: 3 gonger 7 er 21, og der er det 21

Meg: Ja

Elev: 2 gonger 2 + 4 er 12, og det er 12 *(peiker på andre sida av likskapsteiknet)*

Meg: Mhm

Elev: Og 3 pluss 2 er 5, gonger 3 er 15. Og der er det 15.

Meg: Ja. Okei. Syns du det er enklare eller vanskelegare når du har sånne ruter i forhold til at det hadde stått 3 gonger x?

Elev: Eg syns det er lettare

Meg: Med ruter?

Elev: Ja

Meg: Kvifor det?

Elev: Det er litt vanskelig å svara på. Men eg syns på ein måte..eg veit ikkje..når det står x der, så tenker eg ”å, nå må eg finna ut kva x er”. Mens her så bare reknar eg det ut med ein gong, på ein måte.

Meg: Mhm.. Så kva tenker du at ein x i ei likning betyr for noko?

Elev: Eh..eg blir jo bare litt stressa av heile x’en for eg veit at den er ukjent og den må eg finna ut.

Meg: Ja

Elev: Mens her så står det jo ingenting *(viser til rutene i dei siste likningane ho jobba med)* Det er heilt opent.

Meg: Mhm

Elev: Og då syns eg det blir lettare

Meg: Me snakker om at x er ukjent. Kan x ha kva som helst verdi? Kan x vera alt mogeleg?

Elev: Ja..trur det..

Meg: Ja, så det vil seia..x i eit rekestykke, treng det å vera det same som x i eit anna reknestykke?

Elev: Nei..

Meg: Så det kan variera altså?

Elev: Mhm..

Meg: Det var vel eigentleg det eg hadde…

Vedlegg 7.6.2: Intervju med elev 2

Fokus: oppgåve 9 (likskapsteikn), 2 og 3 (opne svar og rekning med variabel).
Tid: 12.39 min

6. oktober 2011

Meg: Skal me sjå. Då skal me finna prøven din på nummer 9b. Kan du bare lesa den for meg?

Elev: Eh..6 er lik 4 pluss to

Meg: Ja, og her skal du rekna ut det

Elev: Ja

Meg: Husker du kva du tenkte då du løyste denne?

Elev: Da tenkte eg..at..me har jo alt 6 på venstre side. Og 4 pluss 2..det er og 6.. Eg veit ikkje heilt korleis eg tenkte..

Meg: Og så har du snudd den om?

Elev: Ja

Meg: Du har ikkje tenkt at 6 alt står der som eit svar? Er det det du har tenkt?

Elev: 4 pluss 2 er jo 6

Meg: Ja

Elev: Så det er jo det same på begge sider

Meg: Men kva tenker du om skilnaden på dei to tinga du har skrive der? *(Han har gitt både 6 = 4 + 2, og 4 + 2 = 6 som svar).* Er det ein av dei som er meir rett, på ein måte? Eller?

Elev: Nja..det er vel kanskje den øvste som er meir rett

Meg: Kvifor er den mest rett?

Elev: For..ehm…svartalet skal alltid vera på venstre sida. Eller omvendt..det er kanskje 4 pluss 2 som skal stå på venstre sida.

Meg: Så du meiner at 4 + 2 = 6 er det som er rett svar?

Elev: Ja

Meg: Viss du summerer det som står der, 4 pluss 2, kva blir det då?

Elev: Det blir 6

Meg: Så viss eg hadde skrive 6 = 6. Hadde det gått an å skrive det som eit svar?

Elev: Ja

Meg: Kvifor kunne eg skrive det som eit svar?

Elev: Fordi det er jo det same

Meg: Ja..ehm..

Elev: Det er jo det same som 4 pluss 2.

Meg: Men av dei tre der *(Viser til dei tre mulige svara me har kome fram til).* Kva for eit av dei ville vore det mest fornuftig å skriva? Viss du skulle valt eit av dei tre alternativa, kva ville du valt då?

Elev: Eg ville valgt den..*(peiker på 6 = 6)*

Meg: 6 er lik 6 ?

Elev: Mhm

Meg: Ja, for den viser at det er likt på begge sidene? Okei. Så skal me sjå på den neste oppgåva. Kan du lesa den for meg?

Elev: 3y pluss 1y er lik 4y

Meg: Ja. Og korleis har du tenkt på denne oppgåva her?

Elev: Her har eg tenkt at eg tar 4..4y delt på 4 fordi eg skal få vekk 4-talet.

Meg: mhm

Elev: Og så gjer eg det på andre sida og. Eller, eg tar fyrst og summerer dei to *(3y og 1y)*, og det blir 4y

Meg: Då har du 4y på kvar side?

Elev: Ja. Og så tar eg og deler 4 på 4 for at eg skal få y, og gjer det på begge sider. Og finner ut at y er 1.

Meg: Korleis fann du ut at y er lik 1?

Elev: 4 delt på 4

Meg: Er 1?

Elev: mhm

Meg: Okei. Når du har 4y delt på 4 på kvar side..kva skjer med den y'en då? Du har "spart" på den eine y'en, men kva med y'en på andre sida?

Elev: Hm..jo det gjer vel det..

Eleven tenker ei stund

Elev: Det er jo det same på begge sider, er det ikkje det?

Meg: Jo

Elev: Så det..1y er lik 1y for eksempel?

Meg: mhm.. Så då kunne me skrive svaret som..?

Elev: y = y?

Meg: 1y = 1y?

Meg: Er det det same som det som står der? *(viser til kva han svarte på prøven)*

Elev: Nei..

Meg: Men du tenkte at det var y er lik 1, for om me set det inn i likninga får me 4 på kvar side?

Elev: mhm

Meg: Ja..så bra. Då skal du få sjå på desse likningane her. *(Gir eleven eit ark med 3 likningar på).* Her har du fått oppgitt 3 ulike likningar. Så viss du ser på dei. Er det nokon skilnad på dei 3? Eller kva er likt og kva er ulikt på dei?

Elev: hm.. *(elev tenker lenge)* Det blir jo i alle fall ulike svar. Ehm..viss me tar denne her *(likning 1)* som er 7x minus 3x som er lik 4x, som er lik 4. Så tar eg og deler 4 på 4. x ja

Eg gir eleven ein blyant viss han vil notera når han reknar. Han tenker, småsnakker og noterer litt

Meg: Så nå sette du 4x er lik 4, og delte på 4 på begge sider?

Elev: Mhm. Og stryke. Så får eg x er lik 1

Meg: Det var på den fyrste likninga, der fekk du at x er lik 1?

Elev: Mhm

Meg: Og på den andre då?

Elev: Det blir jo akkurat det same her..eller..her må me bytta den om. Så då blir det pluss..7 pluss 3 som er 10.

Meg: Så då bytter du om..du lar minusteiknet bli plussteikn når du flytter dei over på andre sida?

Elev: Ja

Meg: Eh..men..endrar du forteikn på begge ledda eller bare på det som står allereie?

Elev: Det blir minus 4

Meg: Kan du skriva det opp?

Elev: 4 er lik $7x - 3x$ *(skriv opp det som står)*, så tar eg $-7x + 3x$ er lik -4.

