«EG TENKTE JO DET HADDE NÅKE MED *n* Å GJER, EG SKJØNTE JO DET»

Bruk av Five Practices i arbeid med generalisering av figurmønster

ERFARINGSBASERT MASTER I UNDERVISNING MED FORDYPNING I MATEMATIKK

LENA HAUGLAND

MATEMATISK INSTITUTT

UNIVERSITETET I BERGEN

HAUSTEN 2018

FORORD

Då er tida komen til at eg sit her med ei ferdig masteroppgåve i hendene. Det har til tider vore ein urealistisk tanke. Prosessen har vore særs lærerik, men også særs utfordrande. Denne oppgåva hadde ikkje eksistert hadde det ikkje vore for nokre viktige personar.

Aller fyrst, min dyktige rettleiar Ove Gunnar Drageset. Tusen takk for særs god og veldig konkret rettleiing. Takk for at du har delt av din kunnskap slik at denne masteroppgåva har blitt noko av i det heile tatt. Du har leia meg i rett retning når eg har forvilla meg inn på gjengrodde stiar, oppmuntra meg når eg synes det har sett mørkt ut, og tolmodig haldt ut alle e-postar og masing på sms. Du har lært meg utruleg mykje som eg vil ta med meg vidare i arbeidet som lærar. Omgrep som «berre» og «fort gjort» vert aldri det same som før. Ein stor takk går også til mine informantar som velvillig stilte opp i dette prosjektet.

Min arbeidsgivar fortener stor takk for å ha tilrettelagt arbeidsveka slik at eg kunne halde på med dette medan eg har gått i jobb. De har heia på meg, noko eg set stor pris på. Min gode kollega Jonathan, du har vore del av min heiagjeng frå dag ein. Du har engasjert deg i oppgåva mi og bidratt til mange gode diskusjonar. Måten du har stilt opp på, er beundringsverdig. Du er unik. Anne-Kate, du har vore ein god sparringspartnar under heile masterperioden. Du har kome med gode råd og innspel, og du har vore ei fantastisk støtte i medgang og motgang. Du har vore der for meg. No er det tid for å gje noko tilbake.

Min tidlegare kollega Syvert Bruknapp. Takk for at du tok på deg å lese korrektur på oppgåva mi når du eigentleg skulle nyte pensjonisttida di. Takk til mine medstudentar for godt sosialt samhald og faglege samtalar i desse fine åra.

Sist, men ikkje minst, vil eg rette ei stor takk til familien min. De har stått i stormen når det har blåst som verst og haldt ut med ei mor som har vore totalt fråverande, både fysisk og mentalt. Forhåpentlegvis er det no slutt på at ho mor svarar på andre spørsmål enn dei som er stilt. Eg satsar på at Toro merkar at eg får litt betre tid til å lage skikkeleg middag, og eg lovar at eg skal slutte å sitje med nasen i faglitteratur til alle tider av døgeret, og på alle moglege stader. I alle fall for ei lita stund.

Lena Haugland
Sauda, desember 2018

SAMANDRAG

I denne oppgåva har eg brukt ei alternativ undervisningsmetode kalla Five Practices (Smith & Stein, 2011) i arbeidet med generalisering av figurmønster. Ved å gjennomføre to identiske testar, ein før og ein etter prosjektperioden, har eg sett på kva type løysingsstrategiar elevar brukar når dei løyser oppgåver med figurmønster. Eg har også sett på om det kjem fram endringar i bruk av løysingsstrategiar frå den fyrste til den andre testen. Vidare har eg prøvd å finne ut om undervisningsmetoden har hatt noko å seie for elevane sine val av løysingsstrategi.

Totalt atten elevar frå to ulike klassar i programfaget R2 deltok på testane. På bakgrunn av resultata på testane, plukka eg ut ni elevar til intervju. Ved hjelp av konvensjonell og teoridreven analyse der datamaterialet vart koda og kategorisert, har eg delt løysingsstrategiane som kom fram i studien inn i to hovudkategoriar, *rekursiv* og *eksplisitt*. Under rekursiv kategori finn ein strategiane *finne differansen, dobling med justering* og *addisjonsmetoden,* der addisjonsmetoden er henta frå Mason (1996). *Finne differansen* handlar om at eleven finn ein differanse mellom kvar figur i mønsteret. *Dobling med justering* går ut på å doble talet på perlar i ein figur og justere ved å trekke frå dei perlene ein får for mykje i forhold til neste figur. *Addisjonsmetoden* går ut på å bruke føregåande ledd for å finne eit uttrykk for det neste leddet i mønsteret. Under eksplisitt kategori har eg plassert strategiane *kvadratmetoden*, *rektangelmetoden* og *fullt kvadrat med justering.* Alle desse tre strategiane handlar om å sjå ein struktur i mønsteret basert på geometriske figurer som dei kjenner frå før.

Studien min viser at generalisering av figurmønster er vanskeleg for fleire elevar. Halvparten av elevane som er med i studien, klarte ikkje å generere eit formelt uttrykk for mønsteret i oppgåva på den fyrste testen som vart gjennomført før prosjektperioden. Etter prosjektperioden klarte tre av desse elevane å finne eit eksplisitt uttrykk for eit vilkårleg ledd i mønsteret. Blant dei elevane som genererte eksplisitte løysingsstrategiar på begge testane, kunne ein registrere mindre endringar. Vidare kjem det fram at fleire elevar set ord på at dei har lært noko i prosjektperioden. Det er likevel vanskeleg å knytte desse funna opp mot kva rolle arbeidsmetoden har hatt å seie for utviklinga dei har hatt.

Innhald

1 INNLEIING

1.1 Bakgrunn for oppgåva, hensikt og forskingsspørsmål

Eg har undervist i programfaget matematikk i vidaregåande skule i 23 år, og eg har i min praksis stadig forundra meg over at i utgangspunktet flinke elever slit med grunnleggjande matematikk, og då spesielt innanfor algebra. Dette er kompetanse elevane treng i realfaga og vidare yrkesliv. Det er derfor viktig at dei har kunnskap og forståing for algebra. Vi er ganske pressa på tid i programfaga i matematikk, men eg har mange gonger måtta leggje vekk det som er tema for timen og undervise i grunnleggjande algebra i staden for. Det kan vere korleis ein reknar med brøk, bruk av potensreglar og løysing av likningar. Eg har observert at dei slit meir med å forstå generelle reglar framfor når dei brukar konkrete tal. Med ein gong det er ukjente størrelsar involvert, verkar det vanskelegare å forstå.

Ulike studiar som TIMMS, TIMMS Advanced og PISA viser at norske elevar slit med algebra samanlikna med jamnaldrande i andre land (Grønmo & Hole, 2017). I TIMMS og TIMMS Advanced vert elevane testa i oppgåver frå den verkelege verda og i oppgåver som handlar om meir formell matematikk. I PISA testar ein kompetansen eleven har i å analysere problem frå den verkelege verda, og korleis dei er i stand til å bruke matematikk for å løyse det (Grønmo & Hole, 2017). I TIMMS Advanced, der norske elevar som tek programfag matematikk på vg3-nivå deltek, viser det seg at resultata faktisk går tilbake i algebra. Dette er bekymringsfullt når ein veit at algebra, saman med tal og rekning, vert rekna for å vere motoren i matematikken, og at det er avgjerande med kunnskap i algebra innanfor alle områder i utdanninga der ein brukar matematisk språk (Grønmo & Hole, 2017).

Kva grep kan ein som lærar ta for å bidra til at elevane sin kunnskap innanfor dei ulike tema i matematikken vert styrka? Gjennomgang av nytt tema på tavla, elevane svarar eller svarar ikkje på spørsmåla læraren stiller og oppgåvejobbing i lærebok, er gjerne den undervisningsmetoden som har dominert i norsk matematikkundervisning (Alrø & Skovsmose, 2004). I min kvardag har det vore lite tid til å utforske andre måtar å jobbe på. Eit evig jag etter å komme gjennom pensum til eksamen er ein av årsakene til det. Eg ynskte derfor å bruke denne masteroppgåva til å utforske andre måtar å undervise på som kanskje kan hjelpe elevane med å utvikle ei større forståing rundt det dei held på med, framfor å pugge reglar og framgangsmåtar for løysing av oppgåver. Når dei kjem til eksamen, møter dei oppgåver der dei treng noko meir enn akkurat det.

Smith og Stein (2011) har utvikla ein fem-trinns undervisningsmodell som dei kallar Five Practices. Hensikta med denne modellen er å hjelpe læraren med å leggje til rette for gode matematikksamtalar i klasserommet. Slik kan elevar få auka sin kompetanse innan matematisk tenking, resonnering og involvering i kognitivt krevjande oppgåver. Modellen kan vere med å bidra til at ein får auka kvaliteten på samtalen i klasserommet (Smith & Stein, 2011). Høg kvalitet på samtalen kan føre til auka læringsutbytte i faget fordi elevane får trening i å setje ord på korleis dei tenkjer og lærer seg å argumentere for kvifor dei tenkjer slik. I tillegg får dei trening i å lytte til sine medelevar (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Kazemi & Hintz, 2014). Munnlege ferdigheiter står også spesifisert som ein av dei grunnleggjande ferdigheiter i læreplanen for matematikk fellesfag og saman med skriftlege ferdigheiter i læreplanen for matematikk for realfag. Der står det at elevane blant anna skal «*stille spørsmål, delta i samtaler og drøftinger av matematiske situasjoner og problemer og argumentere for egne løsningsforslag*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 5). Dette stadfester at munnlege ferdigheiter er eit område ein skal satse på i matematikkopplæringa både i grunnskulen og vidaregåande skule. Mi erfaring er at fleire elevar slit med å uttrykke seg munnleg i matematikk. Dei treng derfor å øve seg i å kommunisere matematikk saman med andre. Mi masteroppgåve vil derfor handle om elevars forståing av algebra i programfag matematikk på vidaregåande skule, og eg vil bruke ein undervisningsmetode med fokus på samtalen i klasserommet.

Algebra er jo et svært felt, og eg ynskjer å utforske ei problemstilling innan eit tema som egnar seg for ei meir undersøkjande undervisningsmetode. I starten ynskte eg å sjå på likningsløysing. Elevane møter på likningar i omtrent alle tema i matematikkfaget. Det er derfor naudsynt å beherske. Utover i studien viste det seg likevel at det var eit anna tema som peika seg ut som meir interessant. Fleire elevar opplevde det som vanskeleg å finne eit generelt uttrykk for eit veksande figurmønster. Dette er også eit tema som passar godt å introdusere gjennom Five Practices (Smith & Stein, 2011), i og med at det er mange måtar å sjå eit mønster på. Sidan eg i utgangspunktet skulle sjå på likningsløysing, har eg måtta endra på dei foreløpige forskingsspørsmåla eg starta med. Med dette som utgangspunkt har eg i denne studien hatt fokus på følgjande to forskingsspørsmål:

«Kva løysingsstrategiar brukar elevane i arbeid med generalisering av figurmønster før og etter ein periode med Five Practices?» og *«Kva rolle spelar Five Practices i elevars utvikling av løysingsstrategi?»*

Studien vert gjennomført i to R2-grupper på vg 3 studiespesialisering ved ein vidaregåande skule. Det er her eg har mest undervisningserfaring. I tillegg handlar mykje av litteraturen eg har lese, om studiar som er gjort i grunnskulen. Eg har funne lite litteratur om generalisering av mønster hjå elevar som tek programfag matematikk i vidaregåande skule. Gjennom eit relativt lang lærarliv har eg møtt alle typar av elevar, frå dei heilt stille til dei meir verbale. Likevel er dei elevane som er så aktive at dei bidreg med læring til medelevane sine gjennom samtaler i klasserommet, i fåtal.

1.2 Oppbygging av oppgåva

Oppgåva er bygd opp over seks overordna kapittel. I kapittel 2 tek eg for meg det teoretiske rammeverket som dannar grunnlaget for oppgåva. Her tek eg for meg tidlegare forsking. I kapittel 3 vert dei metodiske vala eg har stått overfor i prosessen med oppgåva beskriven. I kapittel 4 vert elevane sine tenkemåtar og eventuelle endringar i tenkemåtar analysert. Eg ser også på om eg kan knytte undervisningsmetoden opp mot elevane si eventuelle endring. Kapittel 5 tek for seg resultata av analysen, og dei vert drøfta opp mot oppgåvas teoretiske rammeverk. Kapittel 6 inneheld ein konklusjon basert på analysen og drøftinga av resultata, med bakgrunn i det teoretiske rammeverket. Her vil eg òg komme med forslag til vidare forsking.

2. TEORI

2.1 Matematisk forståing

Matematikk handlar ikkje berre om å terpe på ulike metodar. Det handlar også om å forstå bakgrunnen for kvifor desse metodane kan brukast. Korleis vi som lærarar definerer matematisk forståing, er viktig for elevars læring i matematikk. Skemp (1976) deler matematisk forståing i to delar, *instrumentell* og *relasjonell forståing*. *Instrumentell forståing* handlar om at eleven er i stand til å bruke formlar for å kunne rekne seg fram til eit svar, utan å vite kvifor desse formlane gjeld (Skemp, 1976). Eit døme på dette er at eleven kan bruke formelen for omkrinsen til ein sirkel for å finne omkrinsen, utan at han veit eller reflekterer over kvifor denne formelen er rett å bruke. Eit mål om å berre inneha i*nstrumentell forståing,* kan ofte komme i konflikt med læraren si undervisning dersom denne er relasjonell. Dette fordi nokre elevar ønsker å lære reglar som kjapt lar dei komme fram til rett svar, og dei er ikkje så opptatt av kvifor reglane er gyldige (Skemp, 1976). Skemp (1976) skriv at det er nokre fordelar med at læraren underviser instrumentelt: 1) Det er enklare å forstå. 2). Ein ser resultatet med ein gong. 3) Ein vil raskare få rett svar sidan det er mindre kunnskap involvert. Instrumentell undervisning kan ha god effekt på kort sikt, men på lang sikt vil denne typen undervisning kunne skape utfordringar når ein skal jobbe med oppgåver der instrumentell forståing ikkje er nok (Skemp, 1976). Samtidig er lærarane ofte pressa på tid i samband med å komme gjennom pensum før eksamen, noko som kan føre til at ein tyr til instrumentell undervisning for å bli fortare ferdig.

Når eleven innehar ei relasjonell forståing, betyr det at eleven forstår kva formlar han kan bruke, og kvifor han kan bruke dei (Skemp, 1976). Dette krev mykje meir av både lærar og elev i innlæringa, og det tek lenger tid å tileigne seg relasjonell forståing enn instrumentell forståing. Skemp (1976) meiner det er fire fordelar med relasjonell undervisning: 1.) Det er meir overførbart til andre typar oppgåver. 2) Det er lettare å hugse sjølv om innlæringa er meir komplisert. 3) Det er effektiv som eit mål i seg sjølv. 4) Relasjonell forståing kan føre til auka interesse for faget og iver etter å tileigne seg ny kunnskap. På bakgrunn av dette, meiner Skemp (1976) at relasjonell forståing er betre enn instrumentell forståing fordi det gir eleven ein større verktøykasse i møte med oppgåver som eleven ikkje har sett før.

Samtidig vil det å forstå korleis ulike ting heng saman, føre til at dei treng mindre repetisjon av ulike reglar. Ofte er det slik at om ein forstår ideane bak eit spesifikt tema, så har eleven eit grunnlag for å kunne forstå andre tema i matematikken (Skemp, 1976).

På same måte som Skemp (1976), har Hiebert og Lefevre (1986) valt å dele forståing i to delar som dei kallar *omgrepskunnskap* (*conceptual knowledge)* og *prosedyrekunnskap* (*procedural knowledge)*. Omgrepskunnskap er kunnskap som er rik på samanhengar, og som er bundne saman i eit nettverk av kunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986). I dette nettverket er dei relasjonane som er samanknytte, like framståande som dei diskrete delane av nettverket. Dersom ein kjenner igjen forholdet til andre delar av informasjonen lagra i nettverket, kan ein plassere det under omgrepskunnskap. Utviklinga av denne type kunnskap skjer når ein klarar å kople saman ulike delar av informasjon som allereie er lagra i nettverket, eller mellom informasjon som er lagra og informasjon som nett er tillært (Hiebert & Lefevre, 1986). Prosedyrekunnskap består av to separate delar: 1) Det formelle matematiske språket og symbolsystemet ein brukar i matematikken. 2) Algoritmar, eller reglar, for å kunne løyse matematiske oppgåver. Kunnskapen om symbol og det matematiske språket handlar berre om kjennskap til det overflatiske, og ikkje om kva det betyr. Algoritmar og reglar handlar om steg- for- steg- forklaringar som vert utført i ei bestemt rekkefølgje (Hiebert & Lefevre, 1986).

Todelinga til Hiebert og Lefevre (1986) kan likne på Skemp (1976) si inndeling, men det er ein forskjell. Skemp (1976) ser på relasjonell og instrumentell forståing som to separate delar som er uavhengige av kvarandre. Han meiner at relasjonell forståing er betre enn instrumentell, fordi den instrumentelle forståinga vanlegvis involverer fleire sett med reglar i staden for færre reglar av meir generell karakter (Skemp, 1976). Hiebert og Lefevre (1986) meiner på si side at ein ikkje kan lage eit skarpt skilje mellom dei to delane, sidan ein må inneha begge typar kunnskap for å få full forståing for eit tema. Sjølv om det kan vere mogleg å sjå på prosedyrar utan å tenkje omgrepskunnskap, er det ikkje lett å tenkje omvendt. Ved hjelp av prosedyrane set ein over omgrep til noko som er observerbart. Ein vil ikkje vite at omgrepskunnskapen er der utan at prosedyrane gjev tilgang til den (Hiebert & Lefevre, 1986).

Kilpatrick (2001) skriv om *matematisk ferdigheit (mathematical proficency).* Inndelinga hans er femdelt, der alle delane er gjensidig avhengige av kvarandre i utviklinga av matematiske ferdigheiter (Kilpatrick, 2001). Slik sett kan ein seie at han følgjer litt det same sporet som Hiebert og Lefevre (1986). *Omgrepsforståing* (*Conceptual understanding)* inneheld ei forståing av matematiske konsept, operasjonar og samanhengar. Elevane som innehar denne kompetansen, kan meir enn isolerte fakta og metodar. Elevar som kan plasserast i *prosedyreflyt (procedural fluency)*, kan utføre matematiske prosedyrar fleksibelt, nøyaktig, effektivt og tenleg. Kilpatrick (2001) meiner at *prosedyreflyt* er ei støtte til *omgrepsforståing* i og med at forståing gjer det lettare å lære ferdigheiter. Samtidig vil god omgrepsforståing vere ei støtte i samband med utviklinga av flyt i utrekningar. Vidare meiner Kilpatrick (2001) at forbindelsen mellom *prosedyreflyt* og *omgrepsforståing* er forsterka av at nokre algoritmar er viktige som konsept i seg sjølv. Ein vil i tillegg være mindre utsett for vanlege misoppfatningar, og for å gløyme algoritmar. Her er han på linje med Hiebert og Lefevre (1986) som meiner at prosedyrar som er innlært ved hjelp av omgrepskunnskap, vil vere lettare å hente fram igjen enn prosedyrane ein lærer ved pugging, samtidig som ein er mindre utsett for å gjere feil eller bruke feil prosedyre. Prosedyrar har dermed to sider, ei med fokus på ferdigheiter og ei der fokus er på utarbeiding av teknikkar. Å utarbeide teknikkar inkluderer nødvendigvis konseptuell aktivitet (Kieran, 2013).

Strategisk kompetanse (stratetic competence) handlar om evna til å formulere, representere og løyse matematiske problem. Dette liknar på det vi kjenner som problemløysing og problemformulering. Den fjerde delen vert kalla *adaptiv resonnering* (*adaptive reasoning)* og handlar om evna til logisk tenking, refleksjon, forklaring og grunngjeving. Dette er «limet» som held alt saman i matematikken. Elevar som innehar denne kompetansen, har også evna til å vurdere om dei har resonnert rett i løysing av ei oppgåve. Til slutt kjem *produktive handlingar (productive disposition)* som omhandlar evna til å sjå meininga med matematikk, sjå på det som nyttig og verdt å bruke tid på. Eleven vil også ha tru på at god innsats vil lønne seg, og har tru på seg sjølv som ein effektiv og flink elev i matematikk. (Kilpatrick, 2001).

Om ein samanliknar Skemp (1976), Hiebert & Lefevre (1986) og Kilpatrick (2001), kan ein sjå at dei har ulik oppfatning av kor viktig prosedyrekunnskap er for omgrepsforståing. Skemp (1976) meiner at relasjonell forståing kan stå åleine utan innslag av instrumentell forståing.

Han går faktisk så langt som å seie at forskjellen mellom dei to er så store at ein kan sjå på dei som to ulike matematikkfag. Dette skil seg frå Hiebert & Lefevre (1986) sin prosedyrekunnskap, i og med at dei meiner at prosedyrekunnskap og omgrepsforståing heng saman. Kilpatrick (2001) sin prosedyreflyt, skil seg frå dei to andre sidan han seier at både prosedyrekunnskap og omgrepsforståing er ein føresetnad for prosedyreflyt.

2.2 Elevars læring i algebra

I mange tilfelle vert algebra forbunde med bokstavrekning, og det har vore ei kjelde til mykje frustrasjon for mange elevar. Ein finn innslag av algebra innanfor mange tema i matematikken, og det er derfor heilt naudsynt å ha kompetanse i algebra dersom ein skal studere matematikk eller realfag seinare (Bell, 1995; Grønmo & Hole, 2017). Om ein beherskar algebra, vil ein ha tilgang på ein verktøykasse med symbol, og samstundes eit språk som vil vere til stor hjelp når ein skal uttrykke og jobbe med det generelle. Å jobbe med det generelle, vert sett på som sjølve kjernen i algebra (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997; Mason, 1996; Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2011; Wilkie & Clarke, 2016).

TIMMS Advanced matematikk er ein internasjonal studie der elevar som har valt full fordjuping i matematikk på vg 3 i vidaregåande skule deltek. Den testar elevane i rein matematikk og i bruken av matematisk kunnskap i daglegdagse problemstillingar. Norske elevar på barne- og ungdomstrinnet deltek i det tilsvarande studiet som heiter TIMMS (Grønmo & Hole, 2017). I følgje desse tre studia, skårar norske elevar lågt på algebra i forhold til kalkulus og geometri. Faktisk viser studia at elevane sine resultat går tilbake i algebra, medan det går ein del fram i tal og geometri (Grønmo & Hole, 2017). I rapporten frå TIMMS Advanced 2015, vart det påpeika at ein i Noreg og dei andre nordiske landa legg lite vekt på algebra i opplæringa i forhold til land som skårar høgt på algebra (Grønmo, Hole, & Onstad, 2016). Når ein ser at ein i Noreg i tillegg har svake resultat innan området tal og rekning med tal på 4. og 8.trinn, er det bekymringsfullt. Tal og rekning med tal vert sett på som viktig basis for læring i algebra, som ofte vert sett på som ei generalisering av aritmetikk (Grønmo & Hole, 2017)

I 1996 utvikla Kieran ein modell som deler hovudelementa i algebraen inn i tre nivå: *generaliserande*, *transformerande* og *global/meta*, også kalla *resonnerande* nivå (Kieran, 2007). Innanfor det *generaliserande* nivået finn ein formulering av uttrykk og likningar. Døme på dette kan vere likningar som inneheld ein ukjend, generalisering av uttrykk som oppstår frå numeriske sekvensar eller geometriske mønster, og uttrykk for reglar som gjeld numeriske forhold (Kieran, 2007). Kieran (2007) meiner at dette er sjølve objekta til algebraen. *Transformerande* aktivitetar handlar om dei oppskriftsbaserte handlingane ein utfører innan algebraen. Innanfor dette nivået finn ein løysing av likningar og ulikheiter, forenkling av uttrykk, utviding av uttrykk og faktorisering. Det handlar om å manipulere uttrykk eller likningar slik at ein beheld ekvivalensen. Den kan også handle om å lære å ta i bruk eigenskapar som denne manipulasjonen i seg sjølv inneheld (Kieran, 2007).

Innanfor det *resonnerande* nivået finn ein aktivitetar der algebra vert brukt som eit verktøy. Her tek ein omsyn til kontekst, meining og motivasjon for å engasjere seg i aktivitetane som er beskrivne i dei to nivåa over. Døme på slike aktivitetar er problemløysing, generalisering av mønster, modellering og det å sjå etter forhold eller struktur. Desse aktivitetane kan gjere at ein kan engasjere seg i matematiske aktivitetar generelt, og algebra spesielt (Kieran, 2007). Tradisjonelt har lærebøkene i algebra fokusert mykje på den transformerande aktiviteten av algebra. Ein har hatt meir fokus på manipulering av symboluttrykk og likningar framfor det konseptuelle som støttar desse reglane eller til dei strukturelle fundamenta til symboluttrykka eller likningane (Janvier, 1996; Kieran, 2004).

Sfard og Linchevski (1994) meiner at algebra kan sjåast på som ei forlenging av aritmetikken. På same måte som med aritmetikken, handlar det om tal og om numeriske berekningar, men spørsmåla vert stilt på ein annan måte, og dei algoritmiske manipulasjonane vert behandla annleis (Sfard & Linchevski, 1994). Vidare seier Mason, Graham og Johnston-Wilder (2011) at det er nødvendig å tenke algebraisk når ein skal lære aritmetikk fordi det handlar om å lære seg metodar ein må bruke i aritmetiske berekningar. Dette viser at algebraisk tenking er til stades (Mason et al., 2011). Det er tradisjonelt sett ei utfordring å gå frå aritmetikk til algebra. I staden for å behandle dei som to separate område i matematikken, bør ein introdusere og legge til rette for algebraiske resonnement i aritmetikken (Mason, 1996).

Blanton og Kaput (2005) skriv at algebraisk resonnering kan skje på fleire ulike måtar. Det kan vere at ein brukar aritmetikk for å uttrykke og formalisere generaliseringar, såkalla *aritmetisk generalisering*. Vidare omhandlar det generalisering av talmønster for å beskrive funksjonelle samanhengar, noko dei kallar *funksjonell tenking*. Dette inneber at ein ser på operasjonar og eigenskapar knytt til tal, som eigenskapen til null, eigenskapen til multiplikasjon og forståing av likskap mellom mengder (Blanton & Kaput, 2005). Modellering kan brukast for å uttrykke og formalisere generaliseringar. Modellering inneber generalisering av regularitetar, men frå matematiske situasjonar der regulariteten er underordna i seg sjølv. Til slutt har ein generalisering av matematiske system der ein ser spesielt på utrekningar og relasjonar. Her jobbar ein med heile klassar av objekt, og det vert tradisjonelt beskrive som abstrakt algebra (Blanton & Kaput, 2005). Dei to siste kategoriane kan sjåast i samanheng med Kieran (2007) sitt resonnerande nivå, som både inneheld modellering og det å sjå etter struktur, som abstrakt algebra handlar om.

Lee (1996) meiner at ein kan sjå på algebra som ein mini-kultur innanfor kulturen matematikk. På den måten kan ein snakke om algebra som eit språk, og som ei mengd av aktivitetar. Ein kan då sjå på samhandlinga mellom språk og kunnskap i utviklinga av den algebraiske kulturen som skjer i klasserommet og på samhandlinga mellom algebra og andre matematiske kulturar som aritmetikk (Lee, 1996). Også Mason (1996) skriv at ein har starta å utføre algebra når ein er i stand til å kombinere aritmetiske operasjonar. Ein utfører då handlingar på objektoperasjonar (Mason, 1996).

Resultata frå TIMMS Advanced viser at algebra er eit utfordrande tema for mange elevar, ikkje berre i Noreg. Samtidig meiner teoretikarane at det er heilt naudsynt å beherske algebra om ein skal ha forståing for andre delar av matematikken. Sfard og Linchevski (1994), Mason et al. (2011), Blanton og Kaput (2005) og Lee (1996) nemnar alle samanhengen mellom aritmetikk og algebra. Der Sfard og Linchevski (1994) ser på algebra som ei forlenging av aritmetikken, meiner Mason (1996) at det er nødvendig å tenke algebraisk når ein skal lære aritmetikk. Mason et al. (2011) meiner at algebraisk tenking då er til stades. Blanton og Kaput (2005) delar Mason (1996) sitt syn og skriv at bruk av aritmetikk i generaliseringar handlar om algebraisk resonnering. Lee (1996) på si side ser på algebra som ein mini-kultur innanfor kulturen matematikk, og meiner at ein då kan sjå på samhandlinga mellom dei ulike mini-kulturane innan matematikk, som til dømes aritmetikk. Kieran (2007) sin GTG-modell famnar om heile det algebraiske feltet, og ho skriv at ein har hatt for stort fokus på transformerande aktivitetar i klasserommet.

2.3 Figurmønster og generalisering

Det er fleire anbefalingar om at ein bør bruke figurmønster når ein skal introdusere elevane for algebraisk tenking (Küchemann, 2010; Radford, 2010; Stacey, 1989; Stacey & MacGregor, 2001). Figurmønster er rekker av geometriske mønster der ein kan avleie kvar figur frå dei føregåande ledda ved ein veldefinert regel (Bishop, 2000). Tilsvarande definisjon finn ein hos Rivera og Becker (2005), som brukar termen *figurative talmønster* om figurar i ei rekke der figurane innehar felles eigenskapar og står i eit bestemt forhold til kvarandre (Rivera & Becker, 2005). Ved å arbeide med figurmønster, kan ein gjere det lettare for elevane å forstå algebraisk generalisering og samtidig leggje grunnlaget for forståing av variabelomgrepet (Bergsten et al., 1997). Ein vil då også kunne gje elevane ein sjanse til å forstå dei genererande og transformerande ideane frå GTG-modellen til Kieran (2007)

Generalisering er prosessen ein går gjennom når ein utforskar ein gitt situasjon og ser etter eit mønster eller forhold. Ein organiserer systematisk data ein har funne, gjenkjenner relasjonar og uttrykker dei verbalt og symbolsk. I tillegg må ein søke forklaring og gjere passande justeringar eller formulere bevis avhengig av nivå (Bell, 1995). Mason et al. (2011) meiner at eitkvart matematisk tema må involvere generalisering, nettopp fordi det er matematisk. Dei forklarar det med at «*En teknikk er en generell måte å løse en klasse av problemer på. Et konsept er noe som er generelt, og som det finnes mange ulike eksempler på*» (Mason et al., 2011, s. 37). Mason et al. (2011) beskriv generaliseringsprosessen som ein spiral. Den består av fasane m*anipulere*, *få-ei-forståing for* og a*rtikulere*. Fasane handlar om å bruke dei kunnskapane og styrkane ein har for å spesialisere og generalisere. Å *manipulere* er grunnlaget for å oppdage mønster, relasjonar og generalitetar. *Artikulering* vil vere ein gjennomgåande prosess der ein kan utvikle seg frå å forklare med ord til å kunne bruke symbolske uttrykk. Ein vil då kunne *få ei forståing* av den matematiske situasjonen (Mason, 1996; Mason et al., 2011).

2.3.1 Å arbeide med generalisering

Ein skil ofte mellom to viktige omgrep innanfor generalisering av figurmønster. Desse vert kalla *rekursiv* og *eksplisitt* løysing (Mason, 1996). Ei rekursiv løysing inneber å finne ein lokal regel der ein har ein startverdi og brukar denne til å finne neste ledd i rekka. Ein slik lokal regel vert ofte kalla for ein ledd- til- ledd- formel (Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Mason, 1996; Mason et al., 2011). Til samanlikning brukar Stacey (1989) omgrepet *nærgeneralisering* (*near-generalisation)* om å bruke ei teikning eller å telje steg for steg for å finne neste ledd i rekka. Tilsvarande finn ein hos Confrey og Smith (1994), som brukar omgrepet *samvariasjon (co-variation)* om forholdet mellom påfølgjande ledd i eit mønster.

Ei eksplisitt løysing er ein direkte formel som ein kan bruke til å finne eit kva for helst ledd i rekka. Formelen vert basert på talets posisjon i rekka og vert ofte kalla for ein posisjon- til- ledd- formel (Lannin, 2005; Mason, 1996). Stacey (1989) sin tilsvarande definisjon er *vidfamnande generalisering (far-generalisation)*, som handlar om å finne ein generell regel for eit vilkårleg ledd i rekka (Stacey, 1989). Confrey og Smith (1994) brukar omgrepet *korrespondanse (correspondence)* om ei tilnærming som oppfattar samanhengen mellom to variablar, der den eine ofte er eit element i ei rekke, og den andre er eit mål på talet på ledd i rekka (Confrey & Smith, 1994).

Dersom lærarar overser og ikkje er i stand til å la elevane jobbe med å uttrykke sine eigne generaliseringar, meiner Mason (1996) at matematisk tenking ikkje finn stad. Ein måte å jobbe med dette på, er å skilje fenomena «å sjå gjennom» og «å sjå på». Dette betyr at ein bør sjå det generelle gjennom det spesielle, og sjå det spesielle gjennom det generelle (Mason, 1996). Han beskriv det slik: «*The difference between looking-through and looking-at, and working-on and working-through applies to the use/misuse of manipulables (whether concrete apparatus or abstract symbols) and is described in a spiral of development from confident manipulation, to getting-a-sense-of, to articulating that sense, to that articulation becoming itself in turn confidently manipulable.*» (Mason, 1996, s. 65).

Kieran (1989) meiner på si side at ein i tillegg til dette, må vere i stand til å uttrykke det algebraisk. Ho tek til orde for at å tenke algebraisk handlar om meir enn berre å generalisere. Det handlar om å tenke på det generelle, eller det generaliserte, på ein måte som gjer det tydeleg algebraisk (Kieran, 1989). Dette står i kontrast til den vanleg tanken om at vegen til algebra har bakgrunn i ideen om den naturlege korrespondansen mellom algebraisk tenking og generalisering (Radford, 2010). Radford (2010) er einig med Kieran (1989) og meiner at algebraisk generalisering kan delast opp i fleire lag der nokre lag er djupare enn andre. Basert på dette, forklarar han generalisering av figurmønster slik: *«Generalizing pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S.»* (Radford, 2010, s. 42). MacGregor og Stacey (1995) skriv at elevar har ein tendens til å sjå etter ein rekursiv regel framfor å sjå ein funksjonell samanheng mellom talpar. Sjølv om eleven ser den funksjonelle samanhengen, er dei ofte ikkje i stand til å skrive den som ei likning (MacGregor & Stacey, 1995)

Küchemann (2010) har ein litt annan innfallsvinkel til korleis ein bør jobbe med figurmønster og generalisering. Han meiner at ved å organisere samanhengar i tabellar, distanserer elevane seg frå det som er målet med mønsteroppgåver, nemleg å sjå strukturen dei er bygde opp av. Dette fører til at elevane tenderer meir til å forme det han kallar empirisk formel, framfor å finne ein meir strukturert generalisering (Küchemann, 2010). Han meiner at dersom ein fokuserer på å finne strukturen i eit mønster, vil elevane få auka kompetanse i å bruke oppgåver eller døme dei har sett før (Küchemann, 2010). Oppgåvene i lærebøkene er ofte bygde opp stegvis, det vil seie at ein får spørsmål om å finne neste figur i ei rekke. Deretter blir ein gjerne beden om å finne ein figur som ikkje ligg så langt unna, og til slutt figur n. I mange tilfelle er det oppgitt ein tabell som er ferdig utfylt, eller som elevane vert bedne om å fullføre. Küchemann (2010) stiller spørsmål om kvifor ein ikkje går direkte til spørsmålet om figur *n* i staden for å gje ei slik steg- for- steg- oppgåve. For mange elevar vil ein tabell vere til hjelp, men han meiner at det vil vere meir utfordrande for elevane, og det vil gje læraren meir utfyllande informasjon, dersom ein ikkje brukar tabellar, men heller går rett på spørsmålet om figur *n* (Küchemann, 2010). Det vert understreka av Küchemann (2010) at rekursive og eksplisitte tilnærmingar utfyller kvarandre, sjølv om den eksplisitte vert sett på som meir sofistikert enn den rekursive. Rekursive strategiar kan vere verdifulle når det gjeld å utforske geometriske former og omgrepet stigning når det gjeld grafen til ein funksjon (Küchemann, 2010)

Wilkie og Clarke (2016) kom i ein av sine studiar fram til det same som Küchemann (2010). Dei fann at ved å bruke spesielle veksande mønster som kan visualiserast på ulike måtar, kan elevane bli oppfordra til å fokusere på strukturen til eit element i mønsteret. Slik kan dei konseptuelt utvikle funksjonelle samanhengar ved hjelp av det Confrey og Smith (1994) kalla ei *korresponderande* tilnærming. Ein del elevar visualiserte det veksande mønsteret rekursivt ved å bruke *samvariasjons*-tilnærminga, for deretter å bytte til *korresponderande* tilnærming når dei skulle jobbe med større einingar. Ved å velje eit spesielt veksande mønster som fremmar ulike typar visualisering, kan ein bidra til at elevane får utvikla ei meir sofistikert funksjonell tenking. Elevane får moglegheita til å bruke ei blanding av strategiar samtidig, og slike målretta læringsopplevingar kan vere nøkkelen til elevars framgang innanfor omgrepsforståing (Wilkie & Clarke, 2016).

Mason (1996), Küchemann (2010), Stacey (1989) og Confrey og Smith (1994) har samanfallande definisjonar på rekursive og eksplisitte løysingar. Mason (1996) si rekursive løysing svarar til Stacey (1989) sin nær-generalisering og Confrey og Smith (1994) sin samvariasjon. Tilsvarande gjeld for den eksplisitte løysinga til Mason (1996), der Stacey (1989) brukar omgrepet *vidfamnande generalisering* og Confrey og Smith (1994*)* *korrespondanse*. I arbeidet med generaliseringar, meiner Mason (1996) at ein må sjå det generelle gjennom det spesielle, og å sjå det spesielle gjennom det generelle medan Kieran (1989) og Radford (2010) meiner at ein i tillegg til dette, må vere i stand til å uttrykke generaliseringar algebraisk dersom algebraisk tenking skal finne stad. Küchemann (2010) og Wilkie og Clarke (2016) har ei heilt anna tilnærming til arbeid med generaliseringar enn Mason (1996), Kieran (1989) og Radford (2010), og meiner at målet bør vere å la elevane trene seg på å finne strukturen mønstra er bygd opp av.

2.3.2 Kategoriar til generalisering av figurmønster

Mason (1996) beskriv tre ulike tilnærmingar og oppfatningar når det gjeld å finne formlar ut frå gitte mønster. Den eine vert kalla for *teljing* og inneber at eleven manipulerer figuren slik at teljing vert enklare. Dette kan vere generell summering av ein progresjon som er aritmetisk, eller til bruk i summering av geometrisk progresjon. Vidare kjem *addisjonsmetoden* som handlar om å finne ein lokal regel som reflekterer ein måte å finne det neste leddet på ut frå det føregåande leddet. Den siste tilnærminga er den *eksplisitte*, der ein ser eit mønster som leiar ein rett til ein eksplisitt formel (Mason, 1996)

Lannin (2005) deler generaliseringsstrategiar inn i *ikkje-eksplisitte* og *eksplisitte* kategoriar. Under dei ikkje-eksplisitte kategoriane finn ein strategiane *teljing* og *rekursiv*. *Teljing* handlar om at ein teiknar ein modell som kan representere situasjonen for å kunne telje den ynskte eigenskapen. *Rekursiv* inneheld metoden der ein byggjer på tidlegare ledd for å kunne finne ein formel for neste ledd (Lannin, 2005). Under den eksplisitte kategorien har Lannin (2005) plassert strategiane *heil-objekt*, *gjett- og- test* og *kontekstuell*. *Heil-objekt* handlar om at eleven brukar ei mindre eining for å skape ein større eining ved hjelp av multiplikasjon. Her er det rom for justering for over- og underteljing (Lannin, 2005).

Når ein gjettar på ein regel utan å ta omsyn til kvifor denne regelen kan gjelde, brukar ein strategien *gjett-og-test*. Denne strategien inneheld ein del testing med ulike tal og operasjonar som ein kan få ut frå oppgåvekonteksten Den siste strategien, *kontekstuell strategi*, handlar om å finne ein regel basert på informasjon som er gitt i situasjonen/problemstillinga, og som kan knytast til ein teljeteknikk (Lannin, 2005). Dei to siste kategoriane kan seiast å stå i kontrast til Mason (1996) når han snakkar om å sjå det spesielle gjennom det generelle. Ved bruk av desse strategiane, flyttar elevane seg ofte bort frå det generelle og til det spesielle (Lannin, 2005).

Lee (1996) meiner også at generalisering av mønster er ein sentral aktivitet i algebra. Ho skriv vidare at algebraen sitt symbolspråk er med på å forenkle dette, og at å introdusere algebra ved hjelp av arbeid med mønster, kan vere spennande for elevane. Ho deler generalisering av mønster inn i tre kategoriar, *oppfattingsnivå* (*perceptual level), verbaliseringsnivå (verbalizing level)* og *symboliseringsnivå* (*symbolization level). Oppfattingsnivå* handlar om evna til å sjå eit mønster som er matematisk brukbart. Ikkje alle mønster kan setjast over til symbolsk språk. Dette nivået er ofte avgjerande for elevens framdrift i arbeid med mønsteret. På *verbaliseringsnivå* handlar det om å kunne uttrykke munnleg korleis det aktuelle mønsteret oppfører seg. Dersom ein samanliknar dette med *å artikulere* i spiralen til Mason et al. (2011), veit ein at det handlar om øving, og at ein etter kvart kan vere i stand til å bevege seg frå eit kvardagsspråk til eit meir matematisk språk. Det vil derfor vere ein glidande overgang frå oppfattingsnivå til verbaliseringsnivå i og med at dei vil gå over til å bruke talsymbol. *Symboliseringsnivå* handlar om å kunne uttrykke ei formell løysing ved å bruke t.d. *n* til å representere ein eller fleire variablar. Denne løysinga kan vere både rekursiv og eksplisitt (Lee, 1996).

Også Radford (2010) skriv om generaliseringsprosessen. Han set opp eit skilje mellom generalisering på den eine sida og induksjon (induction) på den andre sida. Radford (2010) meiner at ikkje alle aktivitetar med mønster leier til algebraisk tenking, og ikkje all bruk av symbol er algebraisk aktivitet. Vidare meiner han at ikkje all generalisering er algebraisk av natur, nokre av dei er aritmetiske (Radford, 2010).

Algebraisk generalisering kan delast inn i to overordna nivå, *aritmetisk* og *algebraisk generalisering*. *Algebraisk generalisering* vert så delt inn i tre undernivå som Radford (2010) kallar *faktabasert generalisering*, *kontekstbasert generalisering* og *symbolsk generalisering*. *Aritmetisk generalisering* handlar om at eleven gjenkjenner ein lokal likskap mellom nokre figurar, men dei er ikkje i stand til å bruke dette til å finne eit uttrykk for eit vilkårleg ledd i ei rekke. Elevar som fell inn under denne kategorien, har ikkje nådd algebraisk nivå, i og med at ein her kan finne strategiar som prøving og feiling. Dette fører ikkje til algebraisk resonnering (Radford, 2010). *Faktabasert generalisering* er det lågaste nivået innanfor algebraisk generalisering. På dette nivået brukar ein gjerne ord, gestikulering eller andre fakter for å gi uttrykk for dei generelle objekta i mønsteret. Strategiane som vert brukt under dette nivået, kan danne grunnlaget for at eleven kan bevege seg til eit høgare algebraisk nivå av generalisering (Radford, 2010).

I *kontekstbasert generalisering* brukar ein ei blanding av ord og symbol for å uttrykke variablane gitt i figurmønsteret. Uttrykk som «den neste figuren» eller «det neste talet», kan illustrere dette. For å kompensere for den reduserte bruken av semiotiske ressursar, må elevane uttrykke seg ved hjelp av færre ord (Radford, 2010). Det høgaste generaliseringsnivået til Radford (2010) er *symbolsk generalisering*. På dette nivået brukar eleven alfanumeriske symbol for å uttrykke generalisering. Eleven vil vere i stand til å beskrive den eksplisitte formelen både med ord og med symbol (Radford, 2010).

Det fins både likskap og ulikskap mellom dei fire nemnde teoretikarane. Mason (1996) sine strategiar *teljing* og *addisjonsmetoden* kan plasserast under Lannin (2005) sin *ikkje-*

eksplisitte kategori, sidan dei begge handlar om å finne rekursive formlar ut frå eigenskapen til mønsteret som er gitt. Både Lannin (2005) og Mason (1996) sine *ikkje-eksplisitte* kategoriar kan plasserast inn under Lee (1996) sitt *oppfattingsnivå* sidan dei alle handlar om å oppfatte likskap mellom figurar i eit mønster utan at dei nødvendigvis brukar formell algebra for å generere eit svar. Dermed kan ein også plassere Mason (1996) og Lannin (2005) sine *ikkje-eksplisitte* strategiar og Lee (1996) sitt *oppfattingsnivå* under Radford (2010) si *aritmetiske generalisering*. Mason (1996) og Lannin (2005) sine *eksplisitte* kategoriar skil seg frå kvarandre, i og med at Lannin (2005) har med tre ulike strategiar, medan Mason (1996) berre har ein, den *eksplisitte*. Ein kan samanlikne generaliseringsnivåa til Lee (1996) med Radford (2010) sine nivå. Begge baserer seg på ei nivådeling med bakgrunn i elevane si utvikling innanfor generalisering. Radford (2010) sine to kategoriar *faktabasert* og *kontekstbaserte generalisering*, kan samanliknast med Lee (1996) sitt *verbaliseringsnivå*. Det er likevel ein liten forskjell i og med at i faktabasert og kontekstbasert generalisering, vektlegg Radford (2010) bruk av ord, gestikulering og symbol, medan Lee (1996) berre vektlegg ordbruk og ikkje nemnar noko om gestikulering og bruk av symbol. Lee (1996) nemnar fyrst symbolbruk under det siste nivået sitt, *symboliseringsnivå*, og dette kan samanliknast med Radford (2010) sitt *symbolske generaliseringnivå*.

2.4 Å undervise i matematikk

Det er mange faktorar som påverkar elevanes læring, og dei ulike klasseromma er fylt med kompleks dynamikk. Undervisning handlar om relasjonar mellom menneske og mellom menneske og fag (Franke et al., 2007; Hiebert & Grouws, 2007). Lampert (2004) beskriv undervisningspraksis som utviklinga av desse relasjonane. Det handlar om å jobbe saman for å skape meining (Lampert, 2004). Tilsvarande definisjon finn ein hos Hiebert og Grouws (2007), som meiner at undervisning inneheld klasseromsinteraksjonar mellom lærarar og elevar rundt eit innhald eller tema.

Det overordna målet i matematikkundervisinga er å hjelpe elevane med å utvikle matematisk kompetanse. Matematisk kompetanse handlar om evna til å forstå, bedømme og å bruke matematikk i ulike matematiske situasjonar (Niss, 2007). Måten undervisninga vert gitt på, påverkar elevane si læring, både når det gjeld nivå og måten det skjer på (Hiebert & Grouws, 2007). Hiebert og Grouws (2007) meiner at undervisninga spelar ei stor

rolle i elevane sine *moglegheiter til å lære (opportunity to learn)*. Rammene som læraren set for undervisninga, har innverknad på dette. Desse rammene handlar om ulike læringsmål og ulike tema. Dei handlar også om lærarens forventningar, tida dei set av til ulike tema, kva type oppgåver dei vel, og på kva måte dei leiar diskusjonar (Hiebert & Grouws, 2007). Hiebert og Grouws (2007) understrekar at *moglegheiter til å lære* ikkje er det same som *å lære*. Dette avheng av kunnskapen eleven har med seg, oppbygginga av oppgåver og aktivitetar, og elevens engasjement (Hiebert & Grouws, 2007).
I dagens matematikkundervisning er det i hovudsak to læringsmål som er i fokus. Det eine er *skill efficiency,* som handlar om å utføre rekneprosedyrar på ein passande og rask måte. Det andre læringsmålet er *omgrepsforståing* (*conceptual understanding)* som handlar om mentale forbindelsar mellom matematiske fakta, prosedyrar og idear (Hiebert & Grouws, 2007). *Skill efficiency* kan oppnåast ved hjelp av pugging eller det dei kallar meiningsfull læring. *Omgrepsforståing* derimot, krev meiningsfulle læringsforhold. Dette stemmer overeins med Hiebert og Lefevre (1986), som meiner at ein kan sjå på prosedyrekunnskap utan å tenke omgrepskunnskap, men at ein ikkje kan sjå på omgrepskunnskap utan å ha med element av prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986).

Det finst inga forsking som kan konkludere med ein enkel samanheng mellom ein læringsmetode og *skill efficiency*, og tilsvarande for *omgrepsforståing*. Ein kan likevel seie noko om kva type undervisning som legg til rette for kvar av desse kompetansane. Det finst i hovudsak tre utfordringar: 1) Ulike undervisningsmetodar kan vere effektive for ulike læringsmål. 2) Undervisning er eit system av interaksjonar som verkar saman. Dersom ein skal jobbe i små grupper, så vil framdrifta i gruppa avhenge av elevane sine kunnskapar og ferdigheiter både når det gjeld samarbeid med andre og når det gjeld å løyse oppgåva dei får. 3) Den siste utfordringa er at det vil vere påverknad frå ulike variablar av formidling. Effekten av undervisning vil vere avhengig av elevanes merksemd, tolking og ferdigheiter (Hiebert & Grouws, 2007).

Hiebert og Grouws (2007) har også analysert forsking på kva læringsmetodar som kan ha effekt på omgrepsforståing. Dei har kome fram til to avgjerande faktorar : 1) *Elevar og lærarar har eit eksplisitt fokus på konsept – samanhengen mellom matematiske fakta, prosedyrar og idear*. Dette kan vere å stille spørsmål om på kva måte ulike løysingsstrategiar liknar på, eller er forskjellige frå, andre. Det kan også handle om å diskutere ulike matematiske prosedyrar. Læraren kan også sette læringsmålet for timen i samanheng med tidlegare læringsmål og idear (Hiebert & Grouws, 2007) . 2*) Elevane bør få slite med viktige matematiske idear.* Å *slite* i denne samanhengen handlar om at elevane gjer ein innsats for å forstå det som ikkje nødvendigvis er innlysande med ein gong. Dei jobbar med oppgåver som fagleg er innanfor rekkevidde, men som dei ikkje har erfaring med frå før (Hiebert et al., 1996). Dei bør bruke tid på å fundere, diskutere med andre og ikkje alltid bli fortalt stegvis korleis ein går fram (Hiebert & Grouws, 2007). Ein kan knyte dette opp mot Vygotsky sin *proksimale utviklingssone* (Imsen, 1999). Denne sona kan forklarast som avstanden mellom det området der eleven kan klare seg åleine og området der eleven ikkje vil klare seg, sjølv med hjelp. Den representerer med andre ord det eleven kan klare å få til ved hjelp frå lærar eller dyktige medelevar (Imsen, 1999)

For mange lærarar er det skummelt å endre undervisningspraksis, fordi ei endring fører til at læraren må engasjere seg på ein heilt annan måte i dialogen med elevane enn det han er van med (Franke et al., 2007). Dette kan sjåast i samanheng med at Stiegler og Hiebert (1999) beskriv undervisning som ein kulturell aktivitet, og at dette forklarar kvifor den er så vanskeleg å endre på. Mason (1996) etterlyser også eit kulturskifte der lærarane vert komfortable med å opptre matematisk framfor og saman med elevane sine. På den måten vert det like naturleg for dei å snakke matematikk som det er å lese og snakke deira eige språk (Mason, 1996). Lærarane må trenast opp i korleis dei skal velje ut og sette opp kognitivt utfordrande oppgåver. Dei må også lære korleis dei kan støtte elevane best mogleg gjennom diskusjonane i klasserommet. Det er ofte her det stoppar opp. Diskusjonane vert gjerne på eit lågare nivå enn det ei kognitivt krevjande oppgåve krev. Det er vanskeleg for lærarane å styre diskusjonar som er basert på elevane sine idear og strategiar på ein produktiv måte (Smith & Stein, 2011).

Utfordrande innhald i undervisninga åleine fører ikkje til høgare ferdigheiter sidan det same temaet kan undervisast på fleire måtar, både djupt og overflatisk. For å kunne løyse likningar kan det hende at dei må ha ei forståing for variablar, funksjonar og ekvivalens, men dei kan også lære den mekaniske framgangsmåten, algoritmen, for å lære å løyse dei (Stigler & Hiebert, 1999). Ein reflekterer då ikkje over bruken av algoritmen, og ein løyser då oppgåva utan noka konseptuell forståing for den aktuelle problemstillinga. Dersom ein driv med mengdetrening på algoritmen, kan det føre til at ein har memorert den og kan bruke den utan å vise konseptuell forståing (Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner, 2014). Denne typen forståing kan samanliknast med Skemp (1976) si instrumentelle forståing og Hiebert og Lefevre (1986) sin prosedyrebaserte kunnskap.

2.4.1 Å samtale om matematikk

Den tradisjonelle matematikkundervisninga dominerer i mange klasserom (Alrø & Skovsmose, 2004) Den går i hovudsak ut på at læraren går gjennom nytt stoff på tavla, for så å la elevane jobbe med oppgåver i læreboka, anten åleine eller to og to. Når elevane jobbar med oppgåver, går læraren rundt og svarar på spørsmål og korrigerer eventuelle feil hjå elevane. Kommunikasjonen i ein slik undervisningstime vert ofte dominert av IRE-mønsteret, som betyr at læraren tek initiativ til å stille spørsmål, eleven responderer og læraren evaluerer svara frå eleven (Alrø & Skovsmose, 2004; Franke et al., 2007). Læraren vert dermed den dominerande parten i kommunikasjonen, og elevane svarar berre på spørsmål som læraren stiller. I denne typen kommunikasjonsmønster vert fokuset på svaret eleven kjem med, og ikkje på kva strategiar han har brukt for å komme fram til løysinga si (Alrø & Skovsmose, 2004; Franke et al., 2007; Nosrati & Wæge, 2015). Dersom målet med undervisninga er å lære om kva som er rett og galt i matematiske termar, kan denne typen kommunikasjonsmønster støtte opp om det målet. Samtidig kan det gi ei oversikt over kva som er kjent frå før. Dette kan skape trygge omgivnadar i klasserommet (Alrø & Skovsmose, 2004). Ulempa med denne typen kommunikasjon er at elevane ikkje tek ansvar for læreprosessen, men kjem med instrumentelle svar på lærarens spørsmål utan å utdjupe korleis dei har tenkt (Alrø & Skovsmose, 2004).

Franke et al. (2007) beskriv læring som noko ein engasjerer seg i, og gir meining til, når ein deltek saman med andre. Lærarar og elevar bidreg med sine erfaringar og identitetar i samhandlinga seg i mellom (Franke et al., 2007). Likevel ser ikkje Franke et al. (2007) på det å samtale om matematikk som nok til å utvikle matematisk forståing. Lærarens rolle i samtalen er viktig for å utvikle den matematiske forståinga. For å utvikle matematisk forståing, er det viktig at elevane vert gitt ein sjanse til å presentere løysingane sine og snakke om ulike matematiske representasjonar. Dei må også bli gitt anledning til å forklare korleis dei har gått fram i prosessen med å finne ei løysing, vise kvifor deira løysing fungerer, og å lage eksplisitte generaliseringar (Franke et al., 2007). Også Drageset (2014) meiner at eit viktig grep i matematiske diskusjonar er å bruke spørjeordet «*kvifor*». Å be elevane grunngje vala sine, både når det gjeld val av strategi og kvifor strategien deira er matematisk rett, er med på å trena opp elevane si evne til å argumentere matematisk (Drageset, 2014).

Kazemi og Hintz (2014) har forska på barne- og ungdomstrinnet og kome fram til ein måte å kommunisere matematikk i klasserommet på som dei kallar *Intentional Talk*. På bakgrunn av at ikkje alle diskusjonar i matematikk har det same målet, eller bør leiast på same måte, har dei basert arbeidet sitt på fire prinsipp: 1) Diskusjonar må ha eit matematisk mål, og ulike mål treng ulik førebuing og ulike måtar å diskutere på. 2) Elevane må vite kva type idear dei skal dele og på kva måte dei skal delast på. Her treng dei øving i å vite kva type idear som er nyttige for andre. 3) For at elevane skal oppnå det matematiske målet for timen/diskusjonen, må læraren orientere elevane mot dei matematiske ideane som vert delte. 4) Det er viktig at lærarane kommuniserer at kvar elev sine idear er verdsett og at alle kan konstruere meining (Kazemi & Hintz, 2014).

Forskarane er einige om at elevane gjennom samtale vert i stand til å setje ord på sine eigne tankar, lærer seg å lytte til medelevar og å argumentere for sine eigne løysingsstrategiar. Dette kan føre til auka læringsutbytte i faget. I læreplanen i matematikk vert det å kunne uttrykke seg munnleg sett på som ei av dei grunnleggande ferdigheitene i matematikk. Det inneber «*å formulere logiske resonnementer, forklare en tankegang og sette ord på oppdagelser, ideer og hypoteser* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 5). Dette betyr at eleven blant anna skal delta i samtalar og argumentere for sine eigne strategiar i løysing av matematiske situasjonar og problem. Det inneber også at dei skal vere i stand til å lytte til andre og gi tilbakemelding på andre elevar sine resonnement (Utdanningsdirektoratet, 2013).

2.4.2 Five Practices

Smith og Stein (2011) understrekar også verdien av høg kvalitet på samtalen i klasserommet. Høg kvalitet på samtalar vil støtte elevane si læring i matematikk ved å hjelpe dei til å forstå korleis dei kan kommunisere ideane sine og på kva måte dei kan dele desse med resten av klassen. På denne måten kan dei evaluere sine eigne og medelevane sine matematiske idear.

På bakgrunn av dette har dei utvikla ein pedagogisk modell som dei kallar *Five Practices* (Smith & Stein, 2011).

Five Practices inneheld fem trinn ein som lærar kan bruke for å legge til rette for gode matematikksamtalar i klasserommet (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Hovudpoenget med modellen er at elevane skal få auka kompetansen sin i matematisk tenking, resonnering og involvering i løysing av oppgåver som ikkje nødvendigvis kan løysast ved bruk av ei bestemt oppskrift (Smith & Stein, 2011). Dei fem trinna er *anta (anticipating), overvake (monitoring), velje ut (selecting), velje rekkefølgje (sequencing)* og *kople saman (connecting).* (Smith & Stein, 2011). Det fyrste trinnet er læraren sin førebuingsdel, medan dei fire andre vert gjennomført i undervisningstimen.

Anta (anticipating) handlar om å setje seg klare mål for undervisningstimen. I denne fasen vel læraren ut ei utfordrande oppgåve som ein kan løyse på fleire ulike måtar. Val av oppgåve er viktig for utbyttet av timen. Her er det ein fordel å få oversikt over kva strategiar elevane kan komme opp med, og vurdere på kva måte desse strategiane kan sjåast opp mot det som læraren ønsker at eleven skal sitje att med etter timen. Det er viktig å få oversikt over både gode og mindre gode strategiar, slik at læraren kan planlegge korleis han skal respondere på dei ulike strategiane (Stein et al., 2008). Dersom elevane skal jobbe med generalisering av figurmønster, må læraren forsøke å finne alle løysingsstrategiar som elevane kan komme opp med. I tillegg kan han med fordel velje ut i kva rekkefølgje han ønskjer at strategiane skal presenterast i. Nokon elevar vil kunne sjå eit mønster utan å klare å formulere ein formel med symbol, andre vil klare å sette opp ein rekursiv formel, medan andre igjen kan klare å komme opp med ein eksplisitt formel. Då kan det vere ein ide å få presentert ideane i den rekkefølgja dei står i her, i og med at ein då får ei stigning i vanskegrad. Eit anna døme er likningsløysing. Dersom ein skal jobbe med likningsløysing, kan læraren førebu seg på ein diskusjon som går ut på å samanlikne og knyte saman strategiar. Ein bør då bestemme seg for kor mange strategiar ein ønskjer at elevane skal samanlikne, med utgangspunkt i det matematiske målet for timen.

Målet med det andre trinnet, *overvake (monitoring),* er å få oversikt over det matematiske potensialet som elevane sine tenkemåtar og løysingsstrategiar har (Stein et al., 2008). Medan elevane jobbar med oppgåva, går læraren rundt og observerer arbeidet. Det er viktig at læraren er aktiv og stiller spørsmål som kan klargjere korleis elevane tenkjer. I denne fasen vel læraren ut kva ein skal fokusere på i diskusjonen seinare i timen, og dermed kva løysingsstrategiar som bør delast med heile klassen. Han kan også få oversikt over moglege misoppfatningar, og om det er elevar som kjem opp med løysingsstrategiar som læraren ikkje har tenkt over sjølv. Læraren vil få godt utbytte av denne fasen dersom han har gjort ein god jobb i førebuingane sine (Stein et al., 2008).

Velje ut (selecting) dreier seg om at læraren vel ut kva for nokre elevar som skal presentere sine løysingar for resten av klassen (Stein et al., 2008). Utvalet baserer seg på målet ein har sett for timen og observasjonar som er gjort i løpet av timen. Ein kan spørje etter frivillige, men læraren må ha kontroll på at eleven som melder seg, har ein nyttig ide å dele med klassen. (Stein et al., 2008). Det er viktig at læraren har kontroll på det som vert presentert, slik at ein sikrar seg at det ligg føre eit læringspotensiale for elevane.

Rekkefølgja løysingsstrategiane vert presentert i, er viktig for læringsutbyttet av timen. Det fjerde trinnet, *velje rekkefølgje (sequencing),* handlar om korleis dette vert gjort. Dette kan gjerast på fleire måtar. Ein kan velje om ein vil starte med ein strategi som er lett å forstå og så bygge vidare på denne, eller ein kan starte med ein strategi som byggjer på ei vanleg misoppfatning. Det som er viktig, er at læraren vel rekkefølgja ut frå kjennskap til elevane sine og deira mål for opplæringa. Læraren kan med fordel tenkje seg ut ei rekkefølgje når han førebur seg til timen (Stein et al., 2008).

Det siste trinnet, *kople saman (connecting),* handlar om å trekke samanhengar mellom dei ulike ideane som er presentert (Stein et al., 2008). Dette er kanskje den mest utfordrande fasen for læraren. Det er viktig at dei matematiske ideane til elevane vert sett inn i ein matematisk samanheng. Tanken er ikkje at ein skal bygge diskusjonane på fleire ulike måtar å løyse ei oppgåve på. Det er ikkje slik at jo fleire løysingsmetodar ein kjem opp med, jo betre er det. Målet bør i staden vere å vise strategiar som byggjer på kvarandre, slik at ein kan utvikle gode matematiske idear som elevane kan ta med seg i det vidare arbeidet med matematikk (Stein et al., 2008). Ein må her unngå at diskusjonane i klassen ikkje vert det Stein et al. (2008) kallar for «show and tell», der elevane berre viser sine løysingsstrategiar. Det er viktig at læraren stiller spørsmål som kan hjelpe elevane til å forklare korleis dei har tenkt og kvifor dei meiner at det er rett. I tillegg må læraren velje ut strategiar som byggjer opp under målet som er sett for timen (Stein et al., 2008). På denne måten kan heile klassen bli løfta framover matematisk, og det vil vere mogleg for elevane å auke si matematiske forståing (Smith & Stein, 2011).

Five Practices (Smith & Stein, 2011) er eit fint supplement til anna undervisning. Ein kan bruke Five Practices (Smith & Stein, 2011) som introduksjon til eit nytt tema, eller ein kan bruke metoden når ein skal gå djupare i eit tema som læraren allereie har introdusert. Styrken med denne undervisningsmetoden, er at den fremjar både læring av prosedyrar og kvifor desse prosedyrane er rette, altså *korleis* og *kvifor*. Elevane får øve seg i å snakke matematikk, lytte til andre elevars idear og oppleve eigarskap til sine eigne idear, noko som både Franke et al. (2007), Hiebert og Grouws (2007) og Drageset (2014) understrekar som viktig for at elevane skal lære seg å argumentere matematisk, og for utvikling av den matematiske forståinga. Lærarens rolle i diskusjonane er heilt avgjerande for at dette skal kunne skje. Ulempa med Five Practices (Smith & Stein, 2011) er at det krev mykje av læraren, og arbeidsmåten tek mykje tid i ein travel kvardag der fokuset til læraren er å rekke å komme seg gjennom pensum før eksamen.

3 METODE

I dette kapittelet vil eg fyrst gjere greie for læringssynet som ligg til grunn for undersøkinga mi. Eg vil og forklare korleis eg har gått fram for å finne den informasjonen eg treng for å kunne svare på forskingsspørsmåla mine. Eg vil gjere greie for val av forskingsmetode, korleis eg har gått fram for å samle inn data, og korleis eg har bearbeida og analysert desse. Eg vil også gjere greie for ei av undervisningsøktene som vart gjennomført i prosjektperioden.