Meg: Så du tenker at du må flytta det slik at ”svaret” står på høgre side?

Elev: mhm

Meg: Og kva med nummer 3 der?

Elev: Då må eg ta..må eg få 7x over på venstre sida. Så blir det 3x minus 7x som er lik -4

Meg: Okei. Eh..viss du studerer desse likningane, så ser du at det er same tala me har på alle. Kva for ein av desse måtane å skriva likningar på ville du brukt?

Elev: Av desse måtane her?

Meg: Ja

Elev: Den fyrste

Meg: Ok, kvifor ville du brukt den?

Elev: For den har allereie oppgitt svaret på venstre side *(meiner høgre..)*

Meg: Og viss det hadde vore..altså du ser at svaret på alle er 4. Viss det hadde vore inkludert ein x der til dømes, hadde det vore like godt svar? *(meiner at om likninga hadde vore til dømes $7x - 3x = 4x$).*

Elev: Nei då måtte me..viss det hadde vore 4x, då måtte jo den over på venstre sida.

Meg: Den måtte altså stått på venstre sida? *($7x - 3x - 4x = 0$)*

Elev: Ja

Meg: Ok. Kva tenker du når du ser dette teiknet her?

Eg skriv opp likskapsteiknet: = på eit ark til eleven

Elev: Er lik

Meg: Er lik? Kva tenker du..betyr det at det er likt på begge sidene?

Elev: Ja

Meg: Eller betyr det..viss me skriv 3 + 2 =… kva tenker du då?

Elev: Då er det 5

Meg: Ja. Då betyr det at eg skal gjera noko? 3 pluss 2 er lik eit eller anna, så då blir det på ein måte ein kommando? Tenker du slik?

Elev: Eh..mja..

Meg: Eller ja..

Elev: Det blir jo det

Meg: Men samtidig betyr det og at det er likt på begge sidene?

Elev: mhm

Meg: Så det kan bety på ein måte begge deler?

Elev: Ja

Meg: Ok. Skal me sjå..då skal me sjå på oppgåve 2a. Vil du lesa den for meg?

Elev: 4x og 7x

Meg: Ja, du skal legga dei saman. Korleis ville du jobba med den? Kan du legga dei saman?

Elev: Det blir 11x

Meg: 11x. Kvifor blir det 11x?

Elev: Fordi du plussar dei to tala, og så skjer det ingenting med x’ane

Meg: Nei, så du plussar tala fyrst, og så legg du inntil x’en?

Elev: mhm

Meg: Kvifor blir det ikkje 2x eller x^2 sidan du har to x’ar?

Elev: Det blir x^2 om det hadde vore eit gongeteikn

Meg: Okei. Kva med c), kan du lesa den for meg?

Elev: 6y minus 5x

Meg: Kva vil du gjera for å løysa den?

Elev: Då tar eg 6 – 5 som er -1, nei, som er 1. Og så blir det yx, slått saman

Meg: Ja, så du slår saman variablane på slutten der?

Elev: mhm

Meg: Kva er skilnaden på desse to oppgåvene her? Kva er det fyrste du tenker at er ulikt?

Elev: Skilnaden er jo det at det er ulike bokstavar.

Meg: Så det er på ein måte to variablar her då?

Meg: På c), hadde det vore mogeleg å skrive der at svaret hadde vore 6y minus 5x? Er det eit mogeleg svar?

Elev: Ja, det er jo det

Meg: Kva er skilnaden på det og 1yx? Er dei svara likeverdige?

Elev: mhm

Meg: Så det er bare to ulike måtar å skriva opp svaret på, det er det du meiner?

Elev: Ja. Eller nei, det blir jo feil. Svaret blir jo 1yx.

Meg: Ok. Då har eg ein til oppgåve her. Det står legg saman 2x og 3y. Og der har eg oppgitt nokre ulike svaralternativ. Viss du ser på den fyrste der..

Elev: ..5xy

Meg: Kva sa du nå? At det er 5xy som er rett svar?

Elev: mhm

Meg: 2x pluss 3y, kvifor er ikkje det rett svar?

Elev: 2x + 3y, altså det der? *(peiker på oppgåveteksta)*

Meg: Nei, den der tenkte eg på *(peiker på det fyrste av svaralternativa)*

Elev: Å ja..2x og 3y..

Meg: Ja

Elev: Hm..skal eg plussa dei saman nå?

Meg: Nei, eg bare tenkte..det er eit mogeleg svaralternativ som nokon ville svart på denne oppgåva. Så bare lurer eg på kvifor syns du ikkje at det er eit rett svar?

Elev: Det er fordi dei må slåast saman

Meg: Så det har eigentleg ikkje blitt gjort nokon ting her?

Elev: Nei

Meg: Nei, ok. Og 5xy meinte du var eit rett svar, fordi at..?

Elev: Fordi at me tar 2 pluss 3, som blir 5, så set du saman x og y.

Meg: Ja. Og 2x gonger 3y, kvifor er ikkje det eit rett svar?

Elev: For..kvifor det ikkje er rett?

Meg: mhm

Elev: Det har jo ingenting med det å gjera

Meg: Men viss den personen som har gjort det har tenkt som så at me bare legg dei inntil kvarandre..

Elev: mhm

Meg: Det blir ikkje rett måte å gjera det på , det heller?

Elev: Nei

Meg: Og 6xy då?

Elev: Då har ein jo gonga dei to *(tala)*, og det er jo og feil

Meg: Ja, ok. Men hadde det vore mogeleg at fleire av dei hadde vore rette? Eller er det bare 5xy som stemmer her?

Elev: Det veit eg ikkje. Det er i så fall dei to der

Meg: Dei to fyrste der? Fordi den fyrste er på ein måte rett, bare dei har ikkje gjort noko med han?

Elev: mhm

Vedlegg 7.6.3: Intervju med elev 3

Fokus: oppgåve 10 (forståing av bokstavsymbol i likningar)

Tid: 13.04 min

6. oktober 2011

Meg: Då skal me sjå litt på oppgåve 10.

Elev: Ja

Meg: Der skulle du skriva ei matematikkforteljing til den likninga

Elev: Mhm

Meg: Husker du kva du tenkte då du såg den likninga?

Elev: Eh..eg syns..eh..eg syns det var ei lett likning og sånn, men eg syns det var litt vanskeleg å finna ut korleis eg skulle skriva ei forteljing til den. Men eg huskar ikkje heilt korleis eg kom på akkurat det der, men det var liksom bare enkelt.

Meg: Så du tok noko som..altså du såg at det var ein a, så då tok du ”a-klasse” fordi det likna?

Elev: Ja, og så tala som elevar.

Meg: Så a’en blir på ein måte ei forkorting for a-klasse då?

Elev: Ja

Meg: Så då tenke du det at når det står ein bokstav oppi der at det blir på ein måte ein merkelapp eller eit namn på eitt eller anna?

Elev: Ja

Meg: Kunne a hatt ei anna tyding?

Elev: Mm..eg veit ikkje heilt?

Meg: Kunne det stått for appelsiner?

Elev: Ja

Meg: Kunne det stått for ein kasse med appelsiner?

Elev: Mm…eg veit ikkje..

Meg: Nei, kvifor blei du usikker på den siste nå?

Elev: Ehm..eg tenkte liksom bare på a-klasse sidan det var sånn..ja, sidan det sto a. Men eg kunne sikkert brukt sånn som appelsinar og sånne ting, bare at, ja liksom at eg fekk fram at 2 appelsiner liksom pluss 5 appelsiner er lik 7.

Meg: Mhm

Elev: Så det var liksom sånn eg tenkte egentlig

Meg: Så det du tenker når du ser ein a er at det er namn på noko?

Elev: Ja

Meg: Då skal du få sjå på denne oppgåva her.*(Gir eleven eit ark)* Det eg tenkte med den..då har du fått ei likning som står 2x = -4, og der har eg lyst til at du skal prøva å finna ein verdi til den x'en. Ikkje ved å rekna ut noko, men bare ved å prøva deg fram. Bare testa ulike tal for det.

Elev: Okei..

Meg: Bare tenk høgt

Elev: Ja..eh..

Meg: Viss du for eksempel hadde starta med x = 1

Elev: Ja..

Meg: Går det an å seia at x er lik 1 der?

Elev: Nei

Meg: Kvifor ikkje?

Elev: Eg trur i alle fall ikkje det, eller eg hugsar ikkje så mykje sidan me ikkje har hatt om det endå. Men..eg trur i alle fall ikkje det går sidan..eh..eg veit eigentleg ikkje heilt

Meg: Viss me hadde sagt at x er lik 1 då

Elev: Ja

Meg: Kva kan me gjera for å sjekka om det stemmer då?

Elev: Blir det 2 ganger 1?

Meg: mhm

Elev: Og då blir det eh..2, og det er ikkje minus 4

Meg: Stemmer det. Så då må me prøva eit anna tal

Elev: Ja..eh..

Meg: Viss me tenke på at 4 har ein minus framfor

Elev: Går det an å ta 2 gonger 2? Nei, at det blir minus 2?

Meg: Ja, at x er lik minus 2?

Elev: Ja

Meg: Viss me prøver å setja inn det, kva ville det blitt då?

Elev: Då blir det jo to gonger to som er 4, og setje eit minus framfor

Meg: mhm

Elev: Og då blir det jo minus 4

Meg: Så x er lik minus 2?

Elev: Ja

Meg: Okei, kvifor kan me bare prøva oss fram slik for å finna ein verdi for x? Kva fortel det om x’en?

Elev: Kva meiner du?

Meg: Altså når me bare kan testa ut..me kan testa ut 0, me kan testa ut 100, me kan testa ut alt mogeleg.

Elev: mhm

Meg: Kva fortel det oss om x’en?

Elev: Mm..eg veit ikkje, men viss du ikkje veit det så er det jo bare å testa ut forskjellige for å prøva å finna rett svar. Og så viss du er langt frå, så, ja eller viss du skal ha minus, så er det bare å teste med å liksom prøva å få det til å bli minus. Og viss du er langt frå så kan du prøva med endå litt høgare tal, og så sånt at du til slutt finn fram til svaret.

Meg: Så det som eigentleg er med x’en, er at den kan vera mange ulike verdiar?

Elev: Ja

Meg: Det er det du meiner?

Elev: Ja

Meg: Så me kan testa oss fram til å finna ein verdi?

Elev: Mhm..

Meg: Så x kan variere?

Elev: mhm

Meg: Så det er kanskje det me meiner når me seier at x er ein variabel? Har du høyrt ordet variabel før?

Elev: Ja

Meg: Mhm. Men viss me då ser tilbake på denne her. *(Peiker på oppgåve 10, og svaret i den).* Så tenker me at a skal vera ein variabel. I den måten du har tenkt på der, kan a variera der?

Elev: Mm..korleis tenker du at liksom at?

Meg: Altså eg tenker her at her fann me ut at x er ein variabel, det vil seia at x kan ha mange ulike verdiar, me veit bare ikkje akkurat kvifor ein verdi. Og det blir det same med a, det kan ha mange ulike verdiar, me veit bare ikkje akkurat kva slags verdi det har. Så om me tenker at a står for a-klasse, kan den variera?

Elev: Ja, den kan vel det? Kan den ikkje det då?

Meg: Korleis kan den variera?

Elev: Eh..

Meg: Kan me setja inn nokon tal for a?

Elev: Å ja..ja..trur det. Skal den a'en vera den same der og der? *(peikar på 2a og 5a)*

Meg: Ja

Elev: Okei.

Meg: Du har jo kalla det 2 a-klasse jenter og 5 a-klasse jenter

Elev: Ja. Mm..ehm..eg finn det ikkje heilt ut no, men det går jo an, viss me tenker på same måte som i den, så går det jo an å finna ut.

Meg: Men..altså når du har kalla det for a-klasse, så har du jo gjeve det eit namn. Den kan ikkje variera då, kan den det?

Elev: Nei, den kan ikkje variera då..

Meg: Så då treng me kanskje ei anna forklaring på den a'en?

Elev: Ja..eller i alle fall, i denne når eg har kalla det a-klasse, så blir det jo a-klasse, men sånn som i forskjellige stykke så blir jo x'en heilt forskjellig fordi det er forskjellige tal. Sånn at, i min oppgåve blir det a, men i forskjellige stykke så kan det bli forskjellige tal ut i frå korleis oppgåva er

Meg: Ja, så du tenker at det kan vera ulike typar forklaringar til kva den a'en er?

Elev: Ja

Meg: Okei. Då skal me gjera ei litt anna oppgåve. Eg har tatt med nokre fyrstikkesker her. Her tenker eg at eg har ei fyrstikkeske, og du skal få to. Ingen av oss veit kor mange fyrstikker me har oppi eska, men me veit at det er like mange i alle tre.

Elev: Okei

Meg: Kan du skriva opp eit uttrykk for kor mange fyrstikker meg og deg har til saman?

Elev: Mm..

Meg: Er det ein måte å rekna det ut på?

Elev: Kva, skal eg finna ut kor mange fyrstikker det er i kvar?

Meg: Viss du skriv opp ein måte å rekna ut det på?

Elev: Hm..

Meg: Det blir jo som å skriva opp ei likning då

Elev: Ja. Hm..Eg veit ikkje om det går an å skriva det, men.. *(eleven skriv 2x + 1x).* Går det an å skriva slik?

Meg: mhm. Men kor mange fyrstikkesker har me til saman?

Elev: 3

Meg: mhm. Viss me vil finna ut kor mange fyrstikker det er til saman, må du tilføya noko på den likninga der då?

Elev: Eh..er lik 3x?

Meg: Så du har skrive no at 1x pluss 2x er lik 3x?

Elev: Ja

Meg: x’en, kva er den for noko? Kva tyder den?

Elev: Ehm..eh..1? Blir det det?

Meg: Kvifor tenker du at x er lik 1?

Elev: At 1 gonger 1 er 1, 2 gonger 1 er 2, og då blir det 3.

Meg: Men om du skal tenka på kva x er akkurat i dette tilfellet med fyrstikkesker. Står x’en for fyrstikkesker?