3.1 Læringssyn

Det eksisterer fleire teoriar om korleis læring kan skje. Som lærar vil ein ofte ha med seg fleire perspektiv, sjølv om praksisen vår ofte støttar eitt perspektiv meir enn eit anna. Skal vi ha ei mest mogleg heilskapleg forståing av korleis læring skjer, bør vi ha oversikt over fleire teoriar (Imsen, 1999). For at eleven skal få best utbytte av undervisninga, bør ein bruke varierte undervisningsmetodar, noko som gjer at me nyttar oss av fleire ulike læringsteoriar. Five Practices (Smith & Stein, 2011) handlar om at elevar samhandlar i løysing av kognitivt krevjande oppgåver. I eit sosiokulturelt læringssyn baserer ein seg på at kunnskap ikkje kan konstruerast av enkeltindividet. Det skjer i sosialt samspel med delar av den kulturen ein omgir seg med, og språk og symbol er sentrale reiskapar (Imsen, 1999; Postholm, 2004).

Sentralt innanfor sosiokulturelt læringssyn står russaren Lev Vygotsky (Imsen, 1999). Eit av hans viktigaste poeng er at sosial aktivitet er bakgrunn for all intellektuell utvikling og tenking. Utviklinga går frå samfunn til individ og ikkje omvendt. I denne prosessen vert språket sett på som den viktigaste reiskapen (Imsen, 1999). Når barn er små, kommuniserer dei meir med seg sjølv enn med kvarandre. Etter kvart som barn veks til, vert språket meir utvikla, og i vaksen alder vert språkfunksjonen delt i to. Den eine delen handlar om å bruke språket til å kommunisere med andre, og den andre delen vert ein indre tale som er grunnlaget for sjølvrefleksjon og medvit (Imsen, 1999). I samarbeid med andre brukar eleven språket sitt. I følgje Vygotskij vil orda då bli ein del av eleven og hans tenking (Postholm, 2008). Den intellektuelle utviklinga vert på denne måten avhengig av språket og den praktiske aktiviteten eleven brukar språket i (Imsen, 1999; Vygotsky, 1978).

Vygotsky skil mellom to utviklingsnivå, det *faktiske* og det *potensielle* utviklingsnivået, også kalla *den proksimale utviklingssona* (Imsen, 1999; Vygotskij, 2001). Det *faktiske* utviklingsnivået handlar om kva eleven kan meistre på eiga hand utan hjelp frå andre. Dette er kunnskap som allereie er etablert ut frå elevens tidlegare erfaringar (Vygotsky, 1978). *Den proksimale utviklingssona* handlar om kunnskapen eleven kan tileigne seg under rettleiing av ein vaksen, eller i samarbeid med jamnaldrande, dyktige elevar (Imsen, 1999; Vygotsky, 1978). Vygotsky meinte at utviklinga går frå det sosiale til det individuelle. Eleven må derfor (er derfor i stand til å) utføre ei handling i samspel med andre, før han er i stand til å utføre den på sjølvstendig basis (Cobb, 2007; Imsen, 1999). Utfordringa for læraren vert å legge til rette for at språket kan spele ei sentral rolle i aktiviteten i klasserommet (Postholm, 2008). Slik sett oppfyller Five Practices (Smith & Stein, 2011) desse krava, i og med at elevane vert oppfordra til å kommunisere med kvarandre i ei gruppe og med heile klassen når dei ulike strategiane skal delast. Dei får då både munnleg og skriftleg trening i bruk av det matematiske språket. Mi oppgåve baserer seg derfor på eit sosiokulturelt læringssyn.

3.2 Val av metode

3.2.1 Val av forskingsdesign

Når ein skal starte ein forskingsprosess, er det viktig å finne ut korleis ein ønsker å få svar på spørsmåla ein stiller seg. Som forskar har ein valet mellom kvantitative eller kvalitative metodar. Ein kan også gå for ein kombinasjon av desse, anten ein mixed methods-studie eller aksjonsforsking (Creswell, 2012).

Forskingsspørsmåla mine er: *«Kva løysingsstrategiar brukar elevane i arbeid med generalisering av figurmønster før og etter ein periode med Five Practices?»* og *«Kva rolle spelar bruken av Five Practices i elevane si utvikling av løysingsstrategiar?».* For å kunna svare på dette, måtte eg gjennomføre eit prosjekt der eg testa ut Five Practices (Smith & Stein, 2011) på elevar for å kunne sjå om undervisningsmetoden kunne ha ein effekt på deira måte å tenke på. Dette er ei aktiv handling der eg som lærar søkjer å finne ei løysing på ei utfordring som eg har erfart etter mange år i klasserommet. Creswell (2012) beskriv aksjonsforsking som ein metode der ein adresserer eit spesifikt problem og søkjer å løyse problemet (Creswell, 2012). Tilsvarande definisjon finn ein hos Cohen, Manion og Morrison (2011) der aksjonsforsking vert beskrive som ei systematisert undersøking innanfor læraren sit eige arbeidsmiljø, og som har som mål å informere og utfordre tidlegare praksis. Dei skriv vidare at aksjonsforsking blant anna kan brukast når ein erstattar ein tradisjonell undervisningsmetode med ein utforskande metode, og for å studere ulike tilnærmingar når det gjeld læringsstrategiar (Cohen, Manion, & Morrison, 2011). Vidare seier Ulvik (2016) at «*gjennom aksjonsforskning granskes undervisning og læring fra innsiden*» (Ulvik, 2016, s. 17). Eg har derfor valt å bruke aksjonsforsking i dette prosjektet.

3.2.2 Val av metodar for datainnsamling

I aksjonsforsking kan ein velje å bruke kvantitativ metode, kvalitativ metode eller begge delar (Creswell, 2012). Kvantitative metodar vert ofte brukt til å beskrive trendar, eller når ein skal samanlikne ulike variablar. Ein samlar inn data frå mange deltakarar, og ein brukar statistiske metodar for å analysere innsamla data. Kvantitative metodar kan gje mykje, men overflatisk, informasjon om ei problemstilling eller eit tema (Creswell, 2012). Kvalitativ metode vert ofte brukt dersom ein ønskjer å gå meir i djupna på eit tema eller ei problemstilling (Creswell, 2012). Kvalitativ forsking vil vere eit samspel mellom den som forskar og dei som vert forska på. Derfor vil kunnskap og forståing oppstå i ein sosial interaksjon mellom dei to partane i forskinga. På denne måten kan ein få fram perspektiva til dei som er deltakarar i forskinga (Postholm, 2004).

For å kunne svare på det fyrste forskingsspørsmålet mitt, *«Kva løysingsstrategiar brukar elevane i arbeid med generalisering av figurmønster før og etter ein periode med Five Practices?»*, måtte eg ha eit datamateriale som viste korleis elevane løyste oppgåvene før og etter undervisningsperioden. Eg valte derfor å køyre to identiske testar, ein før-test og ein etter-test. På den måten kunne eg få ei oversikt over elevane sine løysingsstrategiar, og om det hadde skjedd ei endring i måten elevane løyste oppgåvene på.

Dette ville likevel ikkje vere nok til å svare på det andre forskingsspørsmålet, *«Kva rolle spelar bruken av Five Practices i elevane si utvikling av løysingsstrategi?».* Eg ynskte ikkje berre å finne ut om det hadde skjedd ei endring, men også om det var mogleg å finne ut kvifor denne endringa hadde funne stad. Sjølv om eleven presterte betre på den siste prøven, ville ikkje det gje meg svaret på kva som kunne vere årsaka til endringane. Eg kunne også risikere at elevar presterte best på den fyrste testen. Eg trong derfor meir inngåande informasjon om korleis elevane tenkte då dei løyste dei ulike oppgåvene, og kvifor dei tenkte slik dei gjorde. Eg valde derfor å bruke kvalitativ metode.

Blant dei kvalitative metodane finn ein observasjon og intervju. Å observere er ein prosess der ein får høve til å samle open fyrstehandsinformasjon om dei som vert observerte (Creswell, 2012). Ved å observere kan ein sjå direkte korleis deltakarane handlar og samhandlar, noko som kan skilje seg frå det dei seier at dei gjer (Dalland, 2017). Ein fordel med observasjon er at ein kan samle informasjon i det augneblikket den oppstår. Ulempa er at ein kan ha avgrensa tilgang til dei ein ønsker å observere, og metoden krev gode lytteeigenskapar og evne til å fokusere på visuelle detaljar (Creswell, 2012). Ved å bruke observasjon mister ein moglegheita til å få inngåande kjennskap til korleis eleven tenkjer når han løyser ei oppgåve, noko eg trong for å kunne svare på forskingsspørsmålet mitt. Derfor måtte eg velje ein annan metode.

Kvale og Brinkmann (2015) beskriv det kvalitative forskingsintervjuet som ein måte å søkje å forstå verda på sett frå den som vert intervjua si side. Vidare skriv Sollid (2013) at målet med forskingsintervjuet er å kaste lys over forskingsspørsmåla som forskaren ynskjer å søke svar på. Eg trong informasjon om korleis eleven tenkte då han løyste oppgåvene på dei to testane. I tillegg ynskte eg å få informasjon om kvifor eleven eventuelt tenkte annleis på før-test og etter-test. Eg valde derfor å bruke intervju som metode der resultatet av testane vart brukt som utgangspunkt for intervjua.

Kva type intervju ein vel, er avhengig av målet med forskinga (Kvale & Brinkmann, 2015). Eg ynskte å ta utgangspunkt i elevane sine eigne svar på dei ulike oppgåvene på testen. Å gjennomføre eit fokus-gruppeintervju ville derfor vere vanskeleg, i og med at elevane kunne ha løyst oppgåvene på fleire ulike måtar. Eg valde derfor å intervjue kvar elev enkeltvis. Då ville eg få direkte innsyn i korleis kvar elev hadde tenkt då dei løyste dei ulike oppgåvene.

3.3 Kvalitativt forskingsintervju

Eit forskingsintervju er ein meir eller mindre strukturert samtale mellom to personar rundt eit gitt tema, der kunnskapen vert produsert i samspelet mellom den som intervjuar og den som vert intervjua (Sollid, 2013). Creswell (2012) seier at eit forskingsintervju oppstår når ein forskar stiller ein eller fleire deltakarar generelle, opne spørsmål og registrerer svara deira. Kvale og Brinkmann (2015) skriv at eit forskingsintervju har som mål å forstå sider ved den som vert intervjua frå hans eller hennar perspektiv. Det er likevel ikkje ein daglegdags samtale mellom likestilte partar. Maktforholdet vil vere asymmetrisk sidan intervjuaren bestemmer tema, kva spørsmål som skal stillast og kva svar som skal bli følgt opp (Kvale & Brinkmann, 2015).

Når ein bestemmer seg for å bruke forskingsintervju som metode, må ein også finne ut kva type intervju som eignar seg i undersøkinga. Dette vil vere avgjerande for kva type spørsmål ein skal stille. Ein kan grovt sett dele strukturen til eit intervju inn i tre ulike former: *ikkje-strukturerte*, *semi-strukturerte* og *strukturerte*. Eit *ikkje-strukturert* intervju er heilt fritt i forma, og intervjuaren må ta mange av dei metodiske vala undervegs i intervjuet. Dette krev mykje av intervjuaren både når det gjeld kjennskap til tema og kva metodiske grep som finst (Kvale & Brinkmann, 2015). Dersom ein ynskjer å gjennomføre eit *strukturert* intervju, lager ein ferdig alle spørsmåla på førehand og følgjer dei slavisk i den rekkefølgja dei er sette opp. På denne måten sikrar ein at alle informantane får dei same spørsmåla, noko som gjer at det er lett å reprodusere informasjonen som kjem fram i intervjua (Kvale & Brinkmann, 2015). Mellom ikkje-strukturert og strukturert intervju finn ein det *semi-strukturerte* intervjuet. I eit slikt intervju vert fokuset sett på den som vert intervjua si oppleving av eit emne. Målet med eit semi-strukturert intervju er at intervjuobjektet skal få snakke så fritt som mogleg om tema, men likevel med bakgrunn i spørsmål ein har tenkt ut på førehand. Rekkefølgja og spørsmåla er opne, slik at ein kan gå litt djupare inn i dei svara intervjuobjektet gir undervegs i intervjuet. Ein kan også la intervjupersonen svare på ting ein ikkje hadde planlagt på førehand (Kvale & Brinkmann, 2015).

Som tidlegare nemnt, brukte eg elevane sine løysingar frå før- og etter-testen som bakgrunn for intervjua. Målet mitt var å få eleven til å fortelje korleis han hadde tenkt då han løyste oppgåvene på dei to testane. Eg var også interessert i å vite kvifor eleven hadde løyst oppgåva annleis på dei to testane, dersom så var tilfelle. I og med at eg brukte testane som bakgrunn for intervjuet, hadde eg bestemt tema på førehand. Eg hadde også gjort meg opp ei meining om kva type spørsmål eg ville stille. Slik sett var eg nærare eit strukturert intervju enn eit ikkje-strukturert. Sidan eg ynskte å kunne stille oppfølgingsspørsmål til svara elevane gav meg undervegs i intervjuet, valde eg eit semi-strukturert intervju. Intervjuguiden ligg som vedlegg 4

3.4 Datainnsamling

Eg vil i dette kapittelet gjere greie for bakgrunnen for val av informantar, korleis testen vart utarbeida og korleis intervjua vart gjennomført.

3.4.1 Utval

I kvalitativ forsking handlar det om å undersøke sentrale problemstillingar grundig. Forskaren gjer derfor eit målretta utval av informantar som kan hjelpe han til å finne svar på problemstillinga (Creswell, 2012). For å kunne gjennomføre undersøkinga mi, trong eg tilgang på elevar i skulen. Eg trong også tilgang på dei over ein periode, i og med at Five Practices (Smith & Stein, 2011) tek litt tid å gjennomføre. Det var derfor nærliggande å gjennomføre prosjektet på eigen skule. Vidare ynskte eg tilgang på ei gruppe som skulle jobbe med generaliseringar og problemløysing i faget sitt. Valet falt derfor på elevar som tek programfag matematikk i vidaregåande skule, fortrinnsvis R2. Dei har blant anna rekker og følgjer og stor grad av problemløysing i sitt pensum. I tillegg underviser eg sjølv i R2 og hadde derfor lettare tilgang på elevar.

Ideelt sett hadde det vore best å få ein annan lærar til å gjennomføre opplegget i ein klasse der eg ikkje har inngåande kjennskap til elevane. Det ville skapt distanse for meg som forskar, i og med at eg hadde laga både testen og undervisningsopplegget. Det ville då vore vanskeleg for meg å påverke elevane i noka særleg grad. Eg var då avhengig av å ha ein kollega som kunne tenke seg å gjennomføre opplegget for meg i si gruppe. Five Practices (Smith & Stein, 2011) er ikkje eit opplegg ein berre kan kaste seg ut i utan å ha øvd på førehand. Metoden krev ein del førebuing, og det er krevjande å leie diskusjonane på slutten av timen slik at desse vert fruktbare. Å forvente at ein kollega skulle bruke tid på dette, syntest eg ikkje var rett. Eg var derimot heldig som hadde ein kollega som takka ja til at eg overtok undervisninga i hans gruppe i åtte timar i løpet av to veker. Denne læraren deltok i timane og hjelpte til med å rettleia elevane medan dei jobba i grupper. Vi hadde på førehand gått gjennom opplegget for å forsikre oss om at vi hadde same forståing av kva som skulle skje i timane. Eg hadde aldri vore lærar for desse elevane sjølv. Eg gjennomførte også det same opplegget i mi eiga gruppe eit halvt år seinare. Eg ynskte å ha tilgang på fleire informantar sidan eg var usikker på om eg hadde nok informantar å ta av. Eit anna argument var at eg ynskte å bli flinkare til å følgje opp elevane sine tankar rundt bruken av dei ulike løysingsstrategiane. På den fyrste gjennomføringa såg eg at eg kunne ha stilt fleire oppfølgingsspørsmål enn eg gjorde. Ved å ta ei datainnsamling til, kunne eg forfølgje elevane sin tankegang litt meir enn eg gjorde i den fyrste gjennomføringa.

Totalt 18 av 22 elevar i dei to gruppene deltok på begge testane. Alle elevane deltok likevel i undervisningsopplegget, i og med at det skjedde i deira ordinære timar i faget. På bakgrunn av før- og etter-test vart ni elevar plukka ut til intervju. Dette var elevar som løyste enkelte oppgåver ulikt på dei to testane. Nokre av dei viste god utvikling på eit par av oppgåvene, medan andre hadde klart å løyse oppgåvene på begge testane, men på ulike måtar. Ein av elevane som vart intervjua, er ikkje med i oppgåva. Vedkommande vart ikkje intervjua om den oppgåva som eg har enda opp med å analysere. To av elevane som deltok på testane, reserverte seg mot å bli intervjua.

3.4.2 Før-test og etter-test

Det opphavelege utgangspunktet for prosjektet mitt var å undersøkje elevane si forståing for likningsløysing. Eg ynskte derfor å ha ulike typar likningar med i testen. I tillegg ynskte eg å ta med likningar innanfor ulike delar av pensum, for å sjå om det var nokre tema som utpeika seg som spesielt vanskelege. Eg henta oppgåvene frå ulike eksamensoppgåver og læreverk for vidaregåande skule. Desse oppgåvene har vore gjennom ei kvalitetssikring som det kunne vore vanskeleg for meg å gjennomføre om eg hadde laga oppgåvene sjølv. Testen ligg som vedlegg 5.

Testen inneheldt ferdig oppstilte trigonometriske likningar, eksponentiallikningar og irrasjonale likningar som testa elevane i det Kieran (2007) kallar *transformerande aktivitetar*. Elevane hadde nett gjort seg ferdige med temaet trigonometri då dei hadde den fyrste testen. Irrasjonale likningar hadde dei ikkje vore borte i sidan R1. Eksponentiallikningar treff dei på både i R1 og R2. Vidare fekk elevane ei oppgåve med tre påstandar om potensuttrykk der dei vart bedne om å vurdere om ein påstand var sann eller ikkje. Ei oppgåve inneheldt eit figurmønster der elevane vart testa i om dei brukte rekursive eller eksplisitte løysingsstrategiar. Siste oppgåva var ei optimeringsoppgåve der dei måtte omsetje opplysningar i oppgåva til likningar for så å bruke kunnskapar om funksjonsdrøfting for å kunne løyse oppgåva. Dei to siste oppgåvene kan plasserast under Kieran (2007) sine generaliserande aktivitetar, men ein finn også element av hennar resonnerande (global/meta) nivå. Eg valde også å leggje til ei oppgåve som omhandla likskapsteiknet for å sjå om det kunne vere nokre misoppfatningar rundt forståinga av dette. Tanken var at eg då kunne sjå om det var nokon samanheng mellom måten elevane løyste nokre av oppgåvene på og forståing av likskap.

Alle oppgåvene var opne oppgåver. Eg ville at eleven skulle vise korleis han løyste oppgåvene. Dette kunne vere med på å hjelpe eleven til å hugse korleis han hadde tenkt når intervjuet skulle gjennomførast. Dei opne oppgåvene var også eit godt utgangspunkt for meg som skulle intervjue elevane. Med bakgrunn i deira løysingar, kunne eg tilpasse den overordna intervjuguiden til kvar enkelt elev.

Oppgåvene i testen var meint å gje meg som lærar informasjon om kva løysingsstrategiar elevane brukar på dei ulike oppgåvetypane. Dette er eit av måla med diagnostiske oppgåver (Brekke, 2002). Eit anna mål er å bruke dei same oppgåvene før og etter ein undervisningsperiode for å måle korleis undervisninga har påverka elevane si evne til å løyse oppgåvene. Diagnostiske oppgåver kan innehalde oppgåver som elevane ikkje er godt kjende med frå før og kan fungere som ein god reiskap til å få informasjon om korleis kvar enkelt elev tenkjer og kor utbreidd dei ulike strategiane er i ei gruppe (Brekke, 2002)

3.4.3 Gjennomføring av intervju

Intervjua vart gjorde innan ei veke etter at den siste testen var gjennomført. På den måten ville eg unngå at elevane gløymde korleis dei hadde tenkt då dei løyste oppgåvene. Eg var opptatt av at elevane ikkje skulle gå glipp av anna undervisning for å komme til meg. I tillegg var nokre av desse elevane pendlarar og hadde ein skuleskyss dei skulle nå. Eg måtte derfor gjennomføre intervjua i skuletida, og helst i timar dei ikkje hadde undervisning. Intervjua skulle vare ca. ein halv time i utgangspunktet. Dette varierte litt alt etter kor mykje eleven hadde å bidra med. Fleire snakka veldig mykje, og det hende at vi nærma oss ein time, medan andre var ferdig etter tjue minutt. I forkant av intervjua vart elevane informerte om at vi skulle ta utgangspunkt i oppgåvene på testen. Dei fekk ikkje utlevert ferdige spørsmål, i og med at spørsmålsstillinga ville vere litt avhengig av svara og innspela deira. Eg hadde på førehand laga ein overordna intervjuguide som skulle vere ei rettesnor for meg under intervjua (vedlegg 4). Denne vart drøfta med ein kollega og rettleiar, og det vart gjort nokre justeringar på den før eg gjennomførte intervjua.

I intervjua tok eg utgangspunkt i oppgåvene der eg såg at eleven hadde endra løysingsstrategiane sine frå før-test til etter-test. Oppgåvene som vart diskuterte, var derfor litt ulike frå elev til elev. Likevel såg eg at den største og mest interessante endringa hos dei fleste var på oppgåve 4 og 5 på testen (vedlegg 5). Intervjusekvensen vart delt i tre delar. Den starta med at eleven fekk sjå kva han hadde gjort på etter-testen og vart bedd om å forklare korleis han hadde tenkt då han løyste oppgåva. Neste del handla om før-testen og korleis eleven hadde løyst den same oppgåva der. I den siste delen samanlikna vi dei to testane, og eleven vart spurt om han kunne forklare kva som var annleis frå før-test til etter-test og kvifor det hadde skjedd ei endring. I alle fasane av intervjuet stilte eg oppfølgingsspørsmål der eg ynskte at eleven skulle utdjupe eller presisere det han forklarte.

3.5 Undervisingsopplegget

Eg gjennomførte undervisningsopplegget i to ulike grupper i R2. Desse gruppene var vane med tradisjonell tavleundervisning, samtale mellom lærar-elev og samtale med andre elevar under gjennomgangen, og deretter jobba ein vanlegvis med oppgåver i læreboka. Mengdetrening var eit stikkord. Før gjennomføringa måtte jo eg øve meg i å praktisere undervisningsmetoden. Mine elevar vart derfor gradvis kjent med måten å arbeide på før sjølve gjennomføringa

3.5.1 Val av tema

Eg brukte før-testen som bakgrunn for val av tema i undervisningsøktene. Dei største utfordringane til elevane i den fyrste R2-gruppa såg ut til å ligge i generalisering av mønster og problemløysingsoppgåva. Eg og faglærar vart einige om at vi skulle fokusere på desse to tema i dei åtte timane opplegget varte. Dette passa fint, i og med at gruppa skulle til å starte med temaet rekker og følgjer, der eit av kompetansemåla i læreplanen er:

«E*leven skal kunne finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og utan digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8)

Problemløysing kan knytast til dette kompetansemålet:

«E*leven skal kunne formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte*» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8).

3.5.2 Samansetting av grupper

Då eg vurderte korleis gruppene skulle setjast saman, var det viktig for meg at det var eg som styrte prosessen. Dersom elevane sjølv skulle få velje kven dei ynskte å vere på gruppe med, kunne eg risikere at dei som alltid jobba i lag, ville gjere det no også. Ikkje alle elevar har nokon faste dei jobbar med i timane, og ikkje alle er like flinke til å ta initiativ til å finne nokon dei kan jobbe med. Risikoen for at nokon vart sitjande åleine var derfor til stades. Ved å ta styringa i samansettinga av gruppene, unngjekk eg den problemstillinga.

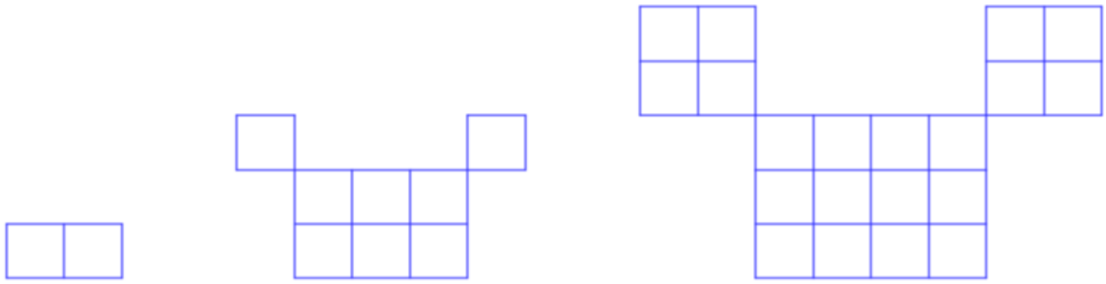
Sidan eg hadde åtte timar til rådigheit, ville eg at gruppene skulle vere ulike frå gong til gong. Eg var opptatt av at alle skulle få anledning til å komme med sine tankar i dei faglege diskusjonane rundt dei ulike oppgåvene som dei skulle jobbe med. Derfor rullerte eg på gruppene, slik at alle fekk jobbe med alle i løpet av prosjektet. I og med at eg ikkje kjente så godt til elevane i den fyrste gruppa, kunne eg risikere å setje saman grupper som ikkje ville fungere like godt. Faglæraren i den fyrste R2-gruppa godkjente gruppene slik dei var sette opp, for å unngå at eg ikkje plasserte elevar som ikkje fungerte i lag på gruppene. I mi eiga gruppe var dette enklare for meg sidan eg hadde god kjennskap til elevane og korleis dei jobba i lag.

Korleis gruppene vert sett saman, kan ha noko å seie for elevane sitt utbyte av gruppearbeidet. Webb (1991) viser i sin studie til at grupper som er sett saman av elevar som ligg tett opp til kvarandre i evnenivå, hadde høgast utbyte av arbeidet. Det vil seie at grupper sett saman av elevar med høg måloppnåing og middels måloppnåing, og grupper sett saman av elevar med middels måloppnåing og låg måloppnåing, lærte meir av kvarandre enn grupper sett saman av elevar frå alle tre nivå. Dei viste også betre læring enn grupper med elevar frå same nivå (Webb, 1991). I den eine R2-klassen vart gruppene sett saman av elevar som ikkje låg så lang frå kvarandre i nivå. I mi eiga gruppe, var elevane sitt faglege nivå generelt høgt. Gruppene var derfor meir homogene i min klasse enn i den andre klassen.

3.5.3 Ei undervisningsøkt

Eg gjennomførte til saman fire undervisningsøkter over to timar i løpet av prosjektet. I to av øktene var tema generalisering av mønster, og i dei to andre øktene hadde vi fokuset på problemløysingsoppgåver. Opplegget i dei fire øktene var det same, berre oppgåvene dei jobba med, var ulike. Eg vel å vise til ei av øktene med generalisering av mønster.

I denne økta skulle elevane jobbe med denne oppgåva henta frå eksamen i 2P hausten 2016.



F_1 F_2 F_3

Snorre lagar figurar av kvadratiske klossar etter eit fast mønster. Ovanfor ser du figur F_1, F_2 og F_3.

a) Kor mange klossar treng Snorre for å lage F_4 og F_5?

b) Bestem eit uttrykk for talet på klossar i figur F_n uttrykt ved n.

Snorre har 1000 klossar. Han vil lage ein figur som er så stor som mogleg.

c) Bruk formelen frå oppgåve b) til å bestemme kor mange klossar han får til overs når han har laga figuren.

I førebuingsfasen, *anta,* la eg ned mykje arbeid i å finne alternative måtar å løyse oppgåva på. Eg fokuserte på dei rette metodane, men brukte også litt tid til å finne metodar som ikkje ville hjelpe eleven i å komme fram til rette svar. Det er spesielt i oppgåve b) og c) at dette kan skje. I denne fasen bestemte eg meg også for kva rekkefølgje eg ville at elevane skulle presentere løysingane sine i. I forkant av økta hadde elevane fått informasjon om kva Five Practices (Smith & Stein, 2011) handla om. Dei var også informerte om at dei kunne løyse oppgåva på den måten dei ynskte, og dei kunne ha alle hjelpemiddel tilgjengeleg. Elevane vart delt inn i ei gruppe på fire elevar og tre grupper på tre. Ein elev var fråverande denne økta.

Medan elevane jobba i gruppene, gjekk eg og faglærar rundt og observerte kva som vart diskutert i gruppene. Dersom elevane hadde spørsmål til oppgåva, ynskte me å ikkje hjelpe dei med mindre dei stod heilt fast. Då ville me stille dei spørsmål som kunne hjelpe dei til å resonnere seg fram til ei mogleg løysing. Dette vart ikkje nødvendig. Under denne seansen, som eg kalla *overvaka* i førre kapittel, plukka eg ut elevar som hadde interessante løysingsstrategiar og som kunne forklare dette godt til dei andre på gruppa. I neste fase, *velje ut*, valte eg ut i kva rekkefølgje elevane skulle presentere sine løysingsstrategiar. Eg hadde på førehand bestemt meg for at eg ville starte med dei rekursive strategiane, deretter eksplisitte strategiar og bruk av regresjon. Elevane brukte varierande tid på tavla. Nokon var utruleg kjappe, medan andre var meir detaljerte. I dei tilfella der det gjekk litt for fort, brukte eg litt tid på å få eleven til å utdjupe tanken bak strategien hans. Ikkje alle strategiane eg hadde førebudd meg på, dukka opp. Eg hadde derfor ei lita økt med elevane med dei strategiane som mangla, før vi gjekk over til siste del, *kople saman*. Alt gjekk ikkje heilt etter planen i denne fasen. Elevane brukte lengre tid på tavla enn eg hadde førestilt meg. Vi hadde derfor litt knapp tid til denne diskusjonsfasen. Derfor starta eg neste økt med å hente fram løysingane elevane hadde delt dagen før, og vi tok siste del av oppsummeringa før vi jobba vidare med andre oppgåver innanfor generalisering.

3.6 Bearbeiding og analyse av data

Målet med å bearbeide og analysere data er å finne ut kva dei fortel oss. Vi søkjer etter ei meining i det vi har fått vite (Dalland, 2017; Sollid, 2013). Dalland (2017) skriv vidare at ein god analyse kan opne for ulike tolkingar av det som vert sagt. I dette kapittelet vil eg gjere greie for korleis eg har gått fram for å bearbeide og analysere det innsamla datamaterialet.

3.6.1 Transkripsjon av intervju

Intervjua vart tekne opp på band og transkribert straks etter intervjuet. I overgangen frå intervjusituasjonen til teksten, mister ein kroppsspråk, mimikk og nyansar i stemmen (Dalland, 2017). Kvale og Brinkmann (2015) skriv at denne omsetjinga derfor krev ei rekke vurderingar og slutningar. Eg ynskte å bevare mest mogleg av det som skjedde under samtalen. Pausar er derfor lagt inn med eit punktum for kvart sekund, og der eleven startar ein tenkepause med «eh», er dette lagt inn. På denne måten fekk eg fram at eleven tenkjer seg om og ikkje nødvendigvis kjem med svaret med ein gong. Nokre elevar ler av det dei har gjort, eller av det dei seier. Dette er markert med «hehe». Vidare har eg transkribert ord for ord, på dialekt, for å framstille situasjonen mest mogeleg autentisk. Eg har ikkje transkribert det som ikkje var interessant for oppgåva mi. Under transkripsjonen gjorde eg meg tankar rundt kva som var interessant å kikke nærare på i analysen og noterte dette ned for meg sjølv.

3.6.2 Analyse

Formålet med analyse er å sjå etter eit mønster eller eit system som gjer det enklare for forskaren å studere prosessar og fenomen (Creswell, 2012; Postholm & Jacobsen, 2016). Analyse av tekst består av ein tredelt prosess. Fyrst må ein dele teksten opp i mindre delar, anten etter tema eller hendingar. Dernest må ein setje saman dei ulike delane til ein ny heilskap, før forskaren tilfører meining og forståing til det datamaterialet som er samla inn (Postholm & Jacobsen, 2016). Dette kan gjerast på ulike måtar. Når ein set saman eit datamateriale ut frå kategoriar og kodar, handlar det om deskriptiv analyse (Postholm & Jacobsen, 2016). For at ein skal kunne kalle noko for ein kategori, må den for det fyrste innehalde relevant informasjon, og den må kunne stå åleine (Postholm & Jacobsen, 2016). Eit anna alternativ er narrativ analyse der ein ser på teksten som ei historie og søkjer å etablere samanheng mellom ulike hendingar i teksten (Postholm & Jacobsen, 2016).