Elev: Ja, gjer den ikkje det?

Meg: Eller står den for fyrstikker?

Elev: Ja, for fyrstikker?

Meg: For fyrstikker?

Elev: Ja

Meg: Fordi at her har du skrive..

Elev: Å ja, her er fyrstikkeskene og her er fyrstikkene.. *(Ser at tala er antall fyrstikkesker og x'ane står for fyrstikker)*

Meg: Så det du har skrive opp er at det er 1 fyrstikkeske med x antall fyrstikker oppi.

Elev: Ja

Meg: Så då veit me at x kan variera for me aner ikkje kor mange det er oppi her. Mhm?

Elev: Ja

Meg: Viss du nå har lyst å vita kor mange fyrstikker me har til saman, må me då telja alle saman? Altså må me tøma alle eskene og telja alle fyrstikkene? Eller kan me gjera det ut frå den likninga her? Er det nok å opna ein boks til dømes?

Elev: Det er nok å opna ein for då kan du jo bare gonge det med så mange boksar som det er

Meg: Så x'en er den same i alle ledda her?

Elev: Ja

Meg: Okei, så om me opnar opp den eine no. Kor mange er det oppi?

Elev: 5?

Meg: Ja. Kan du rekna ut kor mange me har til saman?

Elev: Ja..ehm..skal eg liksom skrive dei tala foran?

Meg: Det er vel 3x som viser kor mykje det blir til saman, er det ikkje det?

Elev: Det blir jo vertfall 15 då

Meg: Kvifor blir det 15?

Elev: Fordi 5 gonger 3, det er liksom dei 5, gonger med 3 boksar, så blir det 15

Meg: Mhm. Skal me sjekka om det stemmer? *(Tømer ut alle fyrstikkane frå eskene)* Kor mange er det her?

Elev: 15

Meg: Då har du funne ei likning for å rekna ut det

Elev: Ja

Meg: Kunne den forklaringa blitt brukt på oppgåve 10 og trur du?

Elev: Hm..eh..det kunne vel det

Meg: Kva tenker du er skilnaden på den fyrstikkforklaringa og den forklaringa du gav på oppgåve 10?

Elev: Her visste eg jo kor mange..eller når eg tenkte så tenkte eg liksom..2 a-klasseelever og 5 a-klasseelever er liksom 7 a-klasseelever. Men her måtte eg jo fyrst finna ut kor mange fyrstikker det var i eskene og sånt. Men eg trengte jo ikkje finna ut noko sånn på den

Meg: Nei, okei, så der *(oppgåve 10)* tenker du at alt var oppgitt så du ikkje trengte finna ut noko?

Elev: Ja

Meg: Men viss det hadde stått 2x pluss 5x er lik 7x, hadde du tenkt det same då?

Elev: Mm..nei, eg hadde vel ikkje tenkt det same då..

Meg: Så du tenker at det er skilnad, a og x er ulike typar variable?

Elev: Ja, litt

Meg: Kva tenker du er skilnaden?

Elev: Eg veit ikkje, eg tenker liksom bare på at..eller eg veit ikkje om det er nokon skilnad, det kan godt vera, men eg tenker liksom bare at x det veit eg liksom ikkje kva er for noko. Så det må eg finna ut på ein måte. Mens..ja..

Meg: Mens a’en kan du bruka til noko konkret?

Elev: Mhm..

Meg: Okei, ja det var vel det eg hadde her.

Vedlegg 7.7.1: Time 1 – Prioriteringsproblem

Dato: 17.oktober 2011

Fyrste timen i arbeid med problembasert matematikk. Forklara elevane korleis dette skal gå for seg med samarbeida om å løysa ulike problem som vil bli drøfta i fellesskap i klassa. Viktig å presisera at me ikkje er ute etter kven som svarar rett eller feil, men ute etter å få fram mange ulike meiningar for å i fellesskap finna fram til dei rette løysingane. Dette vil me gjera for å læra algebra på ein best mogeleg måte. Elevane arbeider i grupper på to eller tre.

1) Oppgåve:

Ein sjokolade kostar 12 kroner, ein pose peanøtter 15 kroner, og ei brus kostar 20 kroner.

a) Kva symbol vil de bruka for antall sjokolader, antall poser peanøtter og antall brus?
b) Solveig skal kjøpa både sjokolade, peanøtter og brus, men er usikker kor mange av kvar ho har råd til å kjøpa. Kan de setja opp eit uttrykk slik at det blir enklare for Solveig å rekna ut?
c) Solveig bestemmer seg for å kjøpa 2 sjokoladar, 1 pose peanøtter og 2 brus. Ho rekner ut at ho må betala 7540 kroner. Solveig går så i kassa for å betala. Der viser det seg at ho ikkje treng betala meir enn 79 kroner. Kva har Solveig gjort feil i utrekninga si?

Klassesamtale:

- *Få fram dei ulike uttrykka elevane har sett opp, og drøfta seg fram til det rette.*
- *Få elevane til å gje forklaringar til del c.*

- Når ein arbeider med algebra, kan det vera fleire operasjonar som skal gjerast. Då er det viktig at me tenker på korleis me skal prioritera alle rekneoperasjonane.

  → *gje elevane litt tid til å formulera reglar for prioritering*

- Sjå på uttrykket: 3x + (2x + x). Korleis kan me løysa opp denne? Mogelege svar:
  - 3x – 2x + x
  - 3x + 2x + x
  - 3x – 2x – x
  - 3x + 2x – x

  - Kva om det står – framfor parentesen?

Algebra er ikkje noko nytt. I dei gamle sivilisasjonane som til dømes hjå egyptarane for 3500 år sidan dreiv ein med algebra. Ein hadde ikkje dei same symbola og skrivemåtane som me har i dag, men algebra var det likevel. I 1858 var det ein mann frå Skottland som heitte Alexander Henry Rhind som arbeidde som arkeolog i Egypt. Han fekk tak i ein papyrusrull som viste seg å vera frå ca. 1650 f.kr.[1] Ved nærare ettersyn viste det seg at denne inneheldt mange matematiske problem med løysingar. Me skal sjå på eit taltriks som og sto i denne papyrusrullen.

2) Talltriks frå egyptisk rekning

- Tenk på eit tal
- Legg til 5
- Gang med 2
- Trekk frå 4
- Divider med 2
- Trekk talet du hadde fyrst, frå
- Du får 3

Prøv dette trikset på fleire av elevane i timen.

Kvifor er det sånn? Kan me finna ein generell regel for dette? *Gje elevane tid til å jobba i lag for å prøva å koma fram til ein samanheng.*

Vis egyptarane sin notasjon med stjerner og prikkar. Her brukar egyptarane symbol for å visa korleis dei har rekna. Stjerna er det ukjente talet medan prikkane viser operasjonane som skal gjerast. Me ser at ved å bruka symbol kan dei skriva ting enkelt i staden for å skriva det ut med ord. I slike tilfelle er bruk av symbol veldig nyttig!

Ta så felles på tavla. Trekk inn prioriteringsbiten i samband med parentesane.

$$\frac{2(x+5)-4}{2} - x = \frac{2x+10-4}{2} - x = x+3-x = 3$$

Oppsummering

[1] Henta frå: http://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_papyrus

Vedlegg 7.7.2: Time 2 – Likskapssymbolet

Dato: 20.oktober 2011

Elevane arbeider i grupper på to eller tre

1) Finn to tal som til saman er like mykje som 12 + 10[1]:

12 + 10 = __ + __

Kva fortel det oss om likskapsteiknet at me kan ha mange ulike kombinasjonar av tal her?

2) Sjå på 12·2 som ein subtraksjon mellom to tal:

12·2 = __ - __

Få elevane til å koma med fleire døme på svar. Skriv så ut ei heil likning og få nokon av elevane til å forklara kva som står der.

Eks.: ”12 ganger 2 blir det same som 26 minus 2” ”12 ganger 2 er det same som 26 minus 2”

Få elevane til å rekna ut likninga slik at det blir 24 = 24. Kva står det her? Er dette eit fullgodt svar?

3)

1. Kva for nokre av desse likningane stemmer? Grunngje svaret
   a. 4+2 = 6
   b. 7 = 2+5
   c. 3·(8-2) = 25 – 6

2. Fyll i eit tal slik at likskapen blir sann:
   a. 3 + __ = 5+4
   b. __ - 5 = 5-2

3. Sett i rett teikn slik at likskapen stemmer:
   a. 12·2 = 8 __ 3
   b. 100 – 20 = 20 __ 4

[1] Oppgåvene er henta frå (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 2009, ss. 52, 53, 73)

Klassesamtale:

- Er 4 + 2 = 6 det same som 6 = 4 + 2 ? Kvifor eller kvifor ikkje?
- 8 + 5 = x + 6. Kva står x for?
- 12 = x + y. Kva tal er x og y? Er x større enn y? Kan dei vera dei same?

Ordet likning kan me sjå på som at betyr at noko er likt, altså er høgre og venstre side like

4) Oppgåve

Anna fekk 50 kr av mormora si. Etterpå kjøpte ho ei bok for 125 kr. Då hadde ho 30 kr igjen. Anna har gløymt vekk kor mykje pengar ho hadde frå starten, og sette seg ned for å rekna det ut.

Ho sette det opp slik: 30 + 125 = 155 – 50 = 105.

Er dette rett svar? Og har Anna sett det opp på rett måte?

Taltriks:[2]

- Kor gammal er ein person?
- Kva månad er personen fødd i?

1. Multipliser fødselsmånaden din med 2
2. Legg til 5
3. Multipliser med 50
4. Legg til alderen din
5. Trekk frå talet på dagar i eit år (365)
6. Legg til 115

Oppsummering:

- Likskapsteiknet står for ”er lik”. Venstre og høgre ledd er ulike generelle uttrykk for same talet. Det er ikkje eit signal som seier ”her skal svaret koma” eller ”no skal du rekna ut kva det blir”.
- Det er ikkje nødvendigvis slik at det står eit uttrykk på venstre sida av likskapsteiknet og eit tal på høgre sida, det kan og vera heilt omvendt.
- To variablar kan ha lik eller ulik verdi

[2]Henta frå H.Tjora (2010, side 105): ”Mattemagi”

Vedlegg 7.7.3: Time 3 – Forståing av bokstaven i algebra

Dato: 27.oktober 2011

Elevane arbeider i grupper på to eller tre.

Spør kva elevane tenkjer på når eg skriv ordet ”algebra” på tavla. Fortel om fordelar ved å nytta bokstavar/variable i uttrykk, med tanke på generalisering

1) Oppgåve[1]

I denne oppgåva arbeider me med å lesa eit problem og så skriva det ned som ei algebraisk likning med bokstavsymbol. Dette kan samanliknast med å oversetja frå eit språk til eit anna

Lena legg fliser på golvet i baderommet. Mønsteret har dobbelt så mange blå fliser som kvite fliser.

a) Ein av dykk skal fortelja den andre om kva som er innhaldet i oppgåva. Bli einege om innhaldet.
b) Kva er ukjente storleikar i situasjonen som er skildra?
c) Kva symbol vil de bruka for dei ukjente storleikane?
d) Skriv eit symboluttrykk for denne situasjonen ved å bruka symbola de valde ut i c).

(Dette blir kalla å oversetja frå ord til symbol)

e) Lag ei teikning av golvet med blå og kvite fliser.
f) Undersøk om det de får når de tel på teikninga er det same som det de får når de brukar tal og set inn i symboluttrykket i d).

Klassesamtale:

- Ser at ut frå dette uttrykker variablar generelle samanhengar som er uavhengig av kva verdi me gjev dei to variable.
- Problematiser skilnaden ved at b symboliserer blå fliser eller antall blå fliser
- Presiser at verdiane bokstavar i algebra varierer etter kva tal me set inn, altså kan me kalla dei for variablar.

2) Diskusjonsoppgåve

[1] Oppgåve henta frå (Brekke, Grønmo, & Rosén, 2000, s. 82)

I denne oppgåva går me andre vegen; frå symbol til tekst.

Ein 9.klasse på Lien skule fikk i oppgåve å tolka kva følgjande likning kunne tyda:

$2a + 5a = 7a$

Kven av elevane har tolka likninga på rett måte?

Trine:

"Per gikk i skogen og fant 2 kurver med ukjent antall kantareller. Så møtte han Lise som hadde 5 like store kurver med samme antall kantareller. Hvor mange kantareller hadde de til sammen?"

Petter:

"Mari kjøper 2 sjokolader på mandagen og 5 sjokolader på onsdagen. Hun sparer alle til lørdag. Hvor mange sjokolader har hun da mulighet til å spise på lørdagen?"

Jens:

"Det var en gammel mann som gikk tur i skogen. Så fant han en lapp hvor det sto 2a. Litt etterpå fant han en det sto 5a på. Til slutt fant han en hvor det sto 7a. Da tenkte mannen 2a + 5a = 7a."

Diskuter dei ulike alternativa med elevane etter at dei har fått tid til å tenka gjennom dei.

3) Fyrstikkoppgåve:

Eg har 3 fyrstikkesker, Eirik har 3 fyrstikkesker. Ingen av oss veit kor mange fyrstikker som er oppi eskene, men me veit at det er like mange i kvar.

Sett opp eit uttrykk for kor mange fyrstikker me har til saman

Kvifor må den ukjente vera antall fyrstikker og ikkje fyrstikkesker?

Viss me vil finna ut kor mange me har til saman, må me då ta ut av alle og rekna?

Vedlegg 7.7.4: Time 4 – Å rekna med variablar

Dato: 3. november 2011

Elevane arbeider i grupper på to eller tre

Tidlegare har me sett på parentesar, likskapsteiknet og kva den variable er for noko. I timen i dag skal me sjå nærare på korleis ein reknar med variable, og då får me bruk for alt me har lært så langt.