Oppgåvene på før- og etter-test var utgangspunktet for intervjua. Eg var ute etter å få vite korleis elevane hadde tenkt då dei løyste oppgåvene på dei to testane, observere om det var nokon endringar i tankegang og prøve å finne ut kva som kunne vere årsaka til eventuelle endringar. Eg starta derfor med å sjå på kva elevane sa om tenkemåtane sine på oppgåve 4 på før-testen. Parallelt med dette, las eg ein del litteratur for å sjå om eg kunne finne nokre generaliseringsnivå som passa med datamaterialet eg hadde. Det var vanskeleg å finne kategoriar som passa 100%. Fleire av elevane låg i grenseland mellom ulike kategoriar både hos Radford (2010), Lannin (2005) og Lee (1996). Derfor gjorde eg ei grov inndeling i Mason (1996) sine rekursive og eksplisitte strategiar, og eg brukar Radford (2010), Lannin (2005) og Lee (1996) der det passar inn.

Fauskanger og Mosvold (2015) set fokus på innhaldsanalyse i utdanningsforsking. Denne analysen kan vere både kvantitativ og kvalitativ. Kvalitativ innhaldsanalyse vert definert som «a *careful, detailed, systematic examination and interpretation of a particular body of material in an effort to identify patterns, themes, assumptions and meanings»* (Lune & Berg, 2012, p. 182). Hsieh og Shannon (2005) deler kvalitativ innhaldsanalyse inn i tre kategoriar, *summativ*, *teoridreven* og *konvensjonell analyse*. *Summativ* analyse handlar om å identifisere nøkkelord og kodar med fokus på ord som er brukt og deira betyding som vert synleggjort i data. *Teoridreven* analyse tek utgangspunkt i teori og forsking der ein kategoriserer materialet ut frå eit teoretisk rammeverk. Resultata kan støtte opp om eksisterande forsking, alternativt utfordre eller vidareutvikla denne. Til slutt har ein *konvensjonell* analyse der ein tek utgangspunkt i det skriftlege materialet ein har og utviklar kodar og kategoriar induktivt frå data (Fauskanger & Mosvold, 2015). Under arbeidet med analysen av intervjua i mi oppgåve, kom det fram ulike løysingsstrategiar i dei to hovudkategoriane. Fleire av dei kunne likne på strategiar frå Mason (1996), Lannin (2005) og Radford (2010), men samstundes var det ikkje alle strategiane eg fann omtalt hjå desse eller hos andre som har skrive om same tema. Nokre av strategiane eg har funne, har eg derfor sett namn på sjølv ut frå kva eleven har gjort. Ein av strategiane er henta frå det teoretiske rammeverket. Eg brukar derfor ein kombinasjon av teoridriven og konvensjonell analyse.

3.7 Validitet og reliabilitet

Validitet handlar om at forskaren bestemmer nøyaktigheita og truverdet av funna sine gjennom strategiar som triangulering, eller ved å be informantane seie noko om funna i studien er korrekte (Creswell, 2012). Triangulering handlar om å studere det same fenomenet ved å bruke fleire metodar for å sjekke om resultatet vert det same (Creswell & Miller, 2000). I mi oppgåve kunne eg til dømes observert eleven sin kunnskap i klasserommet, intervjue eleven for å få meir innsikt i tenking og sjå på prøver for å få innsikt i prestasjonar på prøver. Kvale og Brinkmann (2015) skriv at validitet handlar om ein metode er eigna til å undersøke det som den skal undersøke. Dei skil mellom valide slutningar og valide argument der ei valid slutning ut frå sine premissar er korrekt utleia, og eit valid argument er eit argument som kan karakteriserast som fornuftig, velfundert, berettiga og sterkt (Kvale & Brinkmann, 2015). Det er eit kvalitetsstempel dersom spørsmåla ein brukar i eit intervju kan vere gyldige indikatorar for det som forskaren ynskjer å undersøke (Sollid, 2013). Cohen et al. (2011) deler validitet inn i *intern* validitet og *ekstern* validitet. Intern validitet handlar om at funna i eit forskingsprosjekt må beskrive fenomena som vert undersøkt. Ekstern validitet vert knytt til i kor stor grad ein kan overføre resultata til ei større gruppe og andre situasjonar (Cohen et al., 2011).

Ved å bruke fleire metodar, kan ein sikre validiteten. Truverdet vert styrka om fleire metodar viser dei same resultata. Tida ein har til rådigheit i eit masterstudium er avgrensa, og ein vil då ofte ikkje ha nok tid til å gjennomføre dette. Eit anna teikn på validitet er talet på informantar. Eg har intervjua ni elevar for å sikra at eg ikkje lener meg på utsegner frå enkeltpersonar. Kvar elev har uttrykt si subjektive oppfatning, noko som kan styrke sjansen for at dei resultata som er komne fram kan gjelde fleire.

Tidlegare i dette kapittelet har eg gjort greie for mine val av metodar. Eg har også beskrive korleis eg har analysert data. I analysekapittelet legg eg fram resultata i form av elevsvar på oppgåver og utdrag frå intervjua. Tolkinga mi er gjort på bakgrunn av desse. På den måten er det mogleg for lesaren å sjølv vurdere om mine funn støttar opp om forskingsspørsmålet mitt. Validiteten i undersøkinga mi vert med dette ivareteke.

Reliabilitet vert definert som konsistensen og truverdet til forskingsresultata (Kvale & Brinkmann, 2015). Omgrepet vert ofte sett i samanheng med om ein kan reprodusere resultata på eit anna tidspunkt og med andre forskarar. Reliabiliteten til intervjuaren kan diskuterast i samband med det å stille leiande spørsmål som kan påverke svara informantane gir (Kvale & Brinkmann, 2015). Sollid (2013) nemner at kvalitative intervju har som føremål å søkje etter kjenneteikna til den sosiale arenaen ein undersøkjer. I tillegg undersøkjer ein erfaringane og meiningane til få personar. På bakgrunn av dette, er det ikkje sikker at ein kan finne data som er gyldig og interessante i fleire samanhengar enn den ein sjølv undersøkjer. Det er likevel viktig å sikra pålitelegheita til intervjumaterialet både undervegs og i etterkant av datainnsamlinga (Sollid, 2013). Ein kan ikkje garantere pålitelegheit 100%, men ein kan reflektere over om det finst eventuelle problem knytt til forskinga (Postholm & Jacobsen, 2016).

I dette kapittelet har eg grunngjeve vala eg har teke i forkant av datainnsamlinga, og det same har eg gjort når det gjeld metodar for datainnsamling og handsaming av data etter at dei er samla inn. Under transkriberinga av intervjua har eg prøvd å vere så nøyaktig som mogleg for å skape eit mest mogleg autentisk bilete av intervjusituasjonen. Intervjua er teken opp på band, noko som kan sikre korrekt gjengjeving av det som vart sagt. I kapittelet om metodekritikk, kjem eg også inn på kva faktorar som kan ha påverka resultata av datainnsamlinga. Eg har koda datamaterialet åleine, men ideelt sett burde det vore koda av andre også for å sikre at ein er fleire som koder likt. I denne studien har det ikkje vore mogleg å gjennomføre, men prosessen med koding er beskriven tidlegare i dette kapittelet.

3.8 Etikk

I denne masteroppgåva har eg ikkje innhenta sensitive personopplysningar. Eg var likevel avhengig av å knyte namnet til eleven opp mot testane deira for å vite kven eg skulle intervjue. I tillegg er intervjua tatt opp på band, noko som kan identifisere eleven gjennom stemma. Prosjektet var såleis meldepliktig til NSD (NESH, 2016). Alle namn er anonymiserte, og lydopptak og testar vert sletta når prosjektet er over.

I forkant av gjennomføringa fekk elevane informasjon om prosjektet mitt. Eg var tydeleg på at det var frivillig å delta og at det ikkje ville få nokon konsekvensar for nokon om dei ikkje ville vere med. I denne sekvensen delte eg ut skriftleg informasjon om prosjektet saman med eit samtykkeskjema som eleven skulle fylle ut om han ville delta (vedlegg 3). Informert samtykke handlar om at deltakaren veit kva det vil innebere å seie ja til å delta i eit forskingsprosjekt (Sollid, 2013). På mitt samtykkeskjema kunne elevane krysse av for om dei ville delta på test og intervju, eller om dei berre ville delta på ein av dei. Dei elevane som ikkje ynskte å delta i sjølve prosjektet, skulle ikkje levere inn samtykkeskjema. Alle elevane i undersøkinga var over 18 år, og det var såleis ikkje nødvendig å kople inn foreldra.

Det aller beste hadde sjølvsagt vore å gjennomføre prosjektet på ein skule der eg ikkje kjente til nokon elevar og der elevane ikkje kjente til meg. Eg såg dette som vanskeleg å få til sidan eg då fyrst måtte fått innpass på ein annan skule. Eg ville også vere avhengig av ein lærar som ville sleppe meg til, og eg måtte ha søkt permisjon frå min eigen skule i perioden prosjektet skulle gjennomførast. Det er store avstandar mellom skulane i regionen eg held til i. Eg valde derfor å bruke eigen skule. Den eine gruppa som har delteke i prosjektet, har ikkje hatt meg som lærar før. Dei kjenner meg likevel rimeleg godt sidan at eg har ei dotter på same alder. I tillegg har eg ei rådgivarstilling som inneber at eg har kontakt med dei fleste elevane på skulen. Eg var derfor kjent for alle elevane i denne gruppa. Den andre gruppa var mine eigne elevar, og dei kjende meg særs godt sidan eg hadde undervist dei i R1 også.

I ein intervjusituasjon må ein vere observant på dei asymmetriske maktforholda som kan oppstå (Sollid, 2013). For elevane eg intervjua var eg ei venninnes mor, ein rådgivar og ein faglærar. Det kan vere ein tryggleik for elevane at intervjuaren er nokon dei kjenner. Intervjusituasjonen kan bli mindre skummel enn om ein ukjend person skal gjennomføre intervjua. Intervjua skjedde også på deira arena, på skulen, noko som er med på å trygge situasjonen meir (Sollid, 2013). På den andre sida kan det vere uheldig dersom elevens forhold til læraren er anstrengt. Dersom elev og lærar kjenner kvarandre godt, kan eleven ut frå tidlegare erfaring, tilpasse svara sine ut i frå kva han trur at læraren forventar av svar.

3.9 Metodekritikk

Det er alltid ein del ting ein i etterkant ser at ein kunne gjort annleis. Utarbeidinga av testen vart gjort med utgangspunkt i at eg ville sjå på elevane si forståing av likningsløysing. Den inneheld derfor ulike typar likningar som det vert forventa at ein elev i R2 beherskar. Eg hadde kontakt med ein kollega på ein annan vidaregåande skule for å høyre om dei kunne tenke seg å køyre testen i ei R2-gruppe. Det ville dei hjelpe til med, og testen vart sendt til vedkommande på epost. I mellomtida fekk eg innpass i ei R2-gruppe på eigen skule. Dei hadde ikkje tid til å vente på at eg skulle få tilbake testane i og med at dei skulle starte med eit tema som var relevant for meg, rekker og følger, ganske fort. Eg valde derfor å gjennomføre opplegget med testen slik han var. Dersom eg ikkje fekk noko ut av denne gjennomføringa kunne eg bruke den som pilot i staden for. Testen vart derfor brukt slik han var. Tre veker etter gjennomført undervisningsperiode og intervju med elevar, kom testen i retur frå den andre skulen. Eg såg då mykje det same som eg observerte i mi eiga gjennomføring, nemleg at ein del av oppgåvene gav lite informasjon om det eg ville undersøke. Mykje av elevane sine utfordringar innanfor likningsløysing handla om reknefeil og det å ikkje hugse formlar. Om eg hadde fått piloten tilbake i forkant av gjennomføringa, kunne eg ha erstatta dei oppgåvene som gav meg lite informasjon med andre typar oppgåver. Eg kunne då også vurdert å køyre opplegget i ei anna matematikkgruppe.

Eg har jobba som rådgivar i skulen i over tjue år. I samband med dette har eg hatt tallause samtalar med elevar. Eg føler meg derfor rimeleg trygg i ein intervjusituasjon. Eg har likevel ikkje intervjua elevar direkte om fag slik som eg gjorde i denne oppgåva. Eg vurderte derfor å gjennomføre prøveintervju med ein elev eller kollega, men i og med at gjennomføringa kom litt brått på, valde eg bort dette. I ettertid ser eg at det sikkert hadde vore lurt å gjennomføre prøveintervju. I eit par av intervjua kunne eg vore flinkare til å stille oppfølgingsspørsmål til det eleven forklarte. Under analysen vart eg sitjande igjen med fleire spørsmål som eg ynskte svar på. Dette førte til at eg i ettertid kontakta desse elevane på Messenger for å høyre om dei kunne utdjupe tankegangen sin noko meir.

Eg var inne på tanken å bruke ei kontrollgruppe der denne gruppa fekk tradisjonell undervisning for å sjå om det var nokon forskjell i måten elevane løyste oppgåvene på. Vi har to R2-grupper på skulen vår, på to ulike avdelingar, men den eine hadde berre fire elevar då prosjektet vart gjennomført. Eg vurderte då at samanlikningsgrunnlaget var litt svakt med så få informantar og valde å ikkje bruke kontrollgruppe. Eg kunne sjølvsagt ha kontakta ein annan skule.

Eg kunne også brukt testen noko meir enn det eg har gjort. Eg kunne gjort nokre kvantitative analysar som kunne gitt meg eit breiare grunnlag for oppgåva. På den måten kunne eg då brukt ein kombinasjon av kvantitativ og kvalitativ metode, såkalla mixed methods-studie (Creswell, 2012).

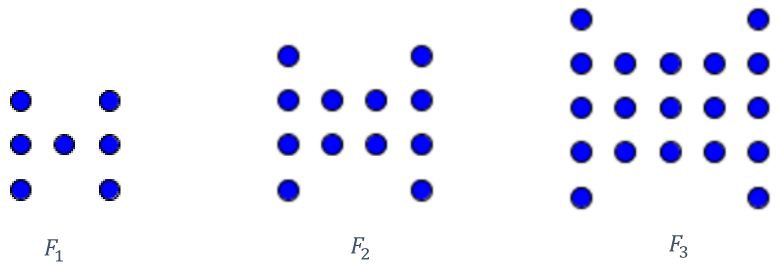
I ettertid har eg reflektert over kva resultat eg kunne fått dersom eg valte å køyre prosjektet i ei anna matematikkgruppe, som til dømes 1P eller 2P. Eg måtte sjølvsagt ha tilpassa testen ut frå deira pensum, men sannsynet er til stades for at eg då kunne fått eit noko annleis resultat rundt det som var mitt opphavelege tema, likningsløysing. 2P har også generalisering av figurmønster som tema, då ofte i samband med regresjon.

4 ANALYSE

I analysen fokuserer eg på oppgåve 4 på testen. Fyrst i analysen tek eg for meg løysingsstrategiane som kom fram på dei to testane. Vidare vert det fokusert på kva som er årsaka til eventuelle endringar i elevane sin måte å løyse oppgåva på.

4.1 Analyse av mønsteroppgåve

Oppgåva som vert analysert, er henta frå eksamen i 2P hausten 2014:



Oskar lagar figurar av runde perler. Ovanfor ser du tre figurar F_1, F_2 og F_3.

a) Følg same mønster, og teikn figuren F_4.

b) Sett opp ein modell som viser kor mange perler det vil vere i figur F_n uttrykt ved n.

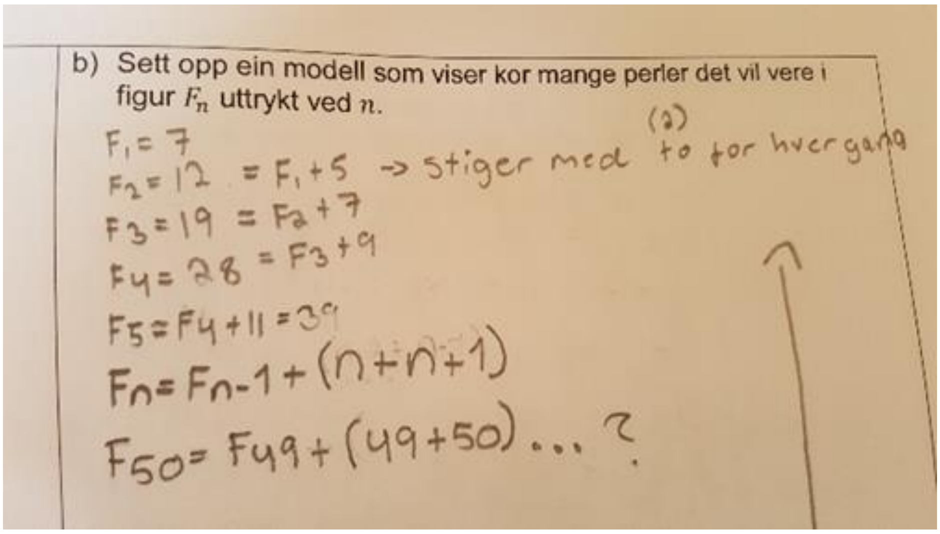
Oskar har totalt 690 perler.

c) Kva er den største figuren av F_n han kan lage?

I oppgåve a) var det lite interessant å hente. Elevane brukte same strategien på dei to testane, og i intervjua hadde dei ikkje noko å tilføre. Oppgåve c) vart løyst rett av dei som klarte å setje opp eit uttrykk for F_n i b). Dei som ikkje klarte dette, hadde heller ikkje løyst oppgåve c). Valet falt derfor på å fokusere på oppgåve b) der dei største endringane vart observerte.

4.1.1 Utvikling innanfor rekursive løysingar

I dette avsnittet ser eg litt nærare på kva Martin gjorde på dei to testane. På figuren under ser vi hans forsøk på løysing på den fyrste testen.



Figur 4.1

81. *L: Kan du sei litt om korleis du tenkte på den fyrste prøven?*

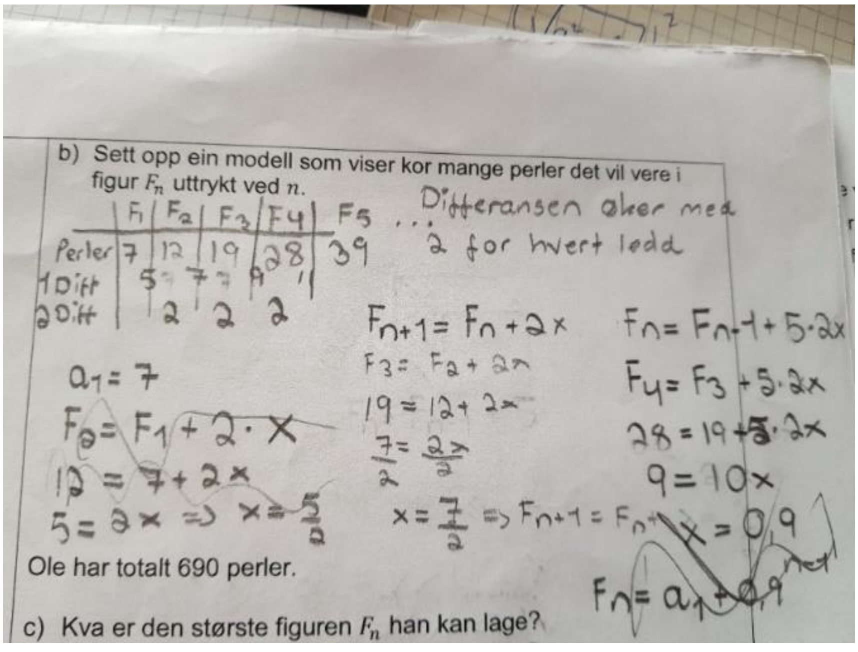
82. *E: Det einaste eg har.....det einaste forholdet eg har hatt til følger og rekker, er at eg hadde hørt om Fibonacci i forbindelse med programmering, så det var litt sånn......ka vett eg, ka kan eg, koss kan eg prøva å beskriva detta med F_n. Så da egentlig bare satte eg inn tallverdier her og ...*

Som figuren over viser, set eleven her opp ei oversikt over talet på perlar i kvar figur. Han startar med $F_1 = 7$ og fortset opp til $F_4 = 28$. For kvar av desse, set han opp ein formel som består av leddet før addert med aukinga i talet på perler frå figuren før. Han ser at $F_2 = F_1 + 5$, der 5 er forskjellen i talet på perler frå figur 1 til figur 2. Han gjer det same for dei 5 fyrste figurane og prøver å finne ein formel for F_n på generell form for : $F_n = F_{n-1} + (n + n + 1)$. Vidare testar han ut om formelen stemmer for n=50 ved å setje det inn i formelen han har funne. Han får då $F_{50} = F_{49} + (49 + 50)$.

Martin bekreftar i line 82 i intervjuet at han prøver seg litt fram, og at han brukar kunnskapane sine frå programmering til å setje opp formlane. Det er tydeleg at han prøver å setje opp eit uttrykk, der han nyttar seg av føregåande ledd for å finne det neste. Dette ser ein til dømes på formelen $F_2 = F_1 + 7$, der ledd nr. 2 vert uttrykt ved hjelp av ledd nr. 1. I tillegg legg han til differansen mellom ledd 1 og 2. Martin nyttar seg her av det Mason (1996) kallar for *addisjonsmetoden.* Ein kan sjå på addisjonsmetoden som ein rekursiv metode, der ein finn neste ledd ved å kjenne igjen og bruke element og endringar frå tidlegare mønster (Mason, 1996). Martin prøver å finne neste ledd i rekka ved å bruke tidlegare ledd som er vist i oppgåva. Han har funne differansane mellom figurane, og brukar desse i uttrykket sitt. Det er ein differanse på 5 mellom figur 1 og 2. Då tek han $F_1 + 5$ for å finne F_2. Dette er også eit kjenneteikn på Lannin (2005) sin ikkje-eksplisitte strategi *rekursiv,* der ein finn ein formel for neste ledd ved å bruke føregåande ledd. Martin klarar også å setje opp eit algebraisk uttrykk for F_n ved hjelp av n, sjølv om uttrykket ikkje er riktig. Dette tyder på at han ser samanhengen mellom variabelen og nummeret på figuren i oppgåva, noko som ifølgje MacGregor og Stacey (1995) er ein føresetnad for å komme fram til ein formel.

Sjølv om Martin set opp eit algebraisk uttrykk der han brukar *n* som variabel, kan han likevel plasserast inn under Radford (2010) sitt lågaste generaliseringsnivå, *aritmetisk generalisering*. Under dette nivået, gjenkjenner eleven ein lokal likskap mellom nokre figurar, men han er ikkje i stand til å bruke dette til å finne eit uttrykk for eit vilkårleg ledd i rekka (Radford, 2010). Martin har funne den lokale likskapen, men kjem ikkje fram til ein formel. Ein kan også sjå at han brukar prøving og feiling når han set inn 49 og 50 for *n* i det siste uttrykket sitt utan å kome fram til ei løysing. Prøving og feiling er ein strategi som ein kan finne under aritmetisk generaliseringsnivå (Radford, 2010).

Martin si løysing på den andre testen er vist i biletet under:



Figur 4.2

Martin forklarar seg slik på spørsmål om korleis han tenkte:

99. *E: ja. Ok, så det første eg såg på var egentlig forskjellen i hvert ledd, kor mange perler er det mellom kver av de. Ehh… fant ut at mellom de to første var den 5, så ble den 7 så ble den 9. Så 2.differansen i kvart ledd var da konstant lik 2. Så prøvde eg egentlig her å finne en rekursiv formel. Men…eller måten eg prøvde å finna den på var jo at ledd nr. 3 var jo ledd nr 2 pluss 5 på den konstante differansen gange antall ledd eg hoppa. Hadde eg fått den ned på arket, så hadde eg sikkert fått rett formel. Men det var den med 5+2 gange antall ledd ville eg tro var løsningen, men det kom eg ikke på før …etterpå.*

Her ser vi at eleven har sett opp ein tabell med verdiar. Han har delt den inn i figurnummer, talet på perler, og funne differansen mellom kvar figur, her kalla 1.diff. Han har deretter funne differansen mellom 1.differansane, og funne at den er konstant lik 2. Denne kallar han 2.diff. Han innfører variabelen x i den rekursive formelen sin, samtidig som han òg brukar n. Det kan sjå ut som Martin prøver å finne ut kva verdi x kan ha. Han set inn tal i formelen sin og kjem fram til tre ulike verdiar for x for F_2, F_3 og F_4. Dernest prøver Martin seg på ein formel for F_n: $F_n = a_1 + 0{,}9$, der han har definert a_1 som talet på perler i fyrste mønsterfigur.

I line 99 i intervjuet forklarar Martin korleis han har tenkt. Han stadfester at han har starta med å finne endringa i kvart ledd. Dette har han brukt til å prøve å finne ein rekursiv formel $F_{n+1} = F_n + 2x$. Vidare forklarar han korleis han har tenkt då han sette opp formelen. Han brukar leddet som kjem framfor leddet han skal finne, og legg til den konstante differansen 2 multiplisert med x. Martin seier at han ikkje klarte å setje opp det uttrykket han eigentleg hadde tenkt. Han meiner òg at han trur han hadde funne løysinga dersom han hadde klart å få dette ned på papiret. Denne løysinga er ikkje rett, og det viser at Martin framleis slit med å forstå korleis han skal gå frå eit aritmetisk uttrykk til eit uttrykk med alfanumeriske symbol. Dette stemmer overeins med det som MacGregor og Stacey (1995) skriv at eleven ofte ikkje er i stand til å skrive den funksjonelle samanhengen som ei likning, sjølv om dei kan observere denne samanhengen.

På test to systematiserer Martin informasjonen litt annleis enn på den fyrste testen. Sjølv om Martin framleis tenkjer rekursivt, har han no ei litt anna tilnærming i løysinga si. På begge testane har han sett at differansen aukar med to for kvar gong, men på den siste testen set han det opp på ein annan måte. Han set opp ein tabell der han har rader for talet på perler, 1.differanse og 2.differanse. På den fyrste testen sette han opp formlar for kvar figur der dette vart illustrert. Dersom ein går inn og ser på ordbruken til Martin, brukar han no ord som rekursiv formel, 1.differanse og 2.differanse. Dei to sistnemnde brukar han òg i svaret sitt i samband med tabellen han har sett opp.

I intervjuet vert Martin spurt om kva det er som gjer at han tenkjer litt annleis no.

114. *L: På den første prøven. Så tenkte du på den måten der (peikar på test 1). Ka er det som er annerledes nå på den andre testen, i forhold til den første testen?*
115. *E: For det første så har me lært litt om følger og rekker….så det endre jo litt tankegangen.*
116. *L: Men på kartleggingstest nr. 2 har du satt opp en tabell med differanser. Det. har du ikkje gjort på test nr. 1.*
117. *E: nei*
118. *L: Kor tid lærte du det?*
119. *E: Det lærte eg, eg vett ikke ka for ein time det var, men det var under opplegget. Når me hadde om denne typen oppgaver.*
120. *L: Mhm. Ken var det som hadde denne ideen da?*
121. *E: Eh…. sånn sett, Thomas kom jo på at 2.differansen var heilt lik. I kvert ledd. Men eg huske ikke om han satte opp tabellen slik som dette.*
122. *L: Han gjorde det.*
123. *E: Ja. Det var lurt.*

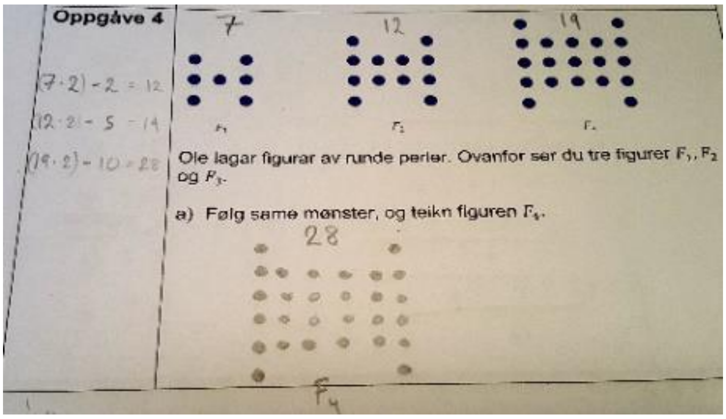
Martin seier i line 115 at det å lære meir om følger og rekker har vore med på å endre tankegangen hans. Han seier ikkje noko om på kva måte han har lært dette, anna enn i line 119 der han seier «…under opplegget…». Han hugsar likevel kven som hadde ideen, nemleg Thomas, men han kan ikkje hugse korleis oppsettet hans var. Det kjem heller ikkje fram i intervjuet kva Thomas sa i samband med dette. Det kan altså tenkjast at Martin har hatt noko utbytte av måten å jobbe på, men ein kan ikkje konkludere ut i frå det som kjem fram i intervjuet etterpå.

Utviklinga til Martin er ikkje veldig stor, men han systematiserer løysinga på ein litt annan måte. Dersom ein ser på spiralen til Mason, Graham og Johnston-Wilder (2011), kan ein seie at han har kome litt lenger i *artikuleringsfasen*. Martin klarar å formulere med ord korleis mønsteret oppfører seg. Han har endra språkbruken sin litt til å bli meir matematisk. *Artikuleringsfasen* er ein prosess der ein kan utvikle språkbruk og nærme seg bruk av symbolske uttrykk (Mason et al., 2011). Martin brukar symbolske uttrykk, men han blandar n og x i same modell. Likevel kan ein tolke det slik at Martin ser ein samanheng mellom n og figurnummeret, men han skjønar ikkje at det berre skal vere ein ukjent i modellen. Martin brukar framleis *addisjonsmetoden* (Mason, 1996) og prøver å finne ein rekursiv formel, som i følgje Mason (1996) er ein lokal regel der ein brukar ein startverdi, ofte fyrste ledd i rekka, for å finne neste ledd i rekka. Han brukar det Stacey (1989) kallar *nær-generalisering*, som handlar om å bruke ei teikning eller å telje seg fram til neste ledd i rekka. Martin fjernar seg frå det Küchemann (2010) seier er målet med mønsteroppgåver, nemleg å sjå strukturen mønsteret er bygd opp av. Martin ser ikkje denne strukturen i mønsteret. Han er også innom Lee (1996) sitt *symboliseringsnivå* som handlar om å uttrykke ei formell løysing med t.d. n. Dette kan vere både rekursive og eksplisitte løysingar. Martin brukar n og til og med x i sin formel, men han kjem ikkje i mål. Han ligg framleis på det lågaste generaliseringsnivået til Radford (2010), *aritmetisk generalisering*.

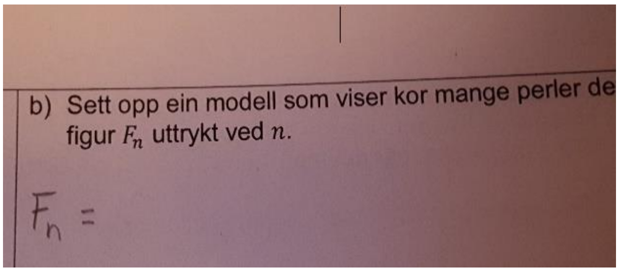
Martin seier sjølv at han har lært noko og at det skjedde under opplegget. Han viser til at ein medelev hadde vist at 2.differansen var lik. Den sentrale ideen bak Five Practices (Smith & Stein, 2011) er at elevar deler sine idear med kvarandre. Eg kan likevel ikkje trekke nokon konklusjon om kva utbyte Martin har hatt av arbeidsmetoden ut frå det Martin seier i intervjuet. Martin var vekke frå den eine økta der vi jobba med generalisering av mønster, men det er umogleg å seie noko om han hadde kome eit steg lenger dersom han hadde deltatt i begge øktene.

4.1.2 Utvikling frå rekursive løysingar til eksplisitte løysingar

Det fyrste dømet i dette kapittelet er henta frå Pernille si løysing på den fyrste testen.



Figur 4.3



Figur 4.4.

85. *L: Korleis har du tenkt her?*

86. *E: Eg teikna først F_4 og telte at den hadde 28 kuler. Så skulle eg prøve å finne eit mønster da, men eg ante liksom ikkje koss eg skulle gjør det.*

87. *L: Men eg ser at du har satt opp noen reknestykke her (peikar på a))*

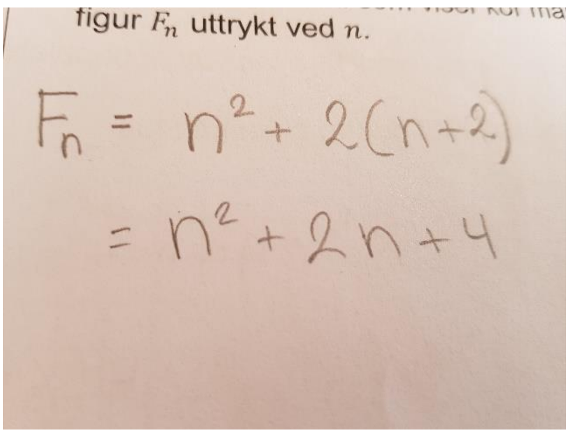
89. *E: Ja…mmm… eg tror bare eg har prøvd å ganga antall prikkar i dei forskjellige figurane med to og så sjå ka eg måtte trekka frå for å få neste figur. Men det hjalp meg ikkje til å finne no mønster.*

Pernille har skrive talet på prikkar over kvar figur. I margen til venstre ser vi at ho har sett opp tre reknestykke, $(7 \cdot 2) - 2 = 12$, $(12 \cdot 2) - 5 = 19$ og $(19 \cdot 2) - 10 = 28$. Ho multipliserer altså talet på prikkar i kvar figur med 2, og trekkjer frå det talet ho må for å få rett tal på prikkar i neste figur. Ho brukar så det ho veit frå det visuelle i oppgåva, talet på perler i neste figur, for å finne ein differanse.