Diskusjonsoppgåve:

I ei klasse får elevane i oppgåve å forenkla uttrykket: $2a + 5b + a$. Det viser seg at elevane ikkje blir einege om kva svar som er rett:

1. Petter: $7ab$
2. Stian: $2a^2+5b$
3. Lise: $3a + 5b$
4. Stine: $8a$

Gruppene frå utdelt kvar sin lapp med eitt av desse svara. Dei skal så avgjera om det er eit fornuftig svar, og dessutan korleis personane kan ha tenkt for å koma fram til det.

Klassesamtale:

- Skriv opp kvart av svara på tavla, og får nokre av elevane til å forklara kvifor/kvifor ikkje det er gode forslag.
- Er $3a + 5b$ eit "svar"? Må me ikkje trekkja saman? Dette er svar på ei generell utrekning → opne svar er lov!

Sjå på desse uttrykka:

- $2 + 3x$
- $5y + 1z$

Spør elevar kva dei trur ein kan gjera feil i slike uttrykk. Få deretter elevane til å formulera generelle misoppfatningar knytte til rekning og forenkling av slike uttrykk.

Algebra-bingo: (http://matematikk.org/_voksne/uopplegg/vis.html?tid=65940)

Elevane får utdelt kvar sitt brett med svar på algebraoppgåver. Lærar skriv opp oppgåvene på tavla, og elevane krysser ut på brettet sitt når dei har rekna ut svaret.

Vedlegg 7.8.1: Logg etter time 1

2 elevar hadde gått over til ei anna gruppe, så no er det 14 elevar att.

Byrja timen med å forklara korleis me skal arbeida dei neste 4 øktene, med problembasert matematikk. Forklarte vidare kor viktig det er å forklara korleis ein tenker og lytta til kvarandre med respekt. Dessutan at det er lov å gjera feil, fordi det er det me saman kan læra av.

Elevane jobba bra med oppgåva. Både faglærar og eg gjekk rundt og hjelpte til. Fleire som hadde litt startproblem med at dei ikkje forsto oppgåva, men kom i gong etter kvart. Etter ca 20 min byrja me å ta det felles.

I oppgåve a) hadde elevane anten brukt x, y, z eller s, p, b. Ein av dei meinte x, y, z var best fordi det var mest brukt i matten. Ein annan meinte at alle var rett, men at det var mest praktisk å bruka s, p, b fordi me då visste enklare kva dei sto for.

b) var litt utfordrande når dei skulle få med både pris og antall. Fekk fleire forslag:

$x^2 + y^2 + z^2 = 47$

$(12 \cdot x) + (15 \cdot y) + (20 \cdot z)$

$s \cdot 12 + p \cdot 15 + b \cdot 20$

$(s \cdot 12) + (p \cdot 15) + (b \cdot 20)$

Her blei det litt diskusjonar om parentesen skulle vera med eller ikkje, dermed blei overgangen naturleg for å trekkja inn feilen Solveig hadde gjort i del c). Ei meinte at parentesen berre forvirra, ein annan at det var viktig at den var der for å skilja. Dei såg etterkvar klart kvifor parentesen var viktig der. Når elevane jobba med del c) hadde dei stortsett rekna rett, sikkert fordi dei skilte mellom sjokolade, peanøtter og brus. Men ein del av dei fann og ut kor Solveig hadde rekna feil. Litt utfordrande deloppgåve for ein del, fordi det kunne vera mange ting som var feil.

Gjekk så vidare til å påpeika at me ut frå dette treng reglar for prioriteringar. Elevane fekk nokre minutt til å prøva å formulera eigne reglar. To elevar bidrog med desse som me blei einege om:

1) Løys opp parentesen
2) Multiplikasjon og divisjon
3) Addisjon og subtraksjon

Me blei dessutan einege om at den fyrste var litt overordna, og dei to andre var hjelpemiddel for å løysa parentesen.

Skreiv så opp likninga: 3x + (2x + x) som me løyste i fellesskap ved å nytta reglane. Bytta deretter forteikn til: 3x – (2x + x), og såg at dersom me berre tok bort parentesen ville ikkje det bli same svar som om me fyrst rekna ut inne i parentesen.

Deretter gjekk me over til taltrikset. Prøvde det ut på to elevar, der svaret begge gongene blei 3. Den eine av desse byrja med å forklara kvifor det måtte vera sånn. At når ein trekker frå det opphavlege talet, vil ein alltid få same svar. Me såg korleis egyptarane hadde skrive det opp, og eg presiserte at for det ukjente talet kan me velja kva symbol me vil bruka. Deretter fekk dei tid til å prøva å formulera ein samanheng i meir moderande algebraisk språk.

Me tok det felles på tavla og brukte x som ukjent tal. Såg då at når me fekk x + 5 · 2, trengte me å bruka parentesar. Då me hadde skrive opp heile uttrykket var det mange parentesar. Desse løyste me steg for steg. Då fekk me utfordringa med 2(x + 5) og korleis det skulle løysast. Me såg og etterpå at svaret hadde blitt feil om me hadde løyst den parentesen som til dømes 2x + 5, og ikkje 2x + 10.

Oppsummerte timen ved å presisera kor viktig det var med prioriteringsreglane i arbeidet med algebra.

Elevane jobba veldig bra den timen, og både eg og faglærar var veldig nøgd med timen. Dei fekk skryt frå oss begge mot slutten av timen. Og faglærar la vekt på at det var bra at så mange hadde bidratt, og at dei som hadde svart ”feil” hadde svart det mange andre og tenka. På denne måten trur eg dei vil halda oppe det same motet for neste time.

Vedlegg 7.8.2: Logg etter time 2

15 elevar tilstades, ei ny

Byrja timen med å ta opp tråden frå førre gong, at me i denne timen skulle fortsetja med same arbeidsmetode som sist.

Då eg skreiv opp $12 + 10 = \_\_ + \_\_$, og bad elevane finna ut kva dei ville fylla inn på dei ledige plassane, var det ein elev som med ein gong spurte om ikkje det kunne vera mange ulike svar på det. Eg fekk opp 5 døme på tavla av kva nokre av elevane hadde funne ut. Spurte så kva dette fortel oss om ei likning og likskapssymbolet. Me kom fram til at det skulle vera likt på begge sider, og eg presiserte at det var viktig å tenka på likskapssymbolet som ”er”.

Til oppgåva $12 \cdot 2 = \_\_ - \_\_$ fekk eg 3 dømer på tavla. Brukte eitt av dei og skreiv ut likninga $12 \cdot 2 = 30 - 6$. Fekk ein av elevane til å formulera kva som stod der, og alle var einege med denne eleven i at $12 \cdot 2$ ”er lik som” $30 - 6$. Deretter rekna me det ut, og fekk likninga $24 = 24$. Eg spurte dei om det var eit fornuftig uttrykk. Ein elev meinte at det for så vidt var rett, men at det ikkje var noko å rekna ut der. Elles meinte dei at det var greitt å skriva det slik. Eg påpeika der at det i ein slik situasjon var viktig å sjå på likskapssymbolet som ”er”, og ikkje ”blir”, fordi 24 er lik 24.