Pernille prøver her å setje opp ein rekursiv samanheng, og prøver å finne eit mønster ut frå dette. Ho brukar det Lannin (2005) kallar for *heil-objekt* der ein brukar ei mindre eining for å skape ei større eining ved å bruke multiplikasjon. Her kan det vere rom for justering dersom ein får for mykje eller for lite (Lannin, 2005). At Pernille tenkjer slik, vert bekrefta i line 89 i intervjuet. Reknestykka visar at ho tek utgangspunkt i føregåande ledd for å finne det neste, i og med at ho multipliserer talet på prikkar i figuren før med to for å finne neste figur. Lannin (2005) sin heil-objekt-strategi er plassert under eksplisitt kategori, men Pernille klarar ikkje å finne noko felles som kan hjelpe ho med å setje opp ein eksplisitt formel. Eg har derfor valt å kalle Pernille sin strategi for *dobling med justering.* Ho multipliserer konsekvent talet på prikkar i føregåande figur med to i kvar likning ho set opp. Reknestykka til venstre i biletet over, kan vi skrive som $F_1 \cdot 2 - 2$, $F_2 \cdot 2 - 5$ og $F_3 \cdot 2 - 10$. Ho ser at det ikkje er nok å multiplisere med 2, for det gir ho ikkje talet på prikkar i neste figur. Pernille vel derfor å justere ved å trekke frå dei overskytande prikkane i kvart reknestykke.

Pernille sitt forsøk på løysing er i utgangspunktet reint aritmetisk. Ho prøver likevel å setje opp ein modell sjølv om ho ikkje brukar det algebraiske språket. Ho reknar ut konkrete tilfelle av variablar (figur nr. 2, 3 og 4), i tillegg til at ho brukar strategien *dobling med justering.* Pernille klarer ikkje å sjå korleis mønsteret utviklar seg. Samtidig viser ho forståing for at hennar strategi ikkje førte ho noko nærare ei løysing, noko ho gir uttrykk for i line 89 i intervjuet. Pernille kan også plasserast inn i Radford (2010) sitt lågaste generaliseringsnivå, *aritmetisk generalisering*, som handlar om at eleven gjenkjenner ein lokal likskap utan å vere i stand til å bruke dette til å finne eit uttrykk for kva for eit vilkårleg ledd i rekka. Strategien hennar har element av prøving og feiling, ein strategi som ein ofte kan finne i kategorien til Radford (2010). Sjølv om Pernille ligg på aritmetisk generaliseringsnivå, kan ein sjå teikn til at ho beveger seg mot eit brytningspunkt mellom *aritmetisk generalisering* og *faktabasert generalisering* som er Radford (2010) sitt lågaste nivå innanfor algebraisk generalisering. På dette nivået legg tankane som kjem fram her, eit grunnlag for at eleven kan utvikle seg innanfor algebraisk resonnering. Pernille uttrykkjer i intervjuet at ho ser at strategien dobling med justering ikkje fører ho til ei mønster som kan hjelpe ho til å finne eit uttrykk for eit vilkårleg ledd i rekka.

Pernille viser god utvikling frå den fyrste til den andre testen:



Figur 4.5

94. *L: Kan du forklare meg koss du har komt fram til denna løsningen?*

95. *E: Ja.. ehm.. først så tenkte eg ..på det med atte inne i der så var det kvadrattall og at den formelen var n^2. Åsså…huska eg formelen for …rektangel var vel n+1, så prøvde eg egentlig først med n+1 da, men då såg eg at det blei feil, eg bare prøvde å regne ut for for eksempel F_3 da eller F_4 for å sjå eg fekk rett svar da, men det funka ikke så da tenkte eg jo … at då måtte det sannsynligvis være n+2 og det…eh….ja….så prøvde eg meg bare fram til eg fant den da, og så såg eg jo at det ga litt meining og da, når eg var ferdig med å gjør det. At eg då kunne se at det passa.*

Pernille har sett opp to variantar av same modell $F_n = n^2 + 2(n+2) = n^2 + 2n + 4$.

Pernille beskriv i line 95 i intervjuet korleis ho isolerer kvadratet i midten og finn ein formel for den. Ho koplar figuren i midten til kvadrattal, som ho veit har formelen n^2. Eg har valt å kalla denne strategien for *kvadratmetoden.* Vidare i same utsegn kjenner Pernille igjen det ho kallar for «rektangel». Eg er litt usikker på kva Pernille meiner med rektangel i denne samanhengen, men slik forklaringa hennar er, oppfattar eg at det er «beina» på kvar side av kvadratet ho beskriv her. Pernille prøver å finne ut om dette kan stemme ved å sette inn tala ho kjenner for figur 3 og 4 og finn ut at det ikkje stemmer. Ho prøver då med $n+2$, og finn at det stemmer. Her brukar ho det Lannin (2005) kallar for *gjett og test,* som handlar om å teste ut ein formel med ulike tal og operasjonar ein kan få ut av oppgåvekonteksten. I intervjuet kjem det ikkje fram at ho multipliserer $n+2$ med 2, men løysinga hennar viser at ho gjer dette. Ho klarar òg å setje opp ein eksplisitt modell for F_n. Pernille ser her ein struktur i mønsteret, noko Küchemann (2010) meiner vil gje eleven auka kompetanse i å finne ein strukturert generalisering framfor ein empirisk formel. Ho kan også plasserast under Lee (1996) sitt *symboliseringsnivå* som handlar om å uttrykkje ei formell løysing ved bruk av til dømes *n* som variabel. Pernille brukar *n* som variabel i sin modell.

Pernille viser her ei god utvikling frå før-test til etter-test. Frå å ikkje klare å løyse oppgåva, og eigentleg ikkje vite korleis ho skal gripe den an, til å klare å finne ein modell som gjeld generelt for alle figurar. I intervjuet vart Pernille spurt om ho kunne fortelje kvifor ho tenkte annleis på den siste prøven

105. *L: Ka er det som er grunnen til at du nå har komt fram til et svar, og ka tenke du annerledes nå?*

106. *E: mmmm….først og fremst at du kan dele de opp da. ..i forskjellige deler…*

107. *L: figuren tenker du da?*

108. *E: Ja. At det var ein som var kvadrattall åsså andre talla kommer i tillegg. Åsså er det nok bare at me har jobba med sånne oppgaver, så da har eg lært av det trur eg.*

I line 106 forklarar Pernille at det ho tenkjer annleis no, er at ho kan dele figuren opp i ulike delar. I line 108 presiserer ho korleis ho deler opp figuren. Ho beskriv at ho kjente igjen kvadratet i midten og koplar det til omgrepet kvadrattal. I line 108 svarar ho også på spørsmål om kva som er grunnen til at ho no er komen fram til eit svar. Pernille trur at å jobbe med slike oppgåver har hjelpt ho med å få auka forståing. Ho seier ingenting om på kva måte ho har jobba med liknande oppgåver. Vidare i intervjuet kjem vi innpå det som skjedde i timen då dei jobba med desse oppgåvene.

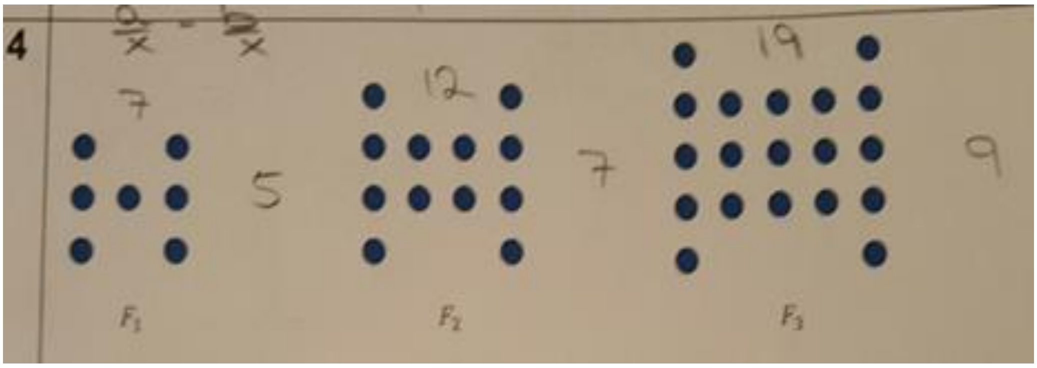
111. L: Husker du ken som kom med ideen, at ein kunne dele det opp?
112. E: Eg trur det var Krister kanskje så sa det
113. L: Husker du ka han sa i den forbindelsen?
114. E: Nei ikkje akkurat ka han sa da, men eg huske bare han tegna ein strek og så kunne du tenke at det under streken var kvadrattall og det andre var rektangel så fant han de formlane da. Så var det jo bare å plusse det.

Pernille kjem her med ei interessant framstilling av korleis ho kan ha fått ideen om å dele opp mønsteret. I line 112 seier ho at ho trur at det var Krister som kom med ideen om å dele opp figuren. Krister og Pernille var på same gruppe då dei jobba med desse oppgåvene. Ho hugsar ikkje kva han sa, men i line 114 beskriv ho kva han gjorde. Ho har altså ikkje fanga opp ideen frå læreboka eller frå læraren.

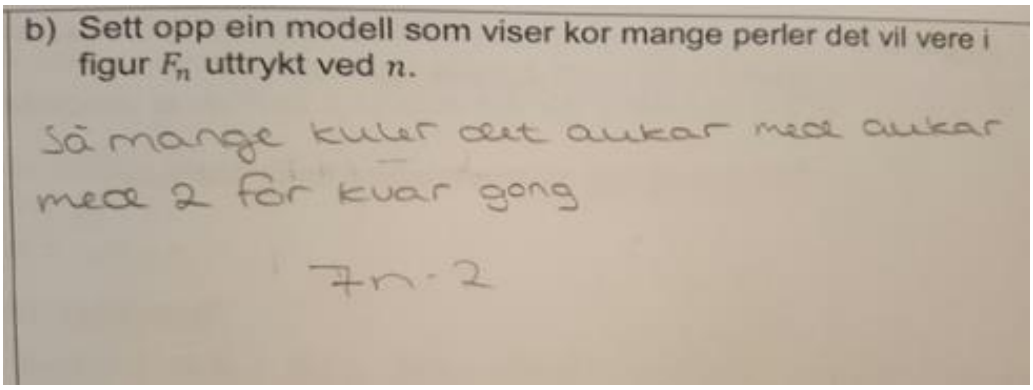
På den fyrste testen klarte ikkje Pernille å setje opp ein modell. Ho sette opp ei likning for kvar figur, der ho brukte strategien *dobling med justering*. Ho dobla talet på perler i leddet framfor og justerte med ein differanse, slik at ho fekk rett tal på perler i neste figur. Sidan denne differansen var ulik for kvar likning, klarte ho ikkje å finne nokon fellestrekk som kunne hjelpe ho til å finne eit mønster. På den andre testen klarar ho å finne ein struktur i mønsteret, noko Küchemann (2010) meiner er målet med mønsteroppgåver. Ho brukar no strategien *kvadratmetoden.* Pernille har flytta seg frå Radford (2010) sin kategori aritmetisk generalisering til det høgaste generaliseringsnivået han opererer med, *symbolsk generalisering*. *Symbolsk generalisering* handlar om at eleven klarar å bruke alfanumeriske symbol og er i stand til å beskrive formelen både med munnleg og skriftleg (Radford, 2010). Pernille klarar å beskrive med ord korleis ho tenkjer og ho uttrykkjer formelen med alfanumeriske symbol.

På den andre testen har Pernille nytta seg av den same strategien som medeleven hennar har vist ho. Dette er ein klar indikasjon på at ho har lært noko i prosjektperioden. Det er også ein indikasjon på at ho har lært det av medeleven sin. Det er likevel ikkje grunnlag for å seie at det er sjølve undervisningsmetoden som er årsaka til at ho har lært.

Det neste dømet viser Ingunn si løysing på før-testen.



Figur 4.6



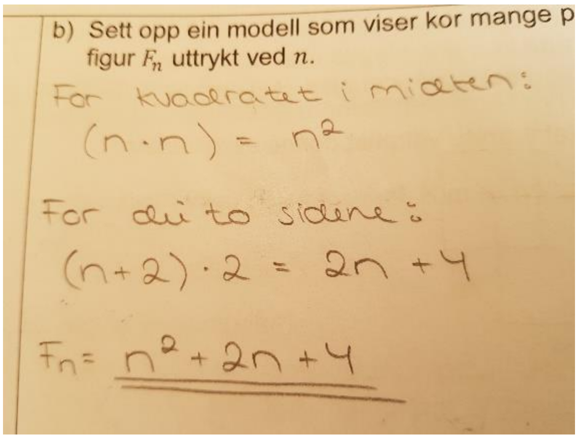
Figur 4.7

21. *L: Her er det du gjorde på den fyrste testen.*
22. *E: Eg tenkte jo at det måtte ha nåke med n å gjer, eg skjønte jo det, men eg ante ikkje koss eg skulle sette det opp. Eg visste ikkje heilt ka ein modell var på ein måte, ka det var snakk om.*

I svaret på b) skriv Ingunn at «…det aukar med 2 for kvar gong.» Dersom ein ser på notata eleven har gjort i a), ser ein at ho har notert ned kor mange perler det er i kvar figur, samstundes som ho har funne differansen frå figur til figur. Denne differansen aukar med to for kvar gong. I tillegg ser me at ho har notert talet 7 over figur 1 i biletet til venstre. I b) har eleven skrive opp formelen $7n \cdot 2$.

Ingunn prøver å finne ei endring frå figur til figur som kan gje ho ein formel for neste figur. Ho brukar det visuelle, figurane gjevne i oppgåva, til å finne differansane mellom dei. Eg har derfor valt å kalle strategien hennar for *finne differansen.* Ho legg merke til ein likskap mellom figurane, «…det aukar med 2 for kvar gong», men ho klarar ikkje å setje det inn i ein samanheng. For å finne differansen mellom figurane, har Ingunn funne talet på perlar i kvar figur. Ho har då nytta seg av Lannin (2005) sin ikkje-eksplisitte strategi *teljing* som går ut på at ein brukar ei teikning som utgangspunkt for å kunne telje ein ynska eigenskap. Teikninga av figurane er gitt i oppgåva, og ho treng derfor berre å telje perlene. Ingunn ser heller ikkje kor n kjem inn i biletet, sjølv om ho i line 22 gir uttrykk for at ho forstod at den hadde noko med saka å gjere. Ingunn viser lite forståing for korleis ho kan løyse oppgåva, noko ho òg gir uttrykk for i line 22 i intervjuet. Ingunn kan plasserast i det Radford (2010) kallar for *aritmetisk generalisering*. Dette går ut på at elevane klarar å finne fellestrekk og kjenne igjen likskap mellom elementa i eit mønster utan at dei klarar å bruke informasjonen vidare til å finne eit eksplisitt uttrykk (Radford, 2010). Ingunn har oppdaga likskap mellom elementa når ho seier at mønsteret aukar med to for kvar gong. Ho klarar likevel ikkje å bruke dette når ho skal prøve å setje opp eit uttrykk for figur F_n.

Ingunn viser god utvikling frå før-test til etter-test:



Figur 4.8.

25: *L: Her er løysinga di på test 2. Kan du forklare korleis du har tenkt her?*

26: *E: eeeehh…ja. Det var jo at me hadde jo gått gjennom sånn derre, på en måte sånne figurer for kvadrat og rektangel og sånn. Og så såg eg mykje lettere koss mønsteret økte. og sånn den her gongen enn sist, då skjønte eg ingenting, men nå såg eg at det økte med, var det….2 stk her liksom på kvar sida eller kvar gang, og ..ja..det var en dårlig forklaring hehe, men men, ja…..koss var det eg tenkte da? JO, jo eg tenkte atte*

F_3, då var det tre kuler, 3 ganger 3 kuler i kvadratet og då måtte det på F_4 og være 4 ganger 4 liksom. Og at de på, de radene på sida, økte med to da. Eller ein på kvar rad og då blir det to til saman. Eh…så då tenkte eg først å så jobba med kvadratet inni, og då såg eg at det var lik n ganger n altså n^2. Og så plussa eg på de to sidene og de såg eg at og var, liksom, lik n, for eksempel 3 da pluss 2. Ja også ganger 2 da. Slik at det blir $2n + 4$. Så summerte eg bare.

På biletet over viser løysinga til Ingunn at ho har delt opp figuren i to deler, kvadratet i midten og dei to rekkene på kvar side. Ho viser at kvadratet har formelen n^2, og at kvar side har formelen $n + 2$. Deretter multipliserer ho den med to. Til slutt legg ho saman dei to delane og får ein eksplisitt formel for F_n.

Ingunn forklarar i line 26 i intervjuet at ho tok for seg kvadratet i midten fyrst. Her observerer ho at figur 3 har $3 \cdot 3$ kuler i kvadratet og at då må figur 4 har $4 \cdot 4$ kuler i kvadratet. Observasjonen hennar her er at figurnummer og talet på perler i sidene på kvadratet er det same. Ho set ord på dette i utsegna 26 i intervjuet. Ingunn seier vidare: «Og så plussa eg på de to sidene og de såg eg at og var, liksom, lik n, for eksempel 3 da pluss 2. Ja også ganger 2 da. Slik at det blir $2n + 4$». Dette er nok eit døme på at ho har sett samanhengen mellom figurnummer og talet på perler. I følgje MacGregor og Stacey (1995) er det ei føresetnad å sjå den funksjonelle samanhengen mellom to talpar for å kunne setje opp ein formel.

I intervjuet seier Ingunn kva ho tenkjer annleis no enn sist.

39. E: Kanskje litt meir at ein deler det opp litt. At ein tar ein ting om gangen. Og…litt det atte, på en måte, at eg skjønte litt betre ka n faktisk skulle vær da. At det måtte ha noke med saken å gjer litt meir. Så. Ja. Eg hadde ein betre forståelse for ka en modell var på en måte, for her visste eg ikkje heeilt ka det sku vær på en måte eller ka det var snakk om, men det visste eg nå andre gangen da.

40. L: Koffor tenker du annerledes?

41. E: Eh, det er fordi at me har gått igjennom, gått igjennom det, at det her var noke eg ikkje hadde vært borti før, eller eg har kanskje vært borti det før, men eg huska det ikkje. Og så når vi repeterte det da så, eh…eller lærte det så, ja, så lærte eg det liksom. Ja.

I line 39 seier ho at ho har lært å dele figuren opp i fleire delar. Denne tankegangen vert støtta av Küchemann (2010). Elevane vil få auka kompetanse i å bruke oppgåver eller døme dei har sett før om ein fokuserer på å finne strukturen i eit mønster (Küchemann, 2010). Ingunn viser i line 39 at ho har ei større forståing for kva *n* stod for. I løysinga si viser ho tydeleg at ho ser samanhengen mellom figurtalet og n i formelen, noko ho ikkje gjorde på den fyrste testen. Vidare gir ho i intervjuet uttrykk for at ho no forstår kva ein modell er. Dette kjem også tydeleg fram i løysinga hennar på test 2. På spørsmålet mitt i line 40 om kvifor ho tenkjer annleis, svarar ho i line 41 at «..me har gått gjennom det» og «..når vi repeterte det». Dei jobba i grupper med denne typen oppgåver, det var ingen gjennomgang på tavla i forkant av oppgåveløysinga. Ein får eit litt anna innblikk i dette når ho forklarar på kva måte ho har lært det.

50. *E: Eg har jo lært at du på ein måte skal se etter …ja se etter sånne faste mønster som er lette å beskriva kanskje, eller sånn, ja se etter kvadrat og se etter rektangel liksom, og ikkje gjer det vanskelegare enn det det er..kanskje..eh..ja..og så har eg jo lært liksom å sette opp en sånn modell da. At det gjekk me jo gjennom så..*
54. *L: Hugsar du kven som hadde ideen først på den?*
55. *E: eh…nei. Hehehee, men eg tipper det var Mathias hehehe.*
56. *L: hehehe. Huske du kan han sa da?*
57. *E: Ja eller eg var jo med på gruppa med han og då såg han liksom det at det auke med eller,… men då var det jo en litt aen modell da, men då var det liksom det at det økte med 1 og,…..og sånt da, så huske eg ikkje akkurat ka det var han sa da men, eg trur det var det han så kom på det. Det var i alle fall han så viste meg det da, sånn at eg forstod det litt betre.*

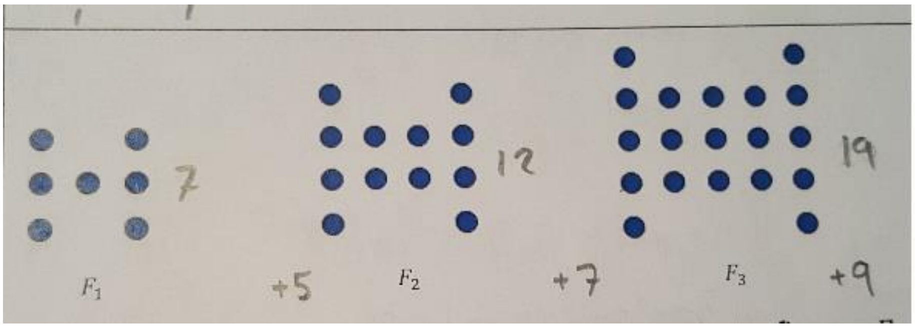
I line 55 viser ho til at ho meiner det var Mathias som hadde ideen. Ingunn hugsar ganske godt kva Mathias gjorde, noko ho beskriv i line 57. Ho hugsar ikkje nøyaktig kva han sa, men i slutten av line 57 seier ho at ho forstod det betre etter at Mathias hadde vist ho korleis ho kunne dele opp ein figur for å sjå eit mønster. Ingunn har brukt den same strategien som Mathias har vist ho i løysinga si på test to.

På den fyrste testen visste ikkje Ingunn heilt korleis ho skulle gripe an oppgåva. Ho fann differansane mellom dei ulike figurane i oppgåva, men ho såg ikkje noko mønster ho kunne bruke til å finne ein formel. Ho visste heller ikkje kor n kom inn i biletet. No ser ho tydeleg at det er samanheng med figurnummeret og talet n. I tillegg har ho oppdaga eit mønster og klarar å generalisere dette slik at ho finn ein eksplisitt formel som gjeld for alle figurer. Ingunn har flytta seg frå den rekursive strategien *finne differansen,* til den eksplisitte kategorien *kvadratmetoden.* Ho klarar no å sjå strukturen i mønsteret, noko som både Küchemann (2010) og Wilkie og Clark (2016) meiner ein bør leggje vekt på i arbeidet med figurmønstre og generaliseringar. Ingunn kan plasserast inn i Lee (1996) sitt *symboliseringsnivå* som handlar om å bruke t.d. n til å representere ein eller fleire variablar.

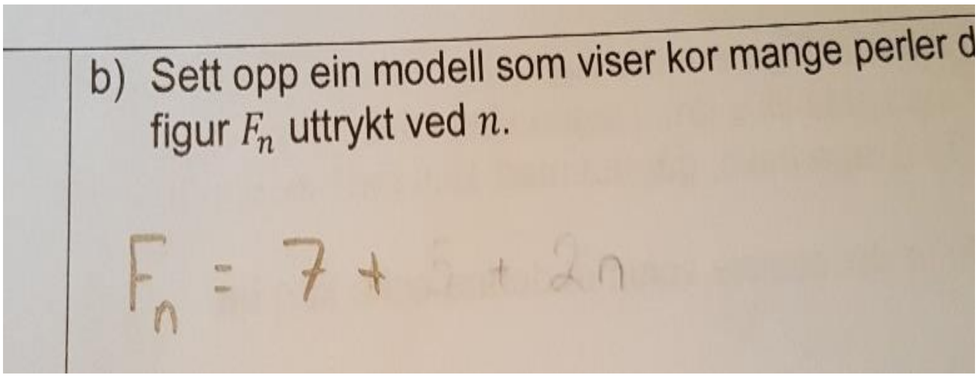
Ingunn brukar *n* for figurnummeret i formelen. Vidare har Ingunn no nådd eit algebraisk generaliseringsnivå og kan plasserast innanfor det Radford (2010) kallar *symbolsk generalisering*. Ho finn fellestrekk i mønsteret, ho ser samanhengen mellom figurnummeret og variabelen n, samtidig som ho beherskar det algebraiske semiotiske språket. Ho klarar også å forklare det munnleg. Alle desse faktorane er kjenneteikn på *symbolsk generalisering* (Radford, 2010)

Ingunn har fått utvikla sin kompetanse innanfor figurmønster og generaliseringar i løpet av prosjektperioden. Ho klarar ikkje heilt å setje ord på kva måte dei jobba på, anna enn at ho seier at det vart repetert og gått gjennom. I intervjuet kjem ho derimot med ganske klare indikasjonar på at ho har lært av medeleven Mathias som ho jobba saman med på gruppe. Vidare set ho ord på kva ho har lært, nemleg å dele mønsteret opp i ulike deler og ikkje gjere det meir vanskeleg enn det er. Sjølv om ho ikkje hugsar heilt kva Mathias sa, så hugsar ho korleis han gjorde det. At medelevar viser kvarandre ulike løysingsstrategiar er den sentrale ideen ved Five Practices (Smith & Stein, 2011). Dette kan skje både i gruppearbeidet og når elevane viser og forklarar sine strategiar på tavla. Resultata på dei to testane og intervjuet med Ingunn, er eit tydeleg teikn på at ho har lært noko i prosjektperioden. Ein får også i intervjuet ein indikasjon på at ho har lært av medeleven sin. Likevel kan ein ikkje på bakgrunn av dette seie at det er Five Practices (Smith & Stein, 2011) som er årsaka til hennar endring.

Den neste eleven eg tek for meg her, er Oskar. Hans forsøk på løysing på før-testen, liknar litt på det Ingunn gjorde.



Figur 4.9.



Figur 4.10.

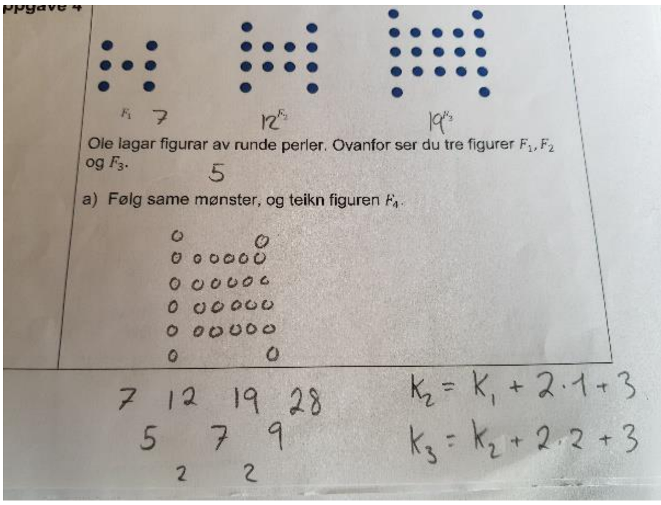
39. *L: På den fyrste testen…*
40. *E: Der hadde eg ikke peiling. For da hadde me så vidt hatt om det. Og da var eg ikke heilt inne i den.*
41. *L: Eg ser du har viska ut noke her. Hugsar du korleis du tenkte?*
42. *E: Tenkte kanskje noke rundt at eg plusser på 5 for kver gang, men i tillegg 2 for kver figur viss du forstår. Så første figur, da er n=0, andre figur er n=1 og så videre. Men det passa ikke heilt, så då viska eg det ut sannsynligvis.*

På figur 4.9 kan ein sjå at Oskar har sett opp talet på perler ved sida av kvar figur. Han har også skrive ned differansen mellom figurane der han har funne at det er 5 mellom dei to fyrste figurane, 7 mellom dei to neste, og han har konkludert med at det då må vere 9 mellom figur 3 og 4. På biletet til høgre har han prøvd å setje opp ein modell $F_n = 7 + \cdots$. Dersom ein ser nøye etter, kan ein sjå at han har viska ut $\ldots + 5 + 2n$..

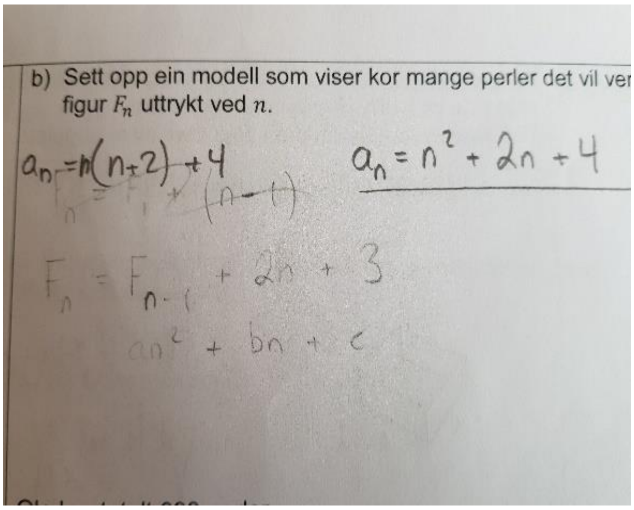
Oskar finn at differansen mellom figur 1 og 2 er 5, mellom figur 2 og 3 er den 5+2 og mellom figur 3 og 4 er den 5+4. Ut frå det han seier i line 42 i intervjuet over, kjem han fram til 5+2n i formelen som han viska ut. Han har observert ein likskap mellom mønstra, at det aukar med to for kvar figur. Han brukar strategien eg har valt å kalla *finne differansen.* Utsegna i line 42 tyder på at han ikkje ser heilt samanhengen mellom F_n og n, i og med at han set $n =$

0 for første figur og $n = 1$ for andre figur. Å sjå samanhengen mellom F_n og n er i følgje MacGregor & Stacey (1995) ei føresetnad for å kunne finne eit eksplisitt uttrykk. Oskar ligg i grenseland mellom *aritmetisk* og *faktabasert generalisering* (Radford, 2010). Han klarer å finne likskap mellom figurane i mønsteret i og med at han ser at mønsteret aukar med to for kvar figur. I tillegg prøver han seg fram med å setje inn verdiar for n for å sjå om formelen hans stemmer. Dette kan definerast som *prøving og feiling*, ein strategi som kjem inn under Radford (2010) sin kategori *aritmetisk generalisering*. Oskar er likevel komen litt lenger i og med at han har prøvd å setje opp eit eksplisitt uttrykk for F_n. Han brukar kjennskapen til fellestrekka når han prøver seg fram. Dette kan tendere til *faktabasert generalisering*, der tankane som kjem fram i denne fasen, kan danne eit grunnlag for vidare tenking og utvikling innanfor algebraisk resonnering (Radford, 2010)

Bileta under viser Oskar si løysing på etter-testen:



Figur 4.11.



Figur 4.12.

Her forklarar han korleis han har tenkt:

50. *E: Eh..ja. Det eg tenkte var atte den består jo på ein måte av ett….rektangel…som eh.. satt inn med tre i bredden sånn ….sånn at den blir fire i bredden og to opp, fem i bredden tre opp…sånn at han øke med ein kver retning for kver når han blir større, men så har du jo de på utsiå da, men de er jo alltid fira, alltid fira på kvert …ett i kvert hjørna da av rektangelet sånn at me kan bare plussa på de fira og for å få …den derre…….eh……ja for å finna ein formel for et rektan..eller det rektanglet da, så tenkte eg atte du har jo en n åssȧ e n blir da høyden og så blir bredden $n + 2$ siden den er 2 lenger, den blir ein i høyden tre i breidden, to i høyden og 4 i bredden så er det alltid liksom to lenger da. Og når du tar arealet av et rektangel så er jo det lengde ganger bredden, så er det lengden ganger bredden, så*

ganger det ut og så tar du selvfølgelig pluss 4 da som er de på hjørnene. Og så bare ganger de ut, så fikk eg $n^2 + 2n + 4$.

Oskar har delt opp figuren i eit rektangel og dei fire kulene på yttersidene. Funksjonen han har funne, har han kalla a_n i staden for F_n. Formelen han har funne er $a_n = n^2 + 2n + 4$. I biletet til venstre har han notert ned ein tabell med differansar. I tillegg har han sett opp to formlar: $k_2 = k_1 + 2 \cdot 1 + 3$ og $k_3 = k_2 + 2 \cdot 2 + 3$.