Elevane arbeidde bra med *oppgåve 3*. Ein av elevane spurte meg om ikkje dette var litt ”6.klasse-pensum”, så eg trur nok ein del av dei syns det var litt barnslig. Men samstundes arbeidde dei greitt, og spesielt deloppgåve 4 såg ut til å engasjera ein del. Ein elev ville laga likningane vanskelegast mogeleg, andre prøvde liknande som dei i dømet. Eg trur at når dei får laga eigne oppgåve /døme kan vera meir motiverande enn å løysa vanlege ”standardoppgåver”, fordi dei når dei får laga dei sjølv, ser meir kva som må til for at det skal bli ei likning.

Me gjekk gjennom oppgåva felles. Alle var einege om at 1c) var den likninga som ikkje stemte. Me rekna ut på begge sider for å sjekka. Fekk då 18 på eine sida, og 19 på andre. Sidan ein ikkje kan skriva $18 = 19$, meinte ein av elevane at me heller ikkje kunne setja likskapsteiknet mellom $3 \cdot (8 - 2)$ og $25 - 6$. Altså kunne me ikkje kalla 1c) ei likning.

For deloppgåve 2 snakka me litt om korleis elevane kom fram til svaret. Dei fleste hadde prøvd seg fram, men ei av dei snakka om at ein i 2a) kan flytta 3 over på andre sida, og rekna det ut på den måten. Deloppgåve 3 hadde dei fleste fått til, og me var einege om at for å sjekka om svara stemte kunne me sjekka om me fekk likt svar på begge sider.

I forlenginga av oppgåve ein spurte eg elevane om 4 + 2 = 6 er det same som 6 = 4 + 2. Alle meinte at dei var heilt like fordi ein fekk 6 = 6 på begge. Vidare hadde eg handsopprekning på kva for ein av dei to dei ville valt å bruka om dei måtte velja. Ein elev meinte den andre, elles var alle einege om den fyrste. Då eg spurte kvifor dei hadde valt den, sa ein at det var den mest vanlege skrivemåten i mattebøker, men at begge to var rett.

Eg skreiv opp likninga 8 + 5 = x + 6 på tavla. Elevane kom dei raskt fram til svaret. Eg endra så på likninga, fyrst til 800 + 500 = x + 600, og så til 811 + 489 = x + 573, for å sjå om dei ville rekna det ut på ein annan måte enn å berre prøva seg fram. For den fyrste endringa hadde dei fleste eigne tenkemåtar for å koma fram til svaret, medan for den andre såg dei at det kunne vera greitt å flytta 573 over på andre sida for å rekna ut x.

Deretter såg me på 12 = x + y. Ein elev meinte at x og y måtte vera ulike Dei fleste var einege med ho i det, bortsett frå ein elev som sa at både x og y kunne vera 6. Når ingen andre var einege med han, blei han litt usikker. Men eg forklarte så at både x og y er variablar og kan ha alle mogelege verdiar. Derfor kan x og y anten vera ulike tal, eller ha same verdi.

For *oppgåve 4* rekna dei fleste ut eit svar for å sjekka om Anna hadde rett. Dei fleste brukte aritmetiske måtar som likna på dei Anna hadde brukt. Konklusjonen frå samtlege grupper var at Anna hadde rett svar, men at dei ikkje var heilt einege i framgangsmåten. Nokre kom på å sjekka om likskapane stemte, andre måtte ha litt hint for å sjå at Anna hadde rekna 155=105=105. To grupper fekk ideen at dei kunne skriva det som ei likning: x + 50 – 125 = 30. Då me gjekk gjennom oppgåva var det ein annan elev som foreslo 30 – 50 + 125 = 105. Me fann ut at desse to likningane var like, berre at sistemann hadde skrive 105 i staden for x. Og x skulle jo vera 105.

Gjekk så over til taltrikset. Eg prøvde det ut på ein elev. Skreiv så opp framgangsmåten på tavla, og slik fekk dei testa den ut sjølv. Deretter jobba me i fellesskap med å koma fram til eit uttrykk for å forklara samanhengane i taltrikset:

(2x + 5)50 + y – 365 + 115

Her måtte me ha symbol for fødselsmånad og alder. Elevane godtok å kalla fødselsmånad for x. Men då me skulle ha eit symbol for alder, meinte ei at me kunne bruka x der og, men at det var mest praktisk å kalla den noko anna. Her har ho nok blanda med det me snakka om tidlegare, at x og y kan ha same verdi, og overgeneralisert det til å gjelda i denne samanhengen og.

Då me skulle rekna ut parentesen, var det ein elev som føreslo å multiplisera 7x med 50. Her ser me misoppfatninga om å oversjå variabelen. Etter å ha forenkla uttrykket kom me fram til: 100x + y.

Me oppsummerte timen ved at eg fyrst spurte elevane om kva dei meinte hadde vore det viktigaste i timen. Men elevane var slitne, og ingen svara, så eg presiserte at to viktige punkt var at:

- Teiknet = tyder ”er”, slik at det skal vera likt på begge sider
- x og y er begge variablar som kan variera, og at dei kan ha både same verdi, og vera ulike.

Aktive elevar i dag og. Ofte dei same to eller tre som seier mykje, men av og til er det nokre av dei andre som kjem med fleire innspel.

Vedlegg 7.8.3: Logg etter time 3

14 elevar tilstades

Faglærar byrja timen med å snakka om at me nå var halvvegs i prosjektet *vårt*, og at det er ei veldig verdifull tilnærming til matematikken med eit slikt fokus på misoppfatningar som det me driv med.

Då eg spurte elevane kva dei forbind med algebra kom tre elevar med desse punkta:

- Likningar
- Bokstavar
- Parentesar

Eg gjekk vidare med punktet om bokstavar og forklarte fordelen med dei i samband med generelle samanhengar slik at ein ikkje treng å testa ut spesifikke verdiar for kvar gong.

I arbeidet med *oppgåve 1* hadde mange problem med å forstå kva dei skulle gjera i del a. Eg presiserte både då eg snakka med gruppene og etterpå i fellesskap, at det er viktig å leita seg fram til den relevante informasjonen i ei tekstoppgåve. Mange prøvde og her å formulera ein matematisk samanheng, to døme på det:

- $2 \cdot x$ (at den eine variabelen var dobbelt så stor som den andre)
- $x = (y + (2 \cdot z))^3$ (x’en her er volumet av badegolvet, og y og z er antall fliser)

Som ein ser ut frå det siste punktet, var det mange som i del b meinte at og storleiken (nokre meinte volumet) av badegolvet var ein ukjent storleik. Andre meinte at storleiken på flisene og var noko å ta med i arbeidet. Det tok litt arbeid for å forstå at det einaste me arbeidde med var forholdet mellom antallet av dei ulike flisene. I gjennomgangen prøvde eg å stilla opp mot kvarandre å sjå på dei ukjente storleikane som ”fliser” eller ”antall fliser”.

I del c brukte dei fleste symbola x og y, men ein elev meinte at b og h kunne og brukast. I tillegg påpeika eg at og eit hjarte og stjerne kunne vore brukt, for å presisera at det ikkje er kva symbol ein bruker som er det viktige, men den faktisk bruken av symbol.