Oskar fortel i line 50 at han skilde ut rektangelet fyrst. Her beskriv han korleis rektangelet endrar seg frå figur til figur. Den fyrste figuren har tre i breidda, den neste aukar med ein i breidda og høgda, og han konkluderer i same utsegn med at det skjer ei auke med ein i kvar retning frå ein figur til neste. Vidare fortel han at dei fire kulene alltid er der, dei er konstante, og at ein berre kan plusse dei på til slutt i formelen. Her har Oskar observert eit mønster. Han brukar strukturen i figuren og deler den opp i to separate deler, eit rektangel og dei fire kulene i kvar ende av figuren. Oskar brukar strategien eg har valt å kalle *rektangelmetoden.* Oskar har no klart å finne eit eksplisitt uttrykk som gjeld for eit vilkårleg ledd i rekka. Vidare klarer å han å beskrive med ord korleis mønsteret endrar seg frå figur til figur når han i line 50 seier at «*…så tenkte eg atte du har jo en n åsså e n blir da høyden og så blir bredden $n + 2$ siden den er 2 lenger, den blir ein i høyden tre i breidden, to i høyden og 4 i bredden så er det alltid liksom to lenger da.*». Her brukar han også symbolet *n* i forklaringa si. Dette viser at han tydeleg ser samanhengen mellom figurnummeret og *n* som variabel, og han oppfyller dermed MacGregor og Stacey (1995) si føresetnad om å sjå ein funksjonell samanheng for å kunne setje opp eit formelt uttrykk.

På spørsmål om kvifor han tenkjer annleis no, seier Oskar:

81. E: det er jo fordi me har gått gjennom det, og at det liksom, eg trenger litt tid på åsså lære det på ein måte. Og når eg kan det så,..ofte så kan eg det liksom…da vett eg koss eg skal tenka. Og så hadde me jo sånn, det som dei gjorde at det var fleire som hadde delt opp dei forskjellige, sånn som når vi hadde den derre, (henviser til ei oppgåve)….eit rektangel der og to kvadrat så deler du enda meir opp og så tar du 2 ganger det kvadratet da,…begynte å tenke litt sånn i stedet for da åsså…såg eg at det kunne bli sånn

Her seier Oskar at «…me har gått gjennom det….» og at «..eg trenger litt tid på åsså lære det på ein måte». Han viser og i line 81 til løysingsstrategiar som kom fram i timen då elevane presenterte sine strategiar på tavla etter gruppearbeidet. Ein av strategiane som kom fram, var korleis ein kunne dele figuren opp i fleire delar og så setje desse delane saman til ein formel. Oskar hugsar også kven som hadde ideen med å dele opp figuren:

87. *E: Eh….trur Mathias hadde det ihvertfall. Men elles….så husker eg ikke noen andre.*
88. *L: Husker du koss han forklarte det?*
89. *E: Det var bare det med atte …..liksom det rektangelet hadde jo bare ein differanse så det ble n(n+1) husker eg. Åsså var, …men det andre,…eg visste jo, ..eller...eg tenkte jo litt sånn sjølv og da på når me satt der og diskuterte, så såg det at me måtte dele det opp åsså …får du n ganger – eller* n^2 *da på eller* $2n^2$ *siden det er 2 av de, så måtte me plussa n (n +1) og få heile kvadratet da.*

Her stadfestar Oskar at Mathias, som han var på gruppe med, har vist korleis oppgåva kunne løysast. I tillegg seier han i line 89 at han under diskusjonen sjølv var inne på tanken om å dele figuren opp.

På den fyrste testen visste ikkje Oskar heilt korleis han skulle løyse oppgåva. Han fann eit mønster i og med at han fann differansane mellom figurane, men han klarte ikkje å setje opp ein modell som gjaldt for alle figurar. På test 2 viser Oskar at han har knekt koden for denne typen oppgåver. Han har klart å dele figuren inn i to deler, noko som gjer at han klarar å setje opp ein eksplisitt formel. Han brukar same metoden som Ingunn og Pernille, men han ser andre figurar. Oskar låg i grenseland mellom Radford (2010) sine to kategoriar *aritmetisk generalisering* og *faktabasert generalisering* på før-testen. På etter-testen har han flytta seg til det Radford (2010) kallar *algebraisk generalisering*. Ei slik generalisering av mønster handlar om elevens evne til å kjenne igjen nokre fellestrekk ved eit mønster, og vere klar over at det gjeld for alle dei påfølgjande figurane (Radford, 2010). Vidare klarar Oskar å kople variabelen n i formelen til figurnummeret. Han beherskar det algebraiske symbolspråket og kan såleis plasserast under det Radford (2010) kallar for *symbolsk generalisering*, som er det høgaste generaliseringsnivået innan algebraisk generalisering. Oskar klarar å forklare regelen og uttrykkje den skriftleg og munnleg.

I line 81 i intervjuet grunngir Oskar framdrifta si med at vi hadde «gått gjennom det». Samtidig seier han i same line at det var fleire som hadde delt figuren opp i fleire ulike strukturar. Sjølv om han hugsar at det var fleire som hadde delt opp figuren slik, hugsar han berre namnet på ein elev, Mathias, som hadde gjort det. Han seier også i line 89 at medan dei diskuterte, var han sjølv inne på tanken om å gjere det slik. Elevars deling av strategiar er eit sentralt poeng i Five Practices (Smith & Stein, 2011). Utsegnene «…det var fleire som hadde delt det opp…» og «….då vi diskuterte det…», kan indikere at Oskar har lært å sjå etter strukturen i eit mønster av medelevane sine, då spesielt av Mathias. Det kjem likevel ikkje fram i intervjuet at sjølve arbeidsmetoden har spelt ei rolle for Oskar sin læringsprosess.

4.1.3 Oppsummering innanfor rekursive og frå rekursive til eksplisitte strategiar

På den fyrste testen tek både Oskar og Ingunn utgangspunkt i talet på perler i figur 1 når dei prøver å setje opp eit uttrykk. Dei finn differansen mellom figurane, og dei observerer begge at det er ein fast differanse mellom desse igjen. Dei har observert korleis mønsteret i talrekka aukar. Dei prøver seg på eit lineært uttrykk, og ingen av dei klarar å sjå ut frå differansane at dei skal ende opp med eit kvadratisk uttrykk. Det kan verke som om Oskar forstår meir av kva ein modell er, i og med at han gjer eit forsøk på å setje opp eit uttrykk som startar med "$F_n =$ ", og som inneheld n, sjølv om han har viska det ut. Han prøver òg å setje inn tal for n, og konkluderer slik med at formelen han har funne, er feil. Oskar er derfor komen litt lenger i generaliseringsnivå enn Ingunn. Det ser ikkje ut som om Ingunn har testa formelen sin. Både Ingunn og Oskar finn differansane mellom figurane og differansen mellom differansane igjen. Eg har derfor valt å kalle deira strategi for *finne differansen*.

I motsetning til Oskar og Ingunn, har ikkje Pernille funne noko mønster. Ho har ikkje funne differansane mellom figurane, og såleis ikkje differansen mellom differansane. I tillegg brukar Oskar og Ingunn variabelen n, medan Pernille brukar tal, og ikkje symbol. Ho jobbar reint aritmetisk. Ein annan skilnad er at Pernille tek utgangspunkt i leddet før for å finne det neste i tre ulike reknestykke. På dette punktet er Pernille og Martin like. Oskar og Ingunn tek utgangspunkt i talet på perler i figur 1 og prøver ut frå dette å setje opp eitt generelt uttrykk, utan at dei lukkast med det.

Både Pernille, Ingunn og Oskar slit med å sjå samanhengen mellom F_n og n. Studiar gjort av MacGregor og Stacey (1995), viser at dette er ein strategi som er typisk for elevar når dei skal løyse denne typen oppgåver. Dei fann at elevar har vanskar med å setje opp algebraiske uttrykk ut frå mønster og tabellar. Dei må klare å sjå samanhengen mellom x og y for å komme fram til ein formel. I staden ser dei etter rekursive reglar, eller noko som liknar på slike reglar (MacGregor og Stacey, 1995).

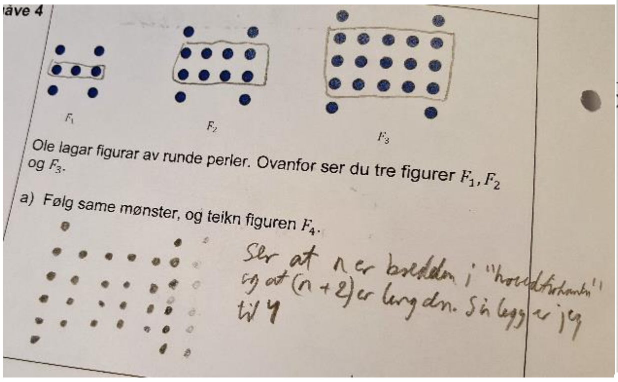
Både Martin, Pernille, Ingunn og Oskar sine løysingar, handlar alle om rekursive løysingsstrategiar. Alle elevane tek utgangspunkt i noko som er kjent frå før. Eg har derfor valt å plassere dei i kategorien *rekursiv.* I følgje Mason (1996) handlar rekursive løysingsstrategiar om å finne ein lokal regel basert på ein startverdi, og ein brukar denne til å finne neste ledd i rekka.

Sjølv om alle døma er rekursive løysingsmetodar, er dei likevel noko ulike. Eg har kalla strategiane *dobling med justering, finne differansen og addisjonsmetoden.* Pernille brukar strategien *dobling med justering,* i og med at ho konsekvent multipliserer talet på perler i F_1, F_2 og F_3 med to for å prøve å nå talet på perler i neste figur. Dette lukkast ho ikkje med, og ho må derfor justere med ein differanse. Sidan desse differansane er ulike, klarer ho ikkje å finne eit mønster. Ingunn og Oskar brukar strategien *finne differansen.* Dei finn begge skilnaden i talet på perler frå figur til figur, og dei finn begge differansen mellom aukinga frå figur til figur. Dei finn likskap mellom figurane, men klarer ikkje å sjå mønsteret dei har funne. Begge skjønar at *n* skal vere med, men ingen av dei lukkast med å setje opp eit uttrykk for F_n ut frå mønsteret dei har funne. Martin har ei anna tilnærming enn dei tre andre. Han brukar *addisjonsmetoden*. Denne strategien går ut på å uttrykkje eit ledd i rekka med leddet framfor og addere forskjellen som då står igjen for å kunne få rett tal på perler. Han prøver å finne ein formel for F_n uttrykt ved F_{n-1} addert med forskjellen mellom F_n og F_{n-1}.

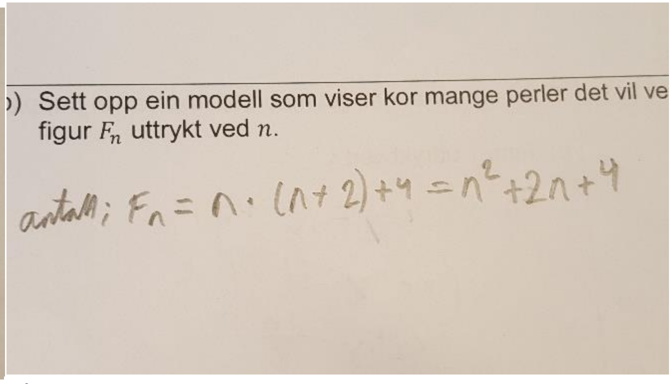
På test 2 har både Pernille, Ingunn og Oskar flytta seg frå rekursive strategiar som *dobling med justering* og *finne differansen* til dei eksplisitte strategiane *kvadratmetoden* og *rektangelmetoden*, noko som har hjelpt dei til å finne ein eksplisitt formel. Basert på test 2, har eg valt å plassere dei i kategorien *eksplisitt*. Å finne ein eksplisitt formel handlar om å sjå eit mønster som kan gje ein formel som gjeld for alle ledd i ei rekke (Mason, 1996). Alle tre deler figuren opp i to delar. Pernille og Ingunn tek utgangspunkt i kvadratet i midten, medan Oskar fyrst ser på rektangelet i figuren. Dei har alle hatt fin utvikling og det er tydeleg at dei har lært noko i prosjektperioden. Dei peiker alle på konkrete medelevar som har vist dei korleis dei kan dele inn figuren i fleire deler og på den måten sjå ein struktur som dei kjenner frå før. Dei har ikkje lært det av læraren eller læreboka. Det er likevel ingenting som kjem fram i intervjua som kan knytast direkte til Five Practices (Smith & Stein, 2011) som arbeidsmetode og kva rolle den har spelt i elevane sin læringsprosess.

4.1.4 Utvikling innanfor eksplisitte løysingar

Dømet under er henta frå Audun sin fyrste test.



Figur 4.13



Figur 4.14.

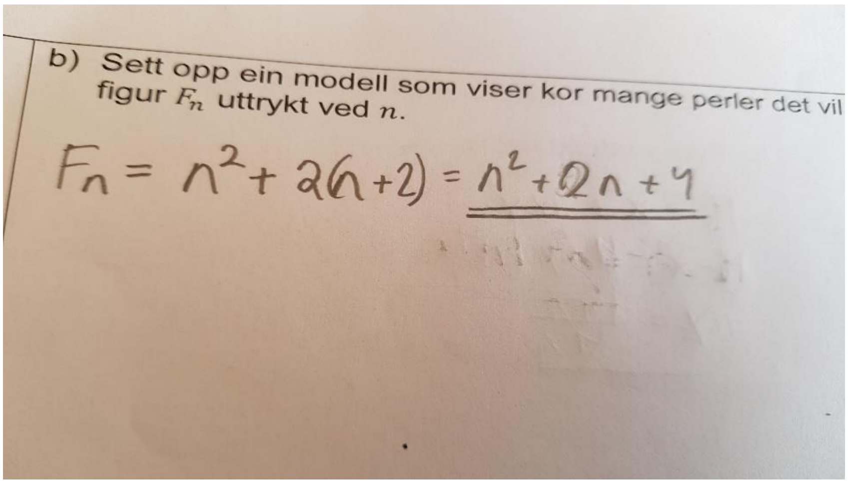
7. L: *Her er det du gjorde på den fyrste testen. Kan du seie noko om koss du har tenkt her?*
8. *E: Eg ser at den (peiker på oppgåva) er bredden i hovedfirkanten og den pluss 2 er lengden…..så legge til 4. Eg har tenkt bare på rektangelet, at n+2 er lengden …….ser at n er bredden i firkanten, altså denne her kortsida, mens n+2 er lengden og så legge eg te 4. Eg har bare tenkt at hovedrektangelet… og så bare legge eg på 4 etterpå.*

Audun tek utgangspunkt i rektangelet i midten av figuren. Han finn ut at lengda er $n + 2$ og at breidda er lik n. Han legg så til 4, som er perlene som står igjen i figuren. Han finn då eit generelt uttrykk for F_n: $F_n = n \cdot (n + 2) + 4 = n^2 + 2n + 4$. Audun deler opp figuren i to delar, eit rektangel og perlene på ytterkantane. Han brukar arealformelen til rektangelet for å resonnere seg fram til uttrykket han har funne. I tillegg ser han at han alltid manglar 4 perler uansett kva figur han er i. Desse 4 perlene legg han til som ein konstant i uttrykket.

I line 8 i intervjuet seier Audun at «…..at $n + 2$ er lengden…..ser at n er bredden..». Audun brukar ikkje talet på perler frå ein konkret figur for å finne talet på perler i neste figur. Audun beskriv her eit generelt fellestrekk ved figurane, og han klarar å setje opp ein formel som gjeld for alle tilfelle av n. Han ser den generelle utviklinga i figurmønsteret, og han har ingen problem med å uttrykke dette munnleg. Dette viser at Audun ser samanhengen mellom variabelen n og figurnummeret til kvar figur, som MacGregor og Stacey (1995) ser som ei føresetnad for å kunne setje opp eit generelt uttrykk. Han gjenkjenner eit mønster i figurane og ser at det gjeld for alle figurar. Han brukar samstundes eigenskapen til ein geometrisk figur, rektangelet, til å finne ein formel. Eg har derfor valt å kalle Audun sin strategi for *rektangelmetoden.* Elevens val av strategi vert støtta av Küchemann (2010). Han meinte at elevane ville få auka kompetanse i å bruke oppgåver eller døme dei har sett før, dersom ein fokuserte på å finne strukturen i eit mønster.

Dette er eit døme på det Radford (2010) kallar for ei algebraisk generalisering. Algebraisk generalisering av mønster avheng av elevens evne til å identifisere nokre fellestrekk ved eit mønster, og vere klar over at det gjeld for alle dei påfølgjande mønstra. Ein kan såleis finne eit uttrykk for eit vilkårleg ledd i rekka (Radford, 2010). Her ser ein at Audun brukar bokstaven n som symbol for talet på perler i figurane. Dette viser at han beherskar algebraens alfanumeriske semiotiske system, noko som fell inn under Radford (2010) si symbolske generalisering. Audun er i stand til å forklare regelen og uttrykkje den ved hjelp av ei symbolsk likning som gjeld for alle figurar. Han klarar og å uttrykke den skriftleg. Dette viser at Audun ligg på eit høgt nivå innanfor generalisering.

Audun har følgjande løysing på test 2:



Figur 4.15

14. *E: Ja. Det der ja. Det eg har tenkt her, det er vel mest det at eg ser at, eg dele på ein måte opp figuren i …3 deler da kan du si. Ehm…..men aller først så tenke eg at det bare er to deler egentlig. Eg tenke de to sideveggene som en del. I midten, sentralt i alle figurane, så har du n^2. Altså i F_1 så har du 1^2, 2 gir 2^2 og så tenke eg sideveggene, det er liksom på ein måte ein da, så eg sette 2 foran, gange 2, så tenke eg bare at eg telle den eine, men så har eg gangt med 2 så eg får..begge to. Og det eh…ser eg atte det er n eller 1, og så er det eh…pluss 1 både oppe og nede, og det du har her har du 2 der har du 2 + 1 oppe og nede, 3 der er 3 + 1 oppe og ned. Så sideveggene blir liksom eh…….2..altså.. $2\ (n+2)$ da. Og viss eg gange ut det så får eg n^2 ………som er denne, kan eg tegna på den? n^2, så er denne… den her, og så har vi*

2n som er disse delene og så har vi pluss 4 for det vil alltid være pluss 4 utforbi denne her sentrale….rektangelet her da. Så det vil alltid være pluss 4 uansett fordi det er alltid 4 som stikker ut…. Og det vil det jo her og uansett kor høgt du går (peikar på figuren). Så har med..ja da er det egentlig bare sånn eg tenke at eg har delt opp figuren……i formar som eg kjenner til.

Audun har sett opp ein eksplisitt modell for F_n der han brukar n^2 og legg til $2(n+2)$. Dette gjev han formelen $F_n = n^2 + 2n + 4$

Audun forklarar i line 14 at han deler figuren inn i tre deler. Samtidig fortset han med at han var inne på tanken om at det berre var to delar. Han tenkte også at dei to sideveggene var ein del. Dei to sideveggene er like, og formelen hans over viser at han tek dei under eitt sidan han set formelen opp som $2(n+2)$. Audun fortel vidare (line 14) at han ser kvadratet i midten av figuren og at dette kan skrivast som n^2. Han koplar no talet på perler i midten med figurnummeret når han seier at «Altså i F_1 så har du 1^2, 2 gir 2^2…». Audun nyttar seg no av strategien eg har valt å kalle *kvadratmetoden.* Han klarar også å sjå samanhengen mellom figurnummeret og variabelen n i formelen, slik som på test 1. Han forklarar vidare detaljert korleis han tenkjer i forhold til sideveggene: «Og det eh…ser eg atte det er n eller 1, og så er det eh…pluss 1 både oppe og nede, og det du har her har du 2 der har du 2 + 1 oppe og nede, 3 der er 3 + 1 oppe og ned. Så sideveggene blir liksom eh……..2..altså.. 2 $\cdot (n+2)$ da». Dette viser at Audun har god kontroll på mønsteret han har sett då han løyste oppgåva. Han avsluttar line 14 med at han har delt opp figuren i former som han kjenner til. Dette er i tråd med Küchemann (2010) sin tanke om at ein får auka kompetanse i å bruke døme ein kjenner frå før når ein fokuserer på strukturen i eit mønster.

På den fyrste testen beskreiv Audun at han delte figuren inn i eit rektangel og adderte dei fire kulene som stod igjen i kvar ende. På test 2, beskriv han altså eit anna mønster der han tek utgangspunkt i kvadratet i midten. Under intervjuet kjem han med informasjon om at han hadde tenkt på ei tredje løysing på oppgåva.

32. *E: Eg hadde en aen, eg huske eg tenkte på en aen metode og…det var…..eh……….ja eg tenkte atte ..du har jo, viss du tenke at dette her er et stort kvadrat da, og så du jo tar minus dessa hålå..eh..for eksempel i F_1 så har du jo, eller i F_n da så har du jo..eh det blir jo da, $(n+2)^2 - 2n$. Det vil jo være et rett svar det og for du får jo…for eksempel på 2-en da, så har du $n+2=4$ og 4^2, så da får du heile denne firkanten, late som de er der og (peker på holrommet på figuren). Og så $-2n$, altså -4, og når du gange ut det så får du vel…n^2,..det blir jo det samma vett du…*

I line 32 beskriv Audun at han ser på figuren som eit stort kvadrat. Vidare tek han bort dei delane som manglar for at kvadratet skal vere fullstendig. Det betyr at han tek bort n perler frå nedste og øvste rad i figuren. Denne strategien har eg valt å kalle *fullt kvadrat med justering.* Han forklarar det fyrst generelt: «..i F_n da så har du jo..eh det blir jo da, $(n+2)^2 - 2n$», og vidare med eit døme på F_2: «….for eksempel på 2-en da, så har du $n+2=4$ og 4^2, så da får du heile denne firkanten, late som de er der. Og så $-2n$, altså -4…».

I intervjuet forklarar Audun korleis han tenker når han løyser denne typen oppgåver:

40. L: Kor tid har du lært det?

41. E: ….Det er egentlig sånne praktiske oppgaver, mye av det er sånne ting som du……..som du bare komme på kan du si. Og eg …viss eg hadde tenkt at eg skulle gjør det på så mange måtar som mulig på første testen, så trur eg at eg hadde klart å komme fram til fleire forskjellige måtar å tenka på. Eh…komma fram til det. Det er egentlig bare….det er sjeldan at eg har et sånt fast mønster, at alle sånne oppgaver skal vær sånn liksom. Det er ofta eg bare tenke kossen kan det vær, og så bare finne på forskjellige…metodar for å komme fram til det då. …………Du komme jo fram til same formelen uansett koss du løse det

I line 41 meiner Audun at han ville klart å løyse oppgåva på fleire måtar på den fyrste testen. Han seier at han ikkje har ein fast løysingsmetode for denne typen oppgåver. Han er open for at oppgåver kan løysast på fleire måtar og er ikkje låst til ei fast oppskrift. Han avsluttar med å seie at «Du komme jo fram til same formelen uansett koss du løse det», noko som betyr at han klarar å sjå ekvivalensen mellom dei ulike løysingsmetodane. Han seier vidare i intervjuet at gruppearbeidet ikkje har påverka hans måte å tenke på:

49. L: Me jobba jo med sånne oppgaver i gruppene.

50. E: Ja me gjorde det.

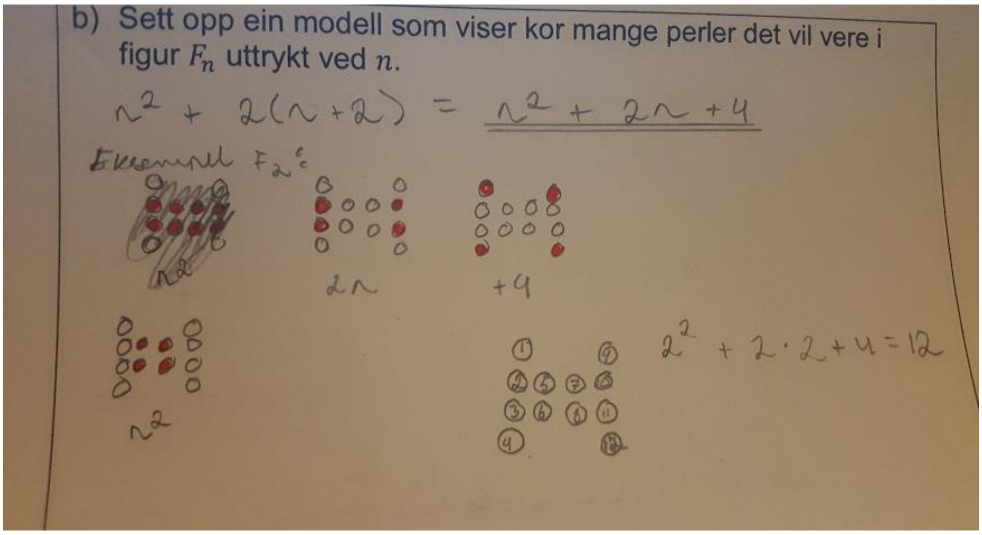
51. L: Du har ikkje lært noe av det?

52. E: Nei eg følte det var meir……eh……eg føle at de oppgavene der kommer litt an på sånn….bare det første du komme på og tenke på, det er det du tenke blir enklast og…eg tror ikkje eg tenkte på, for eg følte nesten eg tenkte litt vanskeligere her på den herre andre gangen. Men eg…eg tru gjedna det har mye med dagsformen å gjør og koss mye du ..eller kor du….eh…står hen. Har du varmt opp, har du gjort litt oppgaver, har du tenkt litt på det på forhånd eller er det bare rett på. Det er mange faktorer som spiller inn og eg trur atte det …..Akkurat sånne oppgaver, viss du har, eg trur at det førsta du ..eh..komme på, og det du tenke er at det her ikkje nødvendigvis er enklast men det du bare forstår. Eg vett at det, sånn er det, den stemme. Om det er den enklaste måten å gjør det på, kan du gjør det raskare, kan du gjør det meir *effektivt..heilt sikkert men ..eh…det er liksom den metoden du…..du kan si at det er den metoden du..trives med på en måte.*

I line 52 vil ikkje Audun knytte læringa si opp til gruppearbeidet, men meiner at andre faktorar spelar inn. Han meiner at måten du løyser oppgåva på, handlar om førebuingane ein har gjort før ein går i gang med oppgåva. Dette kan til dømes handla om øving.

Det er ikkje noko særleg utvikling i måten Audun løyser oppgåva på frå test 1 til test 2 bortsett frå at han ser mønsteret på ein annan måte i test 2. Måten Audun resonnerer på, viser at han framleis ligg under Radford (2010) sitt høgaste generaliseringsnivå, det *symbolske generaliseringsnivået*. Audun avkreftar vidare at arbeidsmetoden som er brukt har noko som helst med hans måte å tenkje på. Han meiner at mykje avheng av kva dagsform ein har og om ein har førebudd seg på denne typen oppgåver.

Ein annan elev, Susanne, illustrerer løysinga si på før-testen på denne måten:



Figur 4.16.

5. *L: Kan du forklare ka du har gjort her?*
6. *E: Det er bare å se på det…eh…mønsteret før. Ser jo at det har en samanheng…så bare..eh ..tegne det ut frå den sammenhengen du ser.*
7. *L: Men kan du forklare meg ka samanheng du ser her da?*
8. *E: Eh….ja du ser at på 1 så har du bare ei kula i midten, og på 2-en så har du 4 og på 3-en så har du 9, så det auke alltid med kvadratet ...eh….eller liksom de kulene i midten er kvadratet av det tallet som hører til F. Så da vil jo figur 4 få 16 kuler. Eh…..og så er det alltid, på de radene på sidene her, så er det litt det samma, at du får, ehh….på figur 3 for eksempel så får du 3 kuler her og 3 kuler der plussa på det*

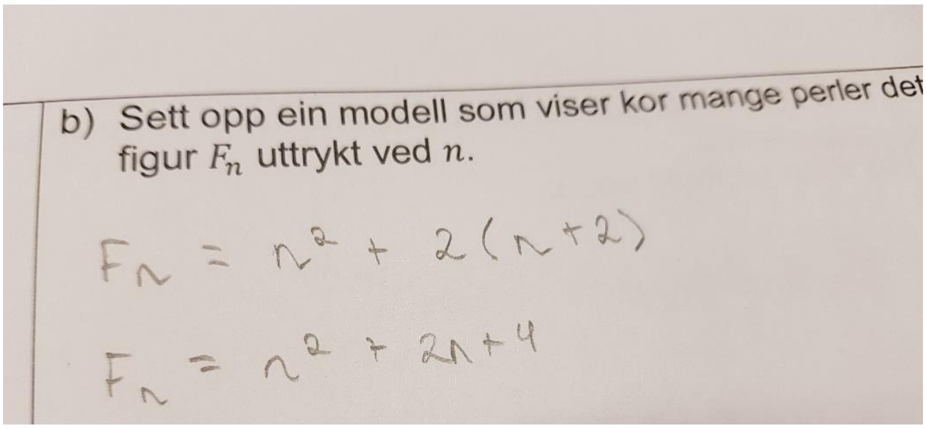
kvadratet. Så då får du liksom 2 ganger det tallet...så hørre te F, og så får du pluss 4 siden det alltid er 4 kuler … så henge på hjørnene. Eller ei kule på kvert hjørna.

Utgangspunktet til Susanne er kvadratet i midten. Ho finn at dette er kvadratet av figurnummeret. Vidare ser ho at ein har same talet på kuler på kvar side av sjølve kvadratet, og at dette må multipliserast med to. Ho observerer òg at det alltid er ei kule i kvart hjørne av figuren. Då endar ho opp med formelen $F_n = n^2 + 2n + 4$. I tillegg ser vi at Susanne har testa ut formelen sin ved å setje $n = 2$ og at ho har kontrollert dette opp mot talet på kuler i figur 2.

I line 8 seier Susanne at ho ser kvadratet i midten av figuren, og ho observerer at kulene i midten er kvadratet av talet som høyrer til F. Her viser ho at ho ser samanhengen mellom figurnummeret og talet på kuler i kvadratet, noko som MacGregor og Stacey (1995) har poengtert er viktig for å kunne setje opp ein formel. Eit anna døme på dette er då ho i line 8 beskriv mønsteret på sideradene. Dette viser at Susanne klarar å sjå generelle samanhengar mellom figurane. Ho evnar å sjå strukturen i mønsteret i staden for å fokusere på kvart ledd i rekka, noko som Wilkie og Clark (2016) og Küchemann (2010) meiner er den beste måten å jobbe med figurmønster på. Ho brukar strategien eg har kalla *kvadratmetoden.* Det er faktisk litt forskjell i korleis Susanne forklarar at ho har tenkt og formelen $F_n = n^2 + 2 \cdot (n + 2)$ som ein kan sjå i figur 4.16. I line 8 seier ho at ho plussar på dei fire kulene til slutt, men formelen indikerer at ho ser på heile «beinet» som ein figur, ikkje berre dei kulene som ligg attmed kvadratet skilde frå dei fire endekulene. Dette kan indikere at Susanne evner å sjå fleire strukturar i mønsteret.

Susanne sin løysingsstrategi er eit døme på det Lannin (2005) kallar *kontekstuell strategi*. Denne strategien går ut på å lage ein regel basert på informasjon gitt i situasjonen. Susanne gjer dette i og med at ho kjenner igjen eit mønster i figurane og klarar å kople dette til å gjelde alle figurar. Ho ser altså strukturen i mønsteret som Küchemann (2010) meiner ein bør fokusere på. Ho kan også plasserast inn i Radford (2010) sin *algebraiske generalisering* i og med at ho har identifisert fellestrekk ved mønsteret, samtidig som ho er klar over at dette gjeld for alle figurane. I tillegg beherskar Susanne det alfanumeriske semiotiske systemet til algebraen. Ho er i stand til å uttrykke regelen med ei symbolsk likning, samstundes som ho klarar å forklare regelen munnleg. Dette er kjenneteikn på Radford (2010) sin *symbolske generalisering*. Susanne ligg derfor på eit høgt generaliseringsnivå.

Biletet under viser Susanne si løysing på etter-testen:



Figur 4. 17

12. *L: Kan du forklare meg koss du har tenkt her?*
13. *E: Eg trur eg har tenkt likt som på den første. Skal me sjå……jo eg har tatt utgangspunkt i kvadratet i midten her og…..og sidene for seg….eh…..jo det er likt. Eg har bare ikke tegna det opp på samme måte liksom…det er det som er forskjellen. Eg har ikke tegna koss eg har tenkt.*

På figur 4.17 har Susanne sett opp to variantar av formelen for F_n, $F_n = n^2 + 2(n+2)$ og $F_n = n^2 + 2n + 4$.

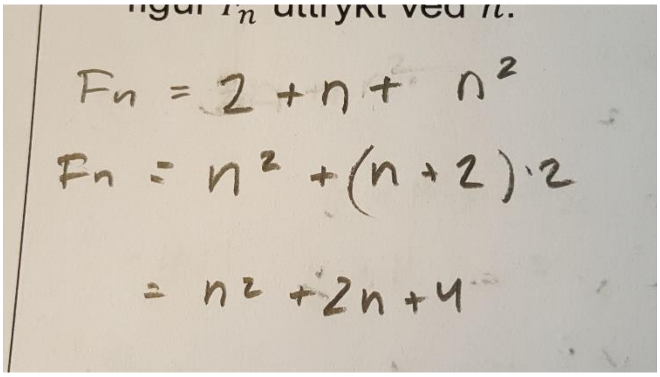
I line 13 forklarar Susanne at ho tenkjer på same måten som ho gjorde på den fyrste testen. Den einaste forskjellen er at ho ikkje har teikna og forklart korleis ho har tenkt. I og med at ho ikkje har noko endring i tankegangen sin, kjem det ikkje noko fram i intervjuet som er interessant i forhold til på kva måte ho har tileigna seg denne kunnskapen. Det einaste ho kommenterer er at:

17. *E: Å jobbe i gruppa…..eh… det gjør jo at du…..at du kan se det litt på andre måtar enn bare sånn som du sjøl ser det. Og se koss andre tolke oppgaver og sånn.*
18. *L: Føle du at du lærer av det?*
19. *E: Ja. Du får jo input av andre.*

I line 17 kommenterer ho at ein kan få innblikk i korleis andre tenkjer og at dette kan vere annleis enn du sjølv tenkjer. På mitt spørsmål i line 18, svarar ho i line 19 at ho lærer av dette fordi ein får «…input av andre.». Her koplar ho saman læring og det å jobbe i grupper og diskutere saman med andre medelevar, noko som er i tråd med Franke et al. (2007) si framstilling av læring som noko ein engasjerer seg i, og gir meining til, når ein samhandlar med andre.

Susanne viser inga utvikling frå test 1 til test 2. Ho seier at ho tenkjer heilt likt på dei to testane. Ho ligg framleis på Radford (2010) sitt *symbolske generaliseringsnivå* i og med at ho både kan forklare korleis ho resonnerer, og ho brukar symbol til å uttrykke formelen eksplisitt. Ho seier likevel at ho har lært av å jobbe saman med sine medelevar i grupper sidan ho då får innblikk i korleis andre løyser oppgåver på ein annan måte enn den ho sjølv brukte.

Kaja har også klart å sjå eit mønster i si løysing. Bilete under viser hennar løysing på test 1:



Figur 4.18

82. *E: Ja. Mhmm …ja. eg ser at F_1 har tre bein og F_2 har fira, F_3 har fem og da må F_4 har seks bein. Da må F_n ha n+2. Ser og at prikkane mellom beina stoppe før de når de ytterste prikkane, og det skjer på alle figurane. Og det same vil skje med prikkane mellom beina. Prikkane mellom beina er 1 på F_1 og 2 på F_2 og 3 på F_3 og da vil de bli 4 på F_4… ja.*

83. *L: Bare for å oppklare litt, du snakke først om at F_1 har tre bein, F_2 har fire. Så snakkar du om at prikkane mellom beina er ein på F_1, to på F_2. Kan du være meir presis på ka du meine med «bein»?*

84. *E: Eh…eg meine de to på sidene her (peiker på kvar side av figuren). På F_1 er det tre prikkar på kvar sida, på F_2 er det fire og så videre. Og prikkane imellom dei to, er dei andre eg snakkar om (peikar på kvadratet i midten av figuren)*

På biletet over ser ein at Kaja har sett opp ein formel for F_n: $F_n = 2 + n + n^2$. Ho har deretter sett opp ein ny formel $F_n = n^2 + (n + 2) \cdot 2$ som ho har skrive om til $n^2 + 2n + 4$.

Kaja deler figuren i tre, dei to lengre «beina» på kvar side og kvadratet i midten. Dei to beina har ho sett opp som $(n+2) \cdot 2$, og ho har funne riktig formel for F_n som er $F_n = n^2 + 2n + 4$. Ho brukar strategien *kvadratmetoden.*

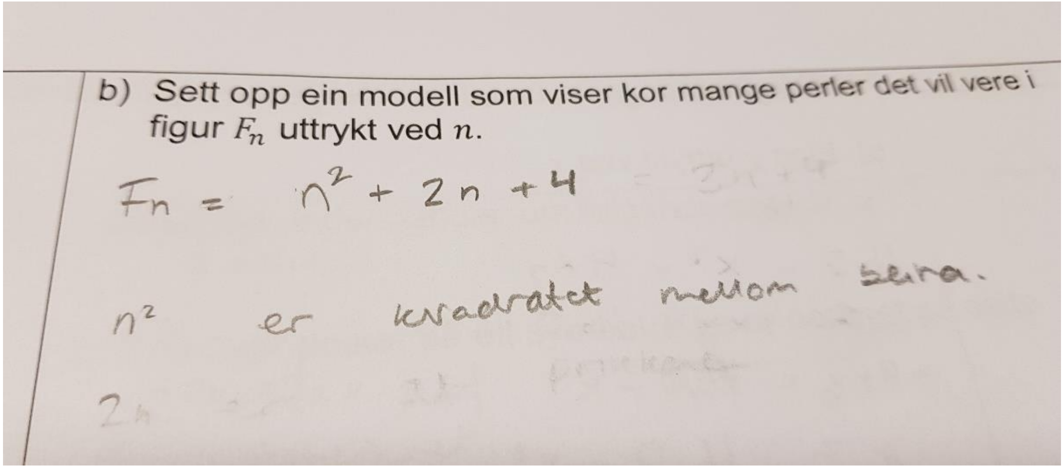
Den fyrste modellen Kaja har sett opp, er noko annleis enn den ho enda opp med. På spørsmål om den seier Kaja:

102. *E: ..det gir vel ikke….gir det meining? ….Eh…..det,…eg må se. ….eh….. Eh…det er vel sikkert det same som eg tenkte på den (peiker på modell nr. 2). At liksom ..rommet mellom beina, eh….det er jo kvadratfigurer eller ka me kalle det. Og n+2 det er det eina beinet og det må multipliserast med 2 ja. Og for å få begge beina…ja…. ja sikker sett at det er feil men så har eg ikke kryssa det ut eller viska det. Eg vett ikke. Nei eg huske ikke ka eg har drevet på med der. …..men det er jo ….den eg har komt fram til og den eg har brukt (peiker på modell 2). Tror bare eg liksom….har sett at det er feil, eller kanskje eg har tenkt at det er figur 1, men det stemme vel ikke på den hell…………så eg vett egentlig ikke ka eg gjør der.*

I line 102 seier ho at rommet mellom beina er kvadratfigurar. Her kjem ho med ei forklaring på korleis ho har tenkt då ho sette opp n^2 som ein del av modellen. Ho hugsar ikkje korleis ho har tenkt då ho sette opp den fyrste formelen. Det einaste som manglar i dette uttrykket, er å multiplisere $n + 2$ med 2. Dette gir ho òg uttrykk for sjølv: «…og $n + 2$ det er det eina beinet og det må multipliserast med 2 ja. Og for å få begge beina…ja». Ho klarar likevel ikkje å kople dette saman i og med at ho i slutten av line 102 avsluttar med at ho ikkje eigentleg veit kva ho har gjort der.

Kaja ser strukturen i mønsteret på figuren og brukar dermed metoden som Küchemann (2010) og Wilkie og Clark (2016) meiner ein bør fokusere på i arbeidet med figurmønster. Kaja ligg på Radford (2010) sitt *symbolske generaliseringsnivå* i og med at ho både klarer å uttrykke formelen med ord og med symbol. Ho synest å slite litt med å forklare seg tydeleg om korleis ho har resonnert, noko som tyder på at ho framleis treng litt øving i artikuleringsfasen i spiralen til Mason, Graham og Johnston-Wilder (2011).

Kaja si løysing på test 2 kan ein sjå på biletet under:



Figur 4.19

109. *K: eh…da tenkte eg eh…ser at det liksom er, på kvar av de, på ein måte beina, de har en egen prikk. Ja det er litt vanskelig å sette ord på det da. Men eh..og så ser eg og at F_1 den har ein prikk der, så tenkte eg liksom 1 gange 1, og F_2 har to prikkar, så det blir jo 2 gange 2. Og så har F_3 3 prikkar der, og så inne i midten, så det blir 3 gange 3 og i figur 4 så er det jo 4 nedover her og 4 bortover der på same måte som her. Tenkte eg da. Og så sette eg da de to beina på en måte da, til slutt med ein ekstra prikk på kvar ende liksom. Eh…då må eg se. Jo n^2 var jo sånn så eg sa, inni her (peker på midten av figuren). Å så $2n$ eh…det var vel…eh….eller 4, det er i alle fall de her (peker på hjørnene i figuren). Og $2n$ det var disse, for eksempel figur 2 så blei det jo to prikkar så det blir 2 gange 2. så…ja n^2 er jo kvadratet i midten.*

Figur 4.19 viser at Kaja har sett opp rett formel for F_n. I tillegg har ho kommentert at n^2 er kvadratet mellom beina.

I line 109 seier Kaja at ho synest det er litt vanskeleg å setje ord på korleis ho har tenkt. Ho forklarar at ho ser på prikkane i midten av figuren og ser at F_1 har $1 \cdot 1$, F_2 har $2 \cdot 2$ vidare opp til F_4. Vidare i line 109 prøver ho å forklare korleis ho har kome fram til $2n$, at det er prikkane på kvar side av kvadratet i midten. Ho beskriv at beina har ein ekstra prikk i kvar ende. Ho viser her til at ho har lagt til konstanten 4. Kaja nyttar seg framleis av strategien *kvadratmetoden*.

I intervjuet kjem ho litt inn på gruppearbeidet:

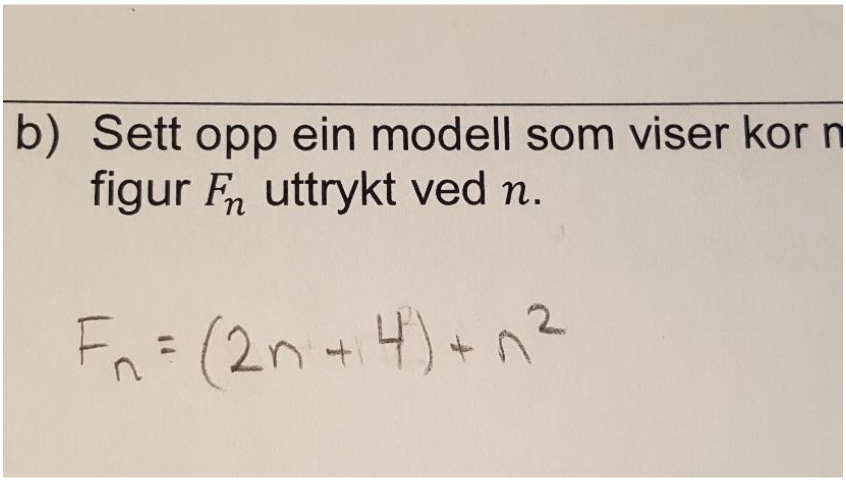
120. *L: Ka er det som er grunnen til at du tenker sånn?*
121. *K: mmmm…me jobba jo i grupper...kanskje det var den gang eg var med Gabriel. Er ikkje helt sikker.*
122. *L: Du var i lag med Gabriel og Bjørnar. Huske du ka de gjorde?*

123. *K: Eh…eg huske ikkje, men eg huske at eg ikkje forstod så veldig mye i alle fall. Men begge to såg det jo ganske raskt, mens eg bare satt der liksom ka..?*
124. *L: Så både Gabriel og Bjørnar visste koss de skulle gjer dette?*
125. *K: Ja eg trur det.*
126. *L: Føler du at du har lært av å jobbe med dei på gruppå?*
127. *K: Ja kanskje litt, men det gjekk ganske fort så eg fekk liksom ikkje heilt…koss gjør med det tenkte eg sånn, men …eg forstod det jo på en måte til slutt da. Eg vett med meg sjølv at eg skjønne det litt meir..akkurat dette her siden eg skjønte ikkje heilt koss eg skulle sette det opp i begynnelsen. Eg forstår det kanskje litt meir nå. Men, eller så er det ikkje…vett ikkje heilt.*

Sjølv om Kaja har sett samanhengane og funne ein eksplisitt formel på begge testane, så gir ho i line 123 uttrykk for at ho eigentleg ikkje forstod så mykje av dette i utgangspunktet. Ho viser i line 123 også til at begge dei to elevane ho var på gruppe med, såg mønster i oppgåva dei jobba med då, ganske raskt. Ho gir i line 127 uttrykk for at ho har lært litt av dei to gutane på gruppa sjølv om ho synest det hadde gått litt for fort. Men ho seier vidare at ho på ein måte forstod det til slutt. Ho stadfestar at ho skjønar meir no enn ho gjorde i byrjinga.

Det er ein liten forskjell i løysingane på dei to testane. På den fyrste testen forklarte ho at ho ikkje skilde ut dei 4 prikkane på yttersida av figuren. Ho såg då beina til figuren under eitt, som $(n+2)\cdot 2$. No har ho delt beina opp i to delar, dei prikkane som ligg attmed kvadratet i midten, som då svarar til figurnummeret, og dei 4 prikkane på kvar ytterkant. Ho har funne ein annan struktur i mønsteret. Kaja kan framleis plasserast under Radford (2010) sitt *symbolske generaliseringsnivå*. Ho ser strukturen i mønsteret og klarar å setje opp ein generell formel for F_n. Noko som er interessant, er at Kaja gir uttrykk for at ho ikkje skjønte noko av dette på den fyrste testen. Likevel ser ho strukturen i mønsteret og kjem opp med rett uttrykk for F_n. Ut frå intervjuet er det umogleg å seie om Kaja har lært seg ein oppskrift, eller om ho berre evnar å sjå korleis slike oppgåver kan løysast utan å forstå kvifor dei kan løysast slik. Kaja stadfester at ho slit med å setje ord på korleis ho tenkjer, men ho klarar likevel å forklare strukturen i mønsteret som ho har observert. I intervjuet med Kaja kjem det ikkje fram noko som kan indikere at arbeidsmetoden har hatt noko å seie for hennar forståing av korleis ho løyser oppgåva. Ho hugsar ikkje kva medelevane gjorde, ho synest det gjekk for fort, men seier at ho kanskje har lært litt av å jobbe i gruppe.

Den siste eleven som vert presentert her er Ingeborg. Ho har satt opp modellen sin slik:



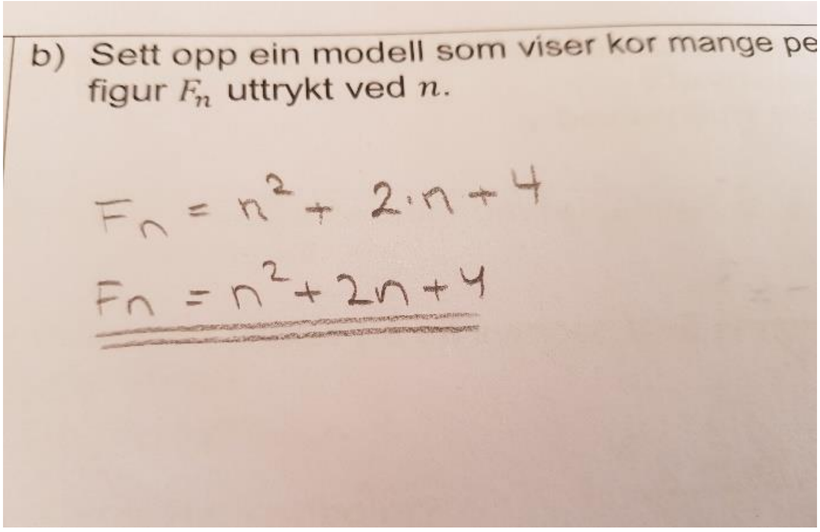
Figur 4. 20

69. *E: Eg har jo sett på kvadratet i midten som at det er figurnummeret ganga med seg sjøl da. Ehh…….ja og så har eg jo tenkt at … det skal vær en utforbi på kvart hjørna. men addert med 4 for det er ei ekstra perle på kvert hjørna...eh..så blir det da…….6 perler siden det er 4 i kvadratet, for 4+2 er jo 6.*

Ingeborg har skrive opp modellen $F_n = (2n + 4) + n^2$.

Ingeborg ser tydeleg samanhengen mellom n og figurnummeret, noko ho stadfester i line 69 i intervjuet. Ingeborg isolerer kvadratet i midten. Ho ser at dette er figurnummeret multiplisert med seg sjølv, n^2. Her ser ho det generelle i mønsteret, og ho ser at dette gjeld for alle figurar. Ho brukar strategien *kvadratmetoden.* Vidare i line 69 beskriv ho at det er n perler på kvar side av kvadratet og ei ekstra perle på kvart hjørne. Dette har ho skrive som $2n + 4$. Ingeborg kan plasserast innanfor Radford (2010) si *algebraiske generalisering* i og med at ho klarar å identifisere nokre fellestrekk ved mønsteret, og ho veit at dette gjeld for alle figurar i mønsteret. Ho brukar n som symbol på talet på perler i figurane og beherskar dermed det alfanumeriske semiotiske systemet til algebraen. Ingeborg klarar å uttrykke dette både skriftleg og munnleg. På bakgrunn av dette, kan ho plasserast inn under nivået *symbolsk generalisering*, som er det høgaste generaliseringsnivået til Radford (2010).

Under ser ein Ingeborg si løysing på test 2.



Figur 4.21

80. *E: Ja du har jo kvadratet i midten. …eh så er figurnummeret gange, nei opphøyd…i 2. Figur 2 2 gange 2 ehmm … å så …........eh å så på kantane då, eller på sidene eller ka eg skal kalla det, at det er ……2 ganger figurnummeret. Altså her på figur 2 da så blir det jo 2 gange 2 så er 4 og så pluss 4 og på figur 3 da så blir det 2 gange 3 er 6 pluss 4 og på figur 4 så blir det da 4^2 …pluss 2 gange 4 pluss 4 …8 + 4.*

Den fyrste formelen viser korleis Ingeborg har tenkt når ho har funne F_n .Ho har sett opp kvart ledd for seg sjølv og markert med multiplikasjonsteikn på leddet $2 \cdot n$. På linje 2 har ho teke bort dette multiplikasjonsteiknet og funne $F_n = n^2 + 2n + 4$.

Mønsteroppgåva inneheld også ei deloppgåve a). Det som er mest interessant med Ingeborg, er kanskje då ho oppdagar at ho tenkjer annleis på b) enn det ho har forklart på a). På a) skulle dei teikne figurnummer 4. I forklaringa til korleis ho har tenkt, seier Ingeborg

40. E:«*eh….eg tenkte at når det va figur 1 da, så e den i midten holdt på å si, det er jo et kvadrat i midten. Og her er det da 1 gange 1, at det er 1 i midten, og her er det 2 gange 2 siden det er figur 2. Eh og her 3 gange 3 siden det er figur 3. Og da, når det var figur 4 så tenkte eg at det e 4 gange 4 i midten. Ehmm …åsså…å kantane eller utforbi kvadratå, så tenkte eg at det skulle vær 2 meir enn figurnummeret og her da 1+2 og så gange 2 da fordi det er på begge sider. Eh…figur 3 blir da 3+2 åsså gange med 2 og på figur 4 4+2 gange 2. Og så er det jo, ser jo det at det er 1 utforbi det lilla kvadratet i midten.*»

Her forklarar Ingeborg sidekantane på ein annan måte enn på b) på test 1 og 2. Ho har altså forklart to ulike måtar å sjå mønsteret på. På spørsmål om kva som er grunnen til at ho kan komme med alternative løysingar, svarar Ingeborg:

93. *E: Når du jobber i grupper, så får du jo alltid….innsyn i koss andre tenker da, eller koss andre har løyst oppgaver, så det blir jo ..kanskje…kanskje du tenke på forskjellige måter etter at du har snakt med andre da. Om vanskelige oppgaver. For da tenker kanskje du ein ting og så tenker en aen noe heilt aent som du ikke kom på, då lærer du kanskje å tenke på forskjellige måtar.*
94. *L: Så det du seie er at du har hatt utbytte av å jobbe med sånne typer oppgaver i grupper?*
95. *E: Ja altså du får iallfall innblikk i koss andre tenker og koss du sjølv og kan prøve å tenka liksom.*

Her seier Ingeborg at sjølv om ho klarte å løyse oppgåva eksplisitt på den fyrste testen, så har ho sannsynlegvis hatt utbytte av å jobbe med slike oppgåver i grupper med andre medelevar mellom dei to testane. I line 93 seier ho at å få innsyn i korleis andre tenkjer kanskje kan føre til at du tenkjer annleis sjølv også.

Det er ikkje så mykje som er ulikt frå test 1 til test 2 hos Ingeborg. Ho har funne ein eksplisitt formel for figurmønsteret på begge testane, og ho har brukt *kvadratmetoden* på begge testane. Endringa er at ho kan komme opp med ulike måtar å sjå mønsteret på. Ingeborg antydar at ho i gruppearbeidet har fått innblikk i korleis andre tenkjer, og at ho på den måten har lært å tenke på alternative måtar å løyse denne typen oppgåver på. Dette er den sentrale ideen med Five Practices (Smith & Stein, 2011) og det kan indikere at ho har lært av arbeidet med denne metoden. Dette er likevel for vagt til å kunne seie at undervisningsmetoden har spelt ei rolle for Ingeborg. I og med at Ingeborg framleis kan forklare med ord korleis mønsteret oppfører seg, og at ho kan bruke symbol for å uttrykke formelen ho kjem fram til, ligg ho framleis på Radford (2010) sitt høgaste generaliseringsnivå, *symbolsk generalisering.*

4.1.5 Oppsummering av utvikling innanfor eksplisitte strategiar

På før-testen tek Kaja, Susanne og Ingeborg utgangspunkt i kvadratet i midten av figuren. Dei brukar strategien *kvadratmetoden.* Det er likevel ein liten skilnad mellom Ingeborg og dei to andre. Der Susanne og Kaja tek utgangspunkt i at det er $n + 2$ perler på kvar side av kvadratet og multipliserer dette med 2, resonnerer Ingeborg seg fram til at «…det er to ekstra rader med n på begge sider av kvadratet.» På bakgrunn av dette finn ho $2n.$ Ho observerer at det er ei perle i kvart hjørne i tillegg, og adderer desse til slutt. Audun ser eit anna mønster i figuren enn dei tre andre. Han tek utgangspunkt i rektangelet i midten, og manglar då berre perlene i kvart hjørne. Audun brukar *rektangelmetoden.* På lik linje med Ingeborg, adderer han dei fire perlene i kvart hjørne til slutt i modellen sin.

Dei fire elevsvara som er presenterte her, viser alle strategiar for å finne eit eksplisitt uttrykk for F_n. Eg har derfor valt å plassere dei i kategorien *eksplisitt.* Å finne ein eksplisitt formel handlar om å sjå eit mønster som kan gje ein formel som gjeld for alle ledd i ei rekke (Mason, 1996).

Audun, Susanne, Kaja og Ingeborg klarar å finne ein eksplisitt formel ved å sjå på det generelle i mønsteret. Der Susanne, Audun og Ingeborg klarar å kommunisere både munnleg og skriftleg om korleis dei har tenkt, slit Kaja litt meir med å forklare seg munnleg om det ho har gjort. Kaja har, slik eg ser det, ingen utfordringar med å bruke det algebraiske språket skriftleg. Alle ligg på Radford (2010) sitt høgaste generaliseringsnivå som han kallar *symbolsk generalisering*.

Det er få endringar å finne frå før-test til etter-test for desse fire elevane. Audun ser to ulike strukturar og kjem opp med ein tredje struktur under intervjuet. Den einaste forskjellen hos Kaja er måten ho ser dei to «beina» i figuren på. Ho ser fyrst dei heile «beina» som ein figur, men i etter-testen deler ho dei opp i to i og med at ho ser dei fire prikkane i ytterkant av figuren for seg sjølv. Susanne teikna figurar på før-test, men ikkje på etter-test, men ho gir uttrykk for at ho har tenkt akkurat likt på dei to testane. Ingeborg ser mønsteret på same måte på begge testane. Både Kaja, Susanne og Ingeborg gir uttrykk for at dei har hatt utbytte av å jobbe i grupper, sjølv om dei ikkje har utvikla seg så mykje frå den eine testen til den andre. Dei poengterer at det er lærerikt å få sjå og høyre korleis andre tenkjer annleis enn dei. Kaja synest det gjekk litt for fort, og ho sleit litt med å henge med. Audun derimot, meiner ikkje at det er gruppearbeidet som er årsaka til at han ser fleire strukturer i mønsteret. Han er meir opptatt av kva førebuingar ein har gjort i forkant av løysing av slike oppgåver, og at det er litt avhengig av dagsform.

5 DRØFTING

I dette kapittelet vil eg drøfte dei ulike funna ut frå det teoretiske rammeverket. Eg vil sjå på kva løysingsstrategiar elevane genererte før og etter undervisningsperioden med Five Practices (Smith & Stein, 2011). Vidare vil eg drøfte om det kjem fram noko i analysen som kan indikere kva rolle undervisningsmetoden har hatt å seie for kva løysingsstrategi elevane har valt å nytte seg av på etter-testen. I studien brukte elevane både rekursive og eksplisitte løysingsstrategiar.

5.1 Rekursive løysingsstrategiar

Rekursive løysingsstrategiar handlar i følgje Mason (1996) og Lannin (2005) om å finne ein lokal regel der ein brukar føregåande ledd i rekka for å finne eit uttrykk for det neste leddet. Denne regelen vert ofte kalla for ein ledd-for-ledd regel (Lannin, 2005). I denne studien er det funne tre ulike rekursive strategiar.

Ein av strategiane som kom fram i analysen var *finne differansen.* Denne strategien handlar om at eleven finn differansen mellom figurane i mønsteret. For å finne denne differansen, må eleven telje talet på perlar i kvar figur. Både Mason (1996) og Lannin (2005) har definert strategien *teljing* som ein rekursiv strategi. Elevane brukar teljing for å prøve å finne ei endring som er felles mellom dei ulike elementa i mønsteret i eit forsøk på å komme opp med ein rekursiv formel (Lannin, 2005; Mason, 1996). Sjølv om elevane finn noko som er felles, møter dei ofte utfordringar når dei skal omsetje observasjonane til ein formel. Det er ikkje nok å sjå eit mønster, ein må også kunne omsetje mønsteret til matematisk språk. Å sjå eit mønster som er matematisk brukbart, er i følgje Lee (1996) ofte avgjerande for at eleven skal kunne oppleve framdrift i arbeidet med mønsteret. Oppgåva med figurmønster i denne masterstudien handla om at elevane skulle finne ein kvadratisk formel. Det er ikkje rett fram å finne ein generell rekursiv formel for dette mønsteret. Dette viste seg også å vere vanskeleg for nokre av elevane i denne studien. Strategiane dei har brukt har ført til at dei finn eit forhold som er likt mellom figurane. Vidare prøvde desse elevane å setje opp ein formel ved hjelp av prøving og feiling utan å lukkast. Å finne felles likskap og prøving og feiling, er strategiar som er kjenneteikn på Radford (2010) sitt aritmetiske generaliseringsnivå. Dette er det lågaste generaliseringsnivået til Radford (2010). På dette nivået kan elevane generalisere noko som er felles for nokre figurar utan å kunne bruke denne informasjonen til å komme fram til eit eksplisitt uttrykk. Dei brukar aritmetikk for å finne det som er felles og har endå ikkje bevega seg inn i det algebraiske landskapet (Radford, 2010).

Strategien *finne differansen* vart brukt på den fyrste testen. Den vert kjenneteikna av at ein brukar teljing for å finne talet på perlar i to påfølgjande figurer. Ein reknar så forskjellen på talet på perlar mellom desse figurane og sit att med differansen. Differansen mellom kvar figur i denne studien er ulik, men avstanden mellom dei ulike differansane er lik. Dette er ein likskap som er observert av dei elevane som brukte denne strategien.

Ein annan strategi som vart funnen er *dobling med justering*. Denne handlar om at ein doblar talet på perler frå figuren før og justerer med å trekke frå det som vert for mykje. Strategien kan likne litt på Lannin (2005) sin eksplisitte strategi *heil-objekt*. Den går ut på at ein brukar ei mindre eining for å finne ei større eining ved hjelp av multiplikasjon. Det kan vere rom for over- og underjustering (Lannin, 2005). Forskjellen er at *dobling med justering* går ut på å finne neste ledd i rekka ved hjelp av det føregåande leddet i rekka, og strategien fører ikkje til at ein kan setje opp eit eksplisitt uttrykk. Justeringa som vert gjort, er ulik for kvar figur, og det fører ikkje fram til nokon observasjon av likskap. På same måte som med *finne differansen*, må ein bruke teljing som strategi for å finne talet på perlar i fyrste figur når ein finn talet ein multipliserer med to. Det same gjeld når ein justerer med ein differanse for å få formelen til å passe til neste figur. Teljing vert definert som ein rekursiv strategi av både Mason (1996) og Lannin (2005). *Dobling med justering* fører ikkje fram til noko uttrykk som kan gjelde for alle figurar. Strategien inneheld element av prøving og feiling utan at det er mogleg å finne noko likskap ein kan bruke vidare i løysinga av oppgåva. Ein brukar tal og ikkje variablar i dei uttrykka ein finn. Ein kan difor plassere *dobling med justering* inn i Radford (2010) sitt lågaste generaliseringsnivå, aritmetisk generalisering, sjølv om det ikkje er observert noko likskap i mønsteret. Strategien inneheld element av prøving og feiling, og ein brukar rein aritmetikk i forsøket på å finne eit mønster. Dette er kjenneteikn ein finn igjen på det aritmetiske generaliseringsnivået (Radford, 2010). Ein kan ikkje observere noko mønster ved å bruke denne strategien, noko som betyr at den ikkje kjem inn under Lee (1996) sitt oppfattingsnivå. Ein ser ikkje eit mønster som er matematisk brukbart, og ein klarar dermed ikkje å omsetje det ein ser til symbol, noko som er kjenneteikn på kategorien oppfattingsnivå (Lee, 1996).

Strategien *dobling med justering* er ein rekursiv strategi som vart funnen på den fyrste testen. Den går ut på at ein doblar talet på perler i fyrste figur, og deretter justerer ein ved å trekke frå det ein har for mykje for å få talet på perler i neste figur. Dette vert gjort mellom kvar figur i mønsteret. Strategien fører ikkje til ein observasjon av likskap, og dermed heller ikkje til eit formelt rekursivt eller eksplisitt uttrykk.

Addisjonsmetoden er den tredje rekursive strategien som vart brukt i studien. Den går ut på at ein brukar figuren i føregåande ledd og legg til differansen mellom denne og neste figur for å finne ein formel for neste figur (Mason, 1996). Dette er ein av Mason (1996) sine rekursive strategiar. Når ein brukar *addisjonsmetoden,* har ein også teke i bruk strategien *teljing* som er den andre av Mason (1996) sine rekursive strategiar. Ein må telje talet på perlar i kvar figur, og ein må i tillegg finne differansen mellom kvar figur. Fleire av elevane klarte å finne differansen, men ikkje alle klarte å setje opp ein lokal regel for kvart ledd i mønsteret ved hjelp av denne differansen. *Addisjonsmetoden* kan hjelpe eleven til å finne ein formel der ein brukar t.d. *n* som variabel. Ved å setje opp formlar for kvar figur, vil ein etter kvart kunne oppdage eit mønster som ein kan bruke til å finne eit formelt uttrykk. Mønsteret er matematisk brukbart i og med at ein kan omsetje det til eit uttrykk med symbol (Lee, 1996). Dersom eleven klarer dette, har han bevega seg opp på Lee (1996) sitt *symboliseringsnivå.* Dette nivået vert kjenneteikna ved at ein klarar å bruke t.d. *n* til representere ein variabel i ei formell løysing som kan vere både rekursiv og eksplisitt (Lee, 1996). *Addisjonsmetoden* kjem inn under Radford (2010) sitt aritmetiske generaliseringsnivå. Han meiner at ikkje all generalisering er algebraisk, og at ikkje all bruk av symbol kan kallast algebraisk aktivitet (Radford, 2010). Det betyr at sjølv om eleven har brukt *n* som symbol for ein variabel i uttrykket, har ikkje dette nødvendigvis ført til at eleven klarer å setje opp eit uttrykk for eit vilkårleg ledd i rekka, som er eit av kjenneteikna for algebraisk generalisering (Radford, 2010).