Det å skulle formulera ein samanheng i d var ei utfordring for nokre. Ei av gruppene hadde skrive opp ”x y” utan å sjå kva dei skulle gjera vidare. Då eg sa at dei måtte ta med eit likskapssymbol, såg dei fort samanhengen $x = 2y$. Ei anna gruppe skreiv opp uttrykket $x + 2y$. Då dei hadde teikna opp mønsteret i e, såg dei at det var noko som ikkje stemte. Med litt hjelp kom dei fram til ein samanheng der både teikninga og uttrykket stemte overeins. Me snakka litt om kva verdiar som kan setjast inn for variablane i uttrykket, og blei einege om at det kunne vera både store og små tal, avhengig av kva samanheng dei skulle brukast til.

Oppgåva var nok litt uvant for mange av dei, men med innbyrdes samtale elevane mellom, og hjelp frå faglærar og meg gjekk det greitt.

I *oppgåve 2*, der me gjekk frå symbol til tekst, blei det mange ivrige samtalar elevane i mellom. Det var interessant å gå rundt å få med seg grunngjevingane deira. I eine gruppa var den eine overbevist om at Petter si forklaring (tolking som konkret objekt) var rett og den andre overbevist om Trine si (rette) forklaring. Det heile enda med at han siste greidde å overbevisa sidemannen om kvifor Trine si forklaring måtte vera den mest fornuftige. I ei anna gruppe var begge overbevist om Petter si forklaring fyrst, men då eg kom tilbake litt seinare hadde dei endra meining etter å ha studert det litt meir nøyaktig. Dei fleste gruppene avskreiv Jens si forklaring (med variablane som sjølvstendige objekt) ganske fort som ”heilt på jordet”, og meinte at mannen like godt kunne kome fram til ei anna likning. Me blei og einege i fellesskap etterpå om at det var ingenting som varierte i den forklaringa.

Ein elev meinte at Petter si forklaring var ”mest logisk og konkret”, ei anna peika på at dette var den ”klassiske forklaringa”. Tolking som konkret objekt sit nokså djupt hjå mange. Dei fleste meinte at både Petter og Trine hadde ei bra forklaring. Ein elev kunne ikkje godta Trine si forklaring fordi det der var eit ukjent antall og ikkje noko konkret. Då me snakka i fellesskap var me alle einege om at det var antall kantareller som varierte i fyrste forklaringa. I Petter si forklaring kunne både type sjokolade, storleiken på sjokoladen og antall ruter variera. Ein elev meinte at det ikkje var relevant for oppgåva. Og me diskuterte om det var tilstrekkeleg å skriva ”2 + 5 = 7” på denne. Nokre meinte at me måtte ha med variabelen, og ville setja inn talet 1[1] for då blei det likt på begge sider av likskapsteiket. Eg viste at det blei likt uansett kva tal ein sette inn der. Faglærar presiserte at det var viktig å sjå på kva som gav meining i ei forklaring på ei likning.

Dei fleste blei tilslutt einege om at Trine si forklaring var den einaste som stemte med likninga, medan ein elev ikkje heilt greidde å gje slepp på tolkinga med konkret objekt.

For å prøve å overbevisa han tok eg fram tre fyrstikkesker, og skreiv likninga 1f + 2f = 3f på tavla. Vidare snakka me om kva f’en kunne stå for. Den eleven som hadde tolking som

[1] Misoppfatning om å setja variabel lik 1

konkret objekt i førre avsnitt var ein av dei fyrste til å seia at f måtte vera antall fyrstikker. Deretter prøvde me å rekna ut for ein konkret talverdi for å sjå om likskapen stemma.

Sat att med ei kjensle at me fekk, spesielt i oppgåve 2, koma borti fleire kognitive konfliktar i løpet av timen.

Vedlegg 7.8.4: Logg etter time 4

12 elevar tilstades

Byrja med å trekka parallellar til det me har snakka om før; parentesar, likskapsteiknet og forståing av variabelen, til det å rekna med variablar.

Fekk inntrykk av at elevane var blitt meir vant med arbeidsmetoden, og dei byrja rett på med å snakka seg i mellom på *diskusjonsoppgåva.* Eg skreiv opp uttrykket på tavla, og dei ulike alternativa samstundes som elevane diskuterte det dei hadde fått utdelt. Dei var einege i kva svar som var rett, men eg ville at me skulle ta for oss dei andre og. Så eg fekk dei gruppene som hadde hatt dei ulike svara, til å sei korleis dei trudde personane hadde tenkt for å koma fram til dei ulike svara. På denne måten fekk elevane sjølv tenka gjennom ulike misoppfatningar, som kan ha ført til ei kognitiv konflikt om det var nokon av elevane som sat med ei eller fleire av desse.

Eg spurte i klassa om 3a + 5b var eit godt nok svar sidan det ennå sto eit plussteikn inni uttrykket. Dei meinte at det var det. Ein elev forklarte det med at dersom ein hadde teke bort ein av variablane ville ein ikkje fått rett svar dersom ein hadde fått oppgitt verdien på variablane. Det var derfor viktig å la uttrykket stå slik.

Skreiv deretter opp utrykket: 2 + 3x, og spurte elevane kva for nokre feilsvar/forkortingar dei trudde det var mogeleg å få på denne. Fekk fleire døme på svar: 5x, 5. Deretter skreiv eg opp to: 23x og 6x. Eg spurte deretter kva som var viktig å tenka på når ein hadde slike uttrykk. Ein elev foreslo at ein kan berre leggja saman ledd med like variablar.

På bakgrunn av diskusjonsoppgåva og det som kom fram frå uttrykket 2 + 3x, fekk elevane litt tid til å formulera kva dei trudde kunne vera ting ein gjorde feil i slike tilfelle, altså misoppfatningar. Fekk opp 4 slike. Dei hadde 5 forslag, men eg slo saman to av dei til å bli den fyrste. Faglærar spurte om elevane kunne gje døme på kvar einskild av dei. Eg skreiv då opp uttrykket 5y + 1z på tavla, og så fekk dei ta utgangspunkt i den for å finna døme:

- Fyrst rekna tal, så legga bokstavar inntil (6yz)
- Trekkja saman ulike variablar (5yz, 5y1z)
- Gje verdi til variablar (6y, 6z, 6, 10 + 3 = 13)
- Oversjå teikn (5yz)

Gjekk så over til *algebra-bingo*. Eg skreiv opp oppgåvene på tavla etter kvart, så fekk elevane tid til å rekna ut og kryssa ut svaret på brettet sitt. Dei jobba veldig bra, og samarbeidde om det dei ikkje fekk til sjølv. Eg såg på dei at ein del av dei var ivrige i arbeidet. Etter at den fyrste hadde fått bingo, fortsette me til nokre til hadde fått full rekke. Ein elev sa etterpå at bingoen gav god trening på å rekna.

Som oppsummering trakk eg linjene tilbake til misoppfatningane dei formulerte tidlegare i timen, for å minna dei på at ein kun kan trekkja saman like variablar.

Elevane jobba bra i timen. Men berre nokre få som var aktive i dag. Andre bidrog om dei fekk direkte spørsmål. Faglærar fekk siste del av timen til utdeling av ein prøve.