Addisjonsmetoden kom opp som ein strategi på begge testane. Den vert kjenneteikna ved at eleven tek utgangspunkt i det fyrste leddet i mønsteret og legg til det som manglar for å finne det andre leddet. Tilsvarande brukar han det andre leddet i mønsteret og legg til det som manglar for å få eit uttrykk for det tredje leddet. Slik fortsett ein, og ein finn etter kvart ein lokal regel for kvart ledd i mønsteret. Strategien kan føre til at ein finn eit generelt uttrykk for mønsteret, eit uttrykk som kan vere både rekursivt og eksplisitt. I studien vart det gjort eit forsøk på å finne eit rekursivt uttrykk med *n* som variabel.

5.2 Eksplisitte løysingsstrategiar

Kvadratmetoden går ut på at elevane tek utgangspunkt i kvadratet i midten av figuren. Deretter legg dei til sidene. Det kan skje på to ulike måtar, anten at dei ser heile sidene som eit rektangel, eller deler dei opp i to deler der dei midtarste perlene vert sett for seg og at dei legg til dei fire ytterperlene til slutt. Strategien handlar om at elevane ser på strukturen i mønsteret, deler det opp og set det saman ved å addere delane med kvarandre til slutt. Ved å sjå på strukturen i mønsteret, kan elevane i følgje Küchemann (2010) bli leia til å finne ein formel som gjeld for eit vilkårleg ledd i rekka. Funn i studien visar at elevane som har brukt denne strategien, brukar *n* som variabel, og dei har knytt denne variabelen opp til figurnummeret. På denne måten har dei kome fram til ein formel som gjeld for eit vilkårleg ledd i mønsteret. Strategien kjem dermed inn under Mason (1996) sin eksplisitte kategori, fordi formelen som ein finn, er basert på figurens posisjon i rekka. Denne formelen vert ofte kalla for ein posisjon-til-ledd-formel (Lannin, 2005; Mason, 1996). Strategien kjem også inn under det Confrey og Smith (1994) kallar for korresponderande strategiar. Dette er ei tilnærming der ein oppfattar samanhengen mellom til dømes variabelen og figurnummeret (Confrey & Smith, 1994). Mønsteret som er observert, er matematisk brukbart og kan omsetjast til symbolsk språk, noko som i følgje Lee (1996) er avgjerande for framdrifta i arbeidet med generalisering av mønsteret. Vidare kan strategien plasserast inn under Radford (2010) sitt høgaste generaliseringsnivå, symboliseringsnivå. I studien kom det fram at elevane som brukte denne strategien, var i stand til å forklare formelen både med ord og alfanumeriske symbol, noko som er kjenneteikn på symbolsk generalisering (Radford, 2010).

Kvadratmetoden er ein strategi som vart brukt på begge testane. Kjenneteiknet er at ein ser figuren som ei samansetting av tre eller fire ulike deler, alt etter korleis ein vel å dele opp dei to delane på sida av kvadratet. Dersom ein ser sidene som eit rektangel, ser ein figuren i tre deler, kvadrat og to rektangel. Om ein derimot ser på dei to perlene på kvar side av kvadratet som to deler, og dei fire ytterperlene som ein del, ser ein figuren i fire ulike deler.

Funn i studien viser at dei som har brukt denne strategien, har kome fram til ein eksplisitt formel som gjeld for eit vilkårleg ledd i mønsteret.

Ein annan strategi som vart brukt i studien, er *rektangelmetoden*. Denne strategien går ut på at ein ser rektangelet i midten av figuren som ein del, og at ein deretter legg til dei fire perlene ytst i kvart hjørne på figuren. På same måte som med *kvadratmetoden*, har denne studien vist at bruk av *rektangelmetoden* kan føre fram til ein generell formel som gjeld for ein vilkårleg figur i mønsteret. Den kjem derfor inn under Mason (1996) sin eksplisitte kategori. *Rektangelmetoden* er ein strategi der ein ser ein struktur i mønsteret. Ein brukar geometriske figurer som ein kjenner frå før, noko som gjer det lettare å kome fram til ein eksplisitt formel. I følgje Küchemann (2010) vil det å sjå etter struktur føre til at elevane får auka kompetanse i å bruke oppgåver eller døme dei kjenner frå før. Rektangel er ein geometrisk figur som elevane kjenner arealformelen til gjennom arbeidet med geometri. *Rektangelmetoden* er ein strategi som, i likskap med *kvadratmetoden*, kan kallast ein korresponderande strategi (Confrey & Smith, 1994), i og med at den er ei tilnærming der elevane i studien har sett samanhengen mellom to variablar. Også denne strategien kan sjåast i samanheng med det høgaste generaliseringsnivået til Radford (2010), symbolsk generalisering. På same måte som med *kvadratmetoden*, var elevane som brukte denne strategien i stand til både å setje ord på og bruke symbol for å uttrykke ein eksplisitt formel.

Rektangelmetoden er ein eksplisitt strategi som vert kjenneteikna av at ein isolerer rektangelet sentralt i figuren og legg til dei fire perlene på kvart hjørne til slutt. Strategien vart brukt av ulike elevar på begge testane.

Den tredje strategien som kom opp i denne kategorien er *fullt kvadrat med justering.* Strategien går ut på at ein ser heile figuren som eit fullt kvadrat. Ein ser i starten bort frå at det manglar perler i øvste og nedste rekke. Desse trekk ein frå til slutt. På same måte som med dei to føregåande strategiane, tek ein også her i bruk geometriske figurer for å beskrive strukturen i mønsteret. Funn viser at strategien fører til at ein ser eit mønster som er lett å omsetje til symbolsk språk dersom ein kjenner arealformelen for kvadrat, og dersom ein ser samanhengen mellom dei to variablane. Dette tilfredstillar kjenneteiknet til Confrey og Smith (1994) sitt omgrep korresponderande strategi, i og med at ein ser samanhengen mellom variablane. Det støttar også Küchemann (2010) si tilnærming til generalisering av mønster, i og med at fokuset ligg på strukturen i mønsteret. I likskap med *kvadratmetoden* og *rektangelmetoden*, viser funn at strategien *fullstendig kvadrat med justering* kan plasserast inn i Radford (2010) sitt høgaste algebraiske generaliseringsnivå, symbolsk generaliseringsnivå. Den fører til eit eksplisitt uttrykk som ein uttrykker med alfanumeriske symbol.

Fullstendig kvadrat med justering vert kjenneteikna av at ein ser figuren som eit heilt kvadrat fylt med perler, før ein justerer ved å trekke frå dei perlene som manglar i figuren. Perlene som manglar, vert knytt opp til kvadratet i midten av figuren og korresponderer med figurnummeret. Strategien vart i utgangspunktet ikkje brukt i nokon av testane, men kom fram under eit av intervjua med elevane.

5.3 Oppsummering av rekursive og eksplisitte løysingsstrategiar

Tabellen under viser ei oversikt over dei seks ulike strategiane som vart funnen i denne studien:

REKURSIVE LØYSINGSSSTRATEGIAR	**FORKLARING**
Finne differansen	Eleven har funnet differansen mellom figurane i oppgåva.
Dobling med justering	Eleven doblar talet på perlar i figuren i leddet framfor ved å multiplisere med 2. Deretter justerer eleven ved å trekke frå eller leggje til det som manglar for å få talet på perlar i neste figur
Addisjonsmetoden (Mason, 1996)	Eleven brukar talet på perlar i fyrste figur og adderer det som manglar til neste figur
EKSPLISITTE LØYSINGSSTRATEGIAR	**FORKLARING**
Kvadratmetoden	Eleven brukar kvadratet i midten av figuren som utgangspunkt og legg til sidekantane til slutt.
Rektangelmetoden	Eleven brukar rektangelet i figuren som utgangspunkt og legg til dei 4 ytste kulene til slutt.
Fullt kvadrat med justering	Eleven ser figuren som eit heilt kvadrat og trekk frå dei perlene som manglar i kvadratet.

Tabell 5.1 Oversikt over rekursive og eksplisitte løysingsstrategiar

Strategiane *finne differansen, dobling med justering*, og dei tre eksplisitte strategiane *kvadratmetoden*, *rektangelmetoden* og *fullt kvadrat med justering* er strategiar eg har utvikla sjølv med bakgrunn i innsamla data. Det var vanskeleg å finne strategiar som passar heilt nøyaktig til mine funn i den litteraturen eg har lese. *Addisjonsmetoden* har eg henta frå Mason (1996) i det teoretiske rammeverket.

Dei tre strategiane *finne differansen*, *dobling med justering* og *addisjonsmetoden*, vert alle kjenneteikna med at ein prøver å leite etter ei endring som er felles mellom kvar figur i mønsteret. Funna viser at ikkje alle klarte å sjå eit mønster som var matematisk brukbart, og dei klarte derfor ikkje å kome fram til eit uttrykk som kunne beskrive mønsteret dei var på jakt etter. Når mønsteret ein observerer ikkje er matematisk brukbart, poengterer Lee (1996) at det kan hindre ein i å komme vidare i prosessen mot å finne eit generelt uttrykk, anten det er rekursivt eller eksplisitt. I alle desse tre strategiane viste funna at ein må bruke Mason (1996) og Lannin (2005) sin rekursive strategi *teljing*. Funna viser også at ein har element av strategien *gjett og test*. Lannin (2005) plasserer *gjett og test* under kategorien eksplisitte strategiar, men i denne studien handlar det mest om å gjette seg fram til noko som kan hjelpe elevane til å sjå eit mønster dei kan bruke for å finne eit uttrykk for kvart ledd i rekka. I studien vart alle desse strategiane brukt i samband med aritmetikk. Å leite etter ei endring som er felles mellom figurane i mønsteret, og å gjette og teste seg fram til eit uttrykk som kan passe for eit og eit ledd, er kjenneteikn på Radford (2010) sitt lågaste generaliseringsnivå *aritmetisk generalisering.* Sjølv om funn visar at det vart gjort eit forsøk på å innføre *n* som variabel då desse strategiane vart brukt, er Radford (2010) tydeleg på at aktiviteten ikkje automatisk handlar om algebraisk generalisering, sjølv om ein innfører ein variabel.

Strategiane *kvadratmetoden*, *rektangelmetoden* og *fullt kvadrat med justering* har til felles at ein ser på strukturen i figurmønsteret. Ein deler figuren opp i fleire geometriske former som er kjent frå før. På denne måten vert ein i stand til å setje formlar på kvar del som ein til slutt adderer saman til ein eksplisitt formel som gjeld for ein vilkårleg figur i mønsteret. Dette er sjølvsagt avhengig av at ein ser ei samanheng mellom variabelen og figurnummeret. Funn i studien visar at ein kan finne innslag av *gjett og test* også ved bruk av desse strategiane. Ein prøver seg litt fram for å finne den rette formelen for ein av dei geometriske figurane ein kan finne i mønsteret, utan å tenke over kvifor det må vere slik. Dersom ein ikkje får formelen til å stemme på det eine forsøket, prøver ein med eit anna uttrykk. Dette er kjenneteikn på Lannin (2005) sin eksplisitte strategi *gjett og test*.

Dei eksplisitte strategiane som kjem fram i denne studien, støttar opp om Küchemann (2010) og Wilkie og Clarke (2016) sine tankar rundt korleis ein bør jobbe med generalisering av figurmønster. Dei er einige om at å fokusere på strukturen i eit mønster vil gjere elevane i stand til å utvikle ei sofistikert funksjonell tenking (Küchemann, 2010; Wilkie & Clarke, 2016). Det er dermed ikkje sagt at eksplisitte løysingsstrategiar er einaste vegen å gå i arbeidet med generalisering av figurmønster. I mange tilfelle kan ein rekursiv løysingsstrategi vere det som hjelper eleven på veg i arbeidet med generalisering. Å bruke ei slik tilnærming kan vere ein god start for å trene opp evna til å sjå etter eit mønster. Det kan også vere ein inngangsport til å sjå funksjonelle samanhengar. Ein kan oppfatta at Küchemann (2010) i sin artikkel kritiserer bruken av tabellar, og at ein fokuserer for mykje på steg-for-steg-oppgåver i staden for å gå rett på spørsmål om figur f_n. Han understrekar likevel at rekursive og eksplisitte strategiar kan vere utfyllande for kvarandre. I tillegg vil det vere ein fordel å bruke rekursive strategiar når ein ser på endringar i mønsteret, eller når ein skal undersøke omgrepet stigning i samband med grafar (Küchemann, 2010). Wilkie og Clarke (2016) framhevar også fordelen med å kunne sjå ein struktur i mønsteret. I sin studie fann dei at elevane brukte det Confrey og Smith (1994) kallar *samvariasjon* då dei starta å jobbe med visualisering av mønsteret, i dette tilfellet planter, men at fleire gjekk over til å bruke det Confrey og Smith (1994) kallar ei *korresponderande* tilnærming då dei skulle jobbe med større planter. Dei argumenterer for at ei slik evne til å bruke fleire strategiar samtidig, kan styrke elevane i deira utvikling av funksjonell tenking (Wilkie & Clarke, 2016).

5.4 Observerte endringar i bruk av løysingsstrategi

Tabellane under viser kva type endringar som er observert i denne studien, samt kva elevane har uttrykt om arbeidsmetoden.

	Martin	Pernille	Ingunn	Oskar
Før-test	Rekursiv - addisjonsmetoden	Rekursiv – dobling med justering	Rekursiv finne differansen	Rekursiv finne differansen
Etter-test	Rekursiv – utvikling i matematisk språk, meir systematisert	Eksplisitt – kvadrat-metoden	Eksplisitt - kvadratmetoden	Eksplisitt - rektangelmetoden
Om Five Practices	«Me har lært om følger og rekker» «…under opplegget..» Thomas hadde ideen	Lært av å jobbe med denne typen oppgåver. Krister har vist ho	Har lært fordi «vi har gått gjennom det». Mathias hadde ideen	Har lært fordi «vi har gått gjennom det», «fleire som hadde delt det opp..» Lært av Mathias, tenkte sjølv under diskusjonen

Tabell 5.2. Endringar innan rekursivt og frå rekursivt til eksplisitt

	Audun	Susanne	Kaja	Ingeborg
Før-test	Eksplisitt - rektangelmetoden	Eksplisitt kvadratmetoden	Eksplisitt kvadrat-metoden	Eksplisitt kvadratmetoden
Etter-test	Eksplisitt – kvadratmetoden, fullt kvadrat med justering	Eksplisitt - kvadratmetoden	Eksplisitt - kvadratmetoden	Eksplisitt - kvadratmetoden
Om Five Practices	Har ikkje lært av gruppearbeidet. Har sjeldan eit fast mønster for løysing av slike oppgåver. Handlar om førebuing og dagsform	Å jobbe i grupper gjer at ein kan sjå det på andre måtar. Har lært, får input av andre.	«..me jobba jo i grupper….». Lært av Gabriel og Bjørnar. Lært litt, men det gjekk litt for fort.	«Når du jobber i grupper får du alltid innsyn i koss andre tenker…» «Du tenker på andre måtar når du har snakt med andre da» Har lært av gruppearbeidet. «Får i alle fall innblikk i koss andre tenker og koss du sjøl og kan prøve å tenke liksom»

Tabell 5.3 Endringar innan eksplisitt

Eit viktig funn er at tre av fire elevar endra frå rekursiv til eksplisitt løysingsstrategi frå før-test til etter-test. Desse tre elevane har gått frå å ikkje greie å setje opp eit uttrykk for kvart ledd i rekka, til å klare å finne eit eksplisitt uttrykk som gjeld for eit vilkårleg ledd i rekka. Dei har gått frå eit forsøk på å finne ei endring som er lik mellom kvar figur i mønsteret ved å bruke strategiane *finne differansen* og *dobling med justering*, til å sjå på strukturen til figurane i mønsteret ved å bruke dei eksplisitte kategoriane *kvadratmetoden* og *rektangelmetoden*. Dei har såleis bevega seg frå Mason (1996) sin rekursive kategori til hans eksplisitte kategori. Samtidig har dei flytta seg frå Radford (2010) sitt lågaste generaliseringsnivå, aritmetisk generalisering, til symbolsk generalisering, som er det høgaste generaliseringsnivået Radford (2010) opererer med. Dette er eit interessant funn i og med at desse tre elevane i intervjua gav uttrykk for at dei ikkje ante korleis dei skulle løyse oppgåva på den fyrste testen. Desse elevane forklarte at dei såg mønsteret på ein annan måte på den andre testen. Dei rapporterte at det dei tenkte annleis, var at ein kunne dele figuren opp i fleire delar. Eit av poenga var at dei hadde lært å sjå etter faste mønster som er lette å beskrive, og det vart vist til døme med kvadrat og rektangel. Denne måten å visualisere mønsteret på, støttar Küchemann (2010) sin argumentasjon om at ein bør behandle strukturen til ein av figurane i mønsteret som ein prototype, og at dette fremjar elevens bruk av korresponderande strategiar. Samstundes støttar det opp om at om ein fokuserer på strukturen i mønsteret, vil ein få auka kompetanse i å bruke døme ein har sett før (Küchemann, 2010). Av dei som brukte eksplisitte løysingsstrategiar på den fyrste testen, var det ein som endra til ein annan eksplisitt strategi på den siste testen. I intervjuet kom det også fram ein annan strategi enn dei som vart brukt på sjølve testane. Sett bort frå dette, var det lite endringar innanfor den eksplisitte kategorien.

I teorikapittelet kjem det fram at fleire forskarar innanfor matematikk meiner at arbeid med figurmønster kan vere ein fin innfallsvinkel når ein skal introdusere algebraisk tenking for elevane. Bergsten et al. (1997) skriv at ein kan leggje eit grunnlag for forståing av omgrepet variabel, samt gjere det lettare for elevane å forstå algebraisk generalisering gjennom arbeidet med figurmønster. Lannin (2005) skriv at generalisering av figurmønster kan skape forbindelsar med elevane sine forkunnskapar om aritmetikk, og gje dei erfaring som kan hjelpe dei mot ei forståing av symbolske representasjonar. Elevane i min studie har ikkje jobba med denne typen oppgåver sidan ungdomskulen. Det ligg ikkje i pensum i matematikkursa dei har teke tidlegare på vidaregåande skule. Nokre av elevane meinte til og med at dei ikkje hadde vore borti slike oppgåver før, eller at dei ikkje hugsa om dei hadde jobba med denne typen oppgåver tidlegare. Sjølv om dei tek det høgaste matematikkurset dei kan ta på vidaregåande skule, sleit fleire med forståinga av kva variabelen *n* var og korleis dei skulle bruke den i oppgåva.

Etter prosjektperioden klarte fleire av elevane å generere løysingar på høgaste nivå av algebraisk generalisering etter å ha arbeida med denne typen oppgåver i grupper der elevane har delt sine løysingsstrategiar med kvarandre. Franke et al. (2007) meiner at utvikling av matematisk forståing er avhengig av at elevar får sjanse til å snakke om ulike matematiske representasjonar og å presentere løysingane sine gjennom samtalar i klasserommet. Vidare skriv Skemp (1976) at dersom ein har utvikla ein relasjonell forståing, er det lettare å overføre kunnskapen til andre oppgåver. Elevane som haldt seg innan eksplisitt på begge testane, viste at dei var i stand til å beskrive det generelle i figurmønsteret både med ord og ved bruk av symbol i formlar. Nokre av dei klarte også å sjå fleire ulike mønster. Desse gir inntrykk av å ha ei relasjonell forståing for generalisering av mønster frå før prosjektperioden starta. Fleire av elevane som brukte rekursiv løysingsstrategi på den fyrste testen, gav uttrykk for at dei ikkje visste heilt kor *n* kom inn i bilete og kva ein modell var. På den andre testen klarte fleire av dei å sjå det generelle i figurmønsteret og dei klarte å formulere ein eksplisitt formel for eit vilkårleg ledd i mønsteret. Enkelte uttrykte at dei hadde fått ei betre forståing av kva ein modell var. Dette kan tyde på at dei i løpet av prosjektperioden ser ut til å ha utvikla relasjonell forståing for generalisering av mønster.

Ein av dei sentrale ideane med Five Practices (Smith & Stein, 2011), er at elevane skal bruke kvarandre som ressursar når dei jobbar seg gjennom kognitivt krevjande oppgåver, for så å dele sine strategiar og løysingar i diskusjonar i heil klasse der læraren leiar diskusjonen (Stein et al., 2008). Under prosjektperioden var det ingen teorigjennomgang frå lærar på tavla. Undervisinga handla om gruppearbeid, og elevane delte løysingsstrategiane sine innan kvar gruppe og for resten av klassen i plenum. Det er vanskeleg for meg som forskar å seie noko om det som ikkje er direkte observerbart i dette forskingsprosjektet. Ingen av elevane seier noko direkte om Five Practices (Smith & Stein, 2011) som arbeidsmetode. Dei visar til at «me har gått gjennom det», «då me jobba i grupper» eller «då me repeterte det». Derimot seier fleire elevar noko om gruppearbeidet når dei forklarar kva dei har tenkt annleis og kvifor dei tenker annleis. Elevane som i utgangspunktet brukte rekursive strategiar i denne studien, visar til konkrete elevar som har vist dei korleis dei kan sjå eit mønster i figurane på ein annan måte enn dei såg sjølv. Dei kan også forklare kva dei gjorde, og i nokre tilfelle hugsar dei kva dei sa. Også fleire elevar som haldt seg innanfor den eksplisitte kategorien på begge testane, sette ord på at å jobbe i grupper hadde hatt sin funksjon. Dei meinte at ein på den måten får innsyn i korleis andre tenker, og at dette kan vere med på å bidra til at ein lærer å tenke på andre måtar. Dette bygger opp under grunntanken bak sosiokulturell læringsteori, om at kunnskap vert konstruert i samspel med andre før enkeltindividet kan ta kunnskapen i bruk på eiga hand (Cobb, 2007; Imsen, 1999). Vidare viser elevane til at dei har lært noko i samband med kvifor dei har endra tankegang på den andre testen, men det er ikkje grunnlag for å seie at denne læringa kjem på grunn av undervisningsmetoden. Det er tydeleg at elevane har lært noko, og at dette skjedde under bruk av Five Practices (Smith & Stein, 2011). Eg veit likevel ikkje om dei ville lært like mykje med tradisjonell undervisning. For å kunne finne eit svar på dette, kunne det vore aktuelt å ta opptak på video i to grupper der den eine gruppa gjennomfører tradisjonell undervisning medan den andre gruppa brukar Five Practices (Smith & Stein, 2011). Saman med testane og intervjua, kunne det kanskje gitt eit mykje betre grunnlag for å kunne seie kva rolle Five Practices (Smith & Stein, 2011) spelar for elevens val av løysingsstrategi. I denne studien vart det for omfattande å gjennomføre i tillegg til testane, intervjua og førebuing til undervisninga i to grupper.

6 KONKLUSJON

Under arbeidet med denne masterstudien, har to forskingsspørsmål stått sentralt: *«Kva løysingsstrategiar brukar elevane i arbeid med generalisering av mønster før og etter ein periode med Five Practices?»* og *«Kva rolle spelar Five Practices i elevane si utvikling av løysingsstrategi?»* For å finne svar på desse spørsmåla har eg gjennomført ein undervisningsperiode på åtte timar med Five Practices (Smith & Stein, 2011). Eg gav atten elevar to identiske testar før og etter prosjektperioden. Basert på resultata på testane, plukka eg ut ni elevar til intervju, der enkelte av oppgåvene på testen vart brukt som utgangspunkt. Eg har vidare bearbeida og analysert datamaterialet, og på denne måten prøvd å skaffe meg nok innsikt til å kunne svare på dei to spørsmåla.

Under analysen av datamaterialet, har eg på bakgrunn av elevane sine beskrivingar kategorisert materialet i to hovudkategoriar, *rekursiv* og *eksplisitt*, henta frå Mason (1996) i det teoretiske rammeverket. Under rekursiv kategori har eg plassert tre strategiar, to av dei har eg utvikla sjølv medan ein er henta frå det teoretiske rammeverket: 1) *Finne differansen*, som inneber at ein finn ein differanse mellom kvar figur i eit mønster. 2) *Dobling med justering* handlar om at ein doblar talet på perler i figuren i leddet framfor og justerer ved å subtrahere eller addere det som manglar for å finne talet på perler i neste figur. 3) *Addisjonsmetoden* er henta frå Mason (1996), og som inneber at ein brukar talet på perler i fyrste figur og adderer det som manglar for å få neste figur. Under eksplisitt kategori har eg sjølv utvikla tre strategiar: 1) *Kvadratmetoden* handlar om at ein brukar kvadratet i midten av figuren som utgangspunkt og legg til sidekantane på figuren til slutt. 2) *Rektangelmetoden* inneber at ein ser rektangelet i figuren fyrst og legg til dei fire ytste perlene til slutt. 3) *Fullt kvadrat med justering* betyr at ein ser heile figuren som eit stort kvadrat før ein deretter trekk frå dei perlene som manglar i dette kvadratet.

Eit interessant funn er at fleire elevar endra løysingsstrategi frå den fyrste til den andre testen. Endringar som vart observert hjå nokre av dei som vart plassert i rekursiv kategori på den fyrste testen, var at dei gjekk frå å nytte seg av dei rekursive strategiane *finne differansen* og *dobling med justering* til dei eksplisitte strategiane *kvadratmetoden* og *rektangelmetoden*. Ei anna endring som vart observert var innan den eksplisitte kategorien, der ein gjekk frå *rektangelmetoden* til *kvadratmetoden*. I eit av intervjua kom *fullt kvadrat med justering* fram som ein tredje løysingsstrategi som ikkje vart vist på testane.

I intervjua kom det fram at fleire elevar peikar på at det er ein medelev som har forklart dei korleis dei kan sjå etter eit mønster som er matematisk brukbart. Fleire gir uttrykk for at desse medelevane har vist dei korleis dei kan dele opp mønsteret i fleire deler, slik at dei kan finne ein formel for kvar del og setje desse delane saman til eit felles uttrykk for mønsteret. Det kjem også fram i intervjua at å jobbe saman i grupper med vanskelege oppgåver, gjer at ein får innblikk i korleis andre elevar tenker, og at dette er med på å bidra til at dei sjølv kan lære å tenke annleis enn dei gjorde i utgangspunktet. Dette kan vere eit teikn på at elevane var i stand til å dra nytte av kvarandre sine strategiar gjennom sosial interaksjon med kvarandre der språket er den viktigaste reiskapen. Dette støttar opp om prinsippa bak sosial læringsteori og den proksimale utviklingssona til Vygotsky (Imsen, 1999).

Ved å gjennomføre to identiske testar før og etter ein undervisningsperiode, vil ein få ei god oversikt over kva type løysingsstrategiar elevane brukar. Ein vil også få oversikt over om det har skjedd ei endring i val av løysingsstrategi frå den fyrste til den andre testen. Ved å kategorisere funna i to hovudkategoriar og deretter dele dei inn i spesifikke strategiar, har eg som forskar eit verktøy som eg kan bruke for å få tak i slike endringar i detalj. På dei to testane som vart brukt i denne studien kjem det tydeleg fram kva type løysingsstrategiar elevane brukar, og det kjem tydeleg fram kva type endringar som fann stad frå den fyrste til den andre testen. Mitt fyrste forskingsspørsmål er dermed godt besvart.

Gjennom intervjua med elevane kan ein stille spørsmål som korleis eleven har tenkt, kvifor han har tenkt slik, og kva som har gjort at ei eventuell endring har skjedd. På den måten kan ein danne seg eit bilete av læringsprosessen undervegs. Det kjem tydeleg fram i testane at elevane har lært noko i prosjektperioden i og med at fleire viser positive endringar i evna til å løyse oppgåva. I intervjua har fleire elevar namngitt medelevar som har vist dei korleis dei kan tenke når dei jobbar med generalisering av mønster. Dette kan vere ein indikasjon på at dei har lært av denne måten å jobbe på, men eg har ikkje nok data til å kunne konkludere med kva rolle Five Practices (Smith & Stein, 2011) har å seie for dei endringane dei har vist. Til dette ser eg at eg treng andre typar data i tillegg til dei eg allereie har, som til dømes video-opptak av to grupper der den eine får tradisjonell undervisning og den andre gjennomfører Five Practices (Smith & Stein, 2011). Innanfor mine rammer i dette masterarbeidet, ville det vore vanskeleg å finne tid til.

6.1 Tankar om vegen vidare

Undervegs og i etterkant av dette forskingsprosjektet, har det dukka opp ein del spørsmål som kan vere aktuelt å sjå nærare på. Dette prosjektet gjekk over åtte timar i ein avgrensa periode og for eit avgrensa tema. Det kunne vore interessant å gjennomføre eit liknande prosjekt over ein lengre tidsperiode og innanfor andre tema. I mitt prosjekt vart det ikkje teke lydopptak under sjølve gruppearbeidet. Det var derfor vanskeleg for meg som lærar å få med meg alle diskusjonane som fann stad i klasserommet under dei sekvensane. I eit framtidig prosjekt, kan det vere interessant å gjere dette for å få eit innblikk i korleis elevane brukar det matematiske språket i samhandling med andre.

Eg gjennomførte Five Practices (Smith & Stein, 2011) i to R2-grupper. Dette er elevar som i utgangspunktet er interessert i, og flinke i, matematikk. Det kunne vore interessant å gjennomføre Five Practices (Smith & Stein, 2011) som undervisningsmetode anten på yrkesfag eller i 1P og 2P. Elevane på desse kursa er tradisjonelt svakare i matematikk enn dei som vel realfag, og det kan vere spennande å sjå om dei kan ha eit større utbyte av å samtale i grupper om kognitivt krevjande oppgåver, enn det tradisjonell undervisning kan gje dei. På vår skule er desse gruppene tradisjonelt ein god del større enn dei er i programfaget matematikk, og det kan vere ein ide å sjå korleis Five Practices (Smith & Stein, 2011) vil fungere i store elevgrupper.

Eg gjennomførte Five Practices (Smith & Stein, 2011) på vg3 i vidaregåande skule. Grunnlaget for matematisk forståing vert lagt i grunnskulen. Det bør absolutt vere ein ide å gjennomføre undervisningsmetoden frå tidleg barnetrinn, både med tanke på matematisk forståing, men også med tanke på utvikling av matematisk språk. Ut frå mi erfaring, slit ein del elevar med å ordlegge seg når dei skal forklare korleis dei har tenkt og kvifor dei tenker slik.

Dersom ein har som mål å vise at Five Practices (Smith & Stein, 2011) faktisk verkar, bør ein ha ei kontrollgruppe som får tradisjonell undervisning i same tema og i same periode som Five Practices vert gjennomført. På den måten kan ein få meir kvantitative data som kan seie noko om utviklinga i dei to gruppene. Dersom ein har sjanse til det, kan ein observere, eventuelt ta opptak på video i kvar klasse under prosjektperioden. På den måten vil ein kunne få eit samanlikningsgrunnlag som kan seie noko om kva utbyte elevane har av dei to ulike undervisningsmetodane, og om det er noko forskjell i læringsutbytet mellom dei to måtane å undervise på.

REFERANSAR

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2004). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordic Studies in Mathematics Education, 2*, 39-62.

Bell, A. (1995). Purpose in School Algebra. *JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR, 14*, 41-73.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla* (G. Emanuelsson, B. Rosén, R. Ryding, & K. Wallby Eds.). Göteborg: NCM, Nämnaren.

Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 107-126.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Læringssenteret.

Cobb, P. (2007). Putting Philosophy to Work. Coping with Multiple Theoretical Perspectives. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematical Teaching and learning* (Vol. 1, pp. 3-38). Charlotte: NCTM.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7th ed.). New York: Routledge.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 135-164.

Creswell, J. W. (2012). *Educational Research. Planning, Conducting,and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Creswell, J. W., & Miller, D. (2000). Determining Validity in Qualitative Inquiry. *Theory Into Practice, 39*(3), 124-130.

Dalland, O. (2017). *Metode og oppgaveskriving*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Drageset, O. G. (2014). Korleis leie ein matematisk samtale. *Tangenten*(1), 12-16.

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse – med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempel. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(2), 79-96.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics Teaching and Classroom Practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics and Learning* (pp. 225-256). Charlotte: NCTM.

Grønmo, L. S., & Hole, A. (Eds.). (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken. En nøkkel til å lykkes i realfag.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Hole, A., & Onstad, T. (2016). *Ett skritt fram og ett tilbake: TIMSS Advanced 2015. Matematikk og fysikk i videregående skole.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., & Murray, H. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher, 25*(4), 12-21.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Charlotte: NCTM.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-23). Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Imsen, G. (1999). *Elevens verden*. Oslo: Tano Aschehoug.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In N. Bednarz, Kierand, C & Lee, L (Ed.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 225-236): Dordrecht: Kluwer.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20-32.

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Portland, Maine: Stenhouse Publishers.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. In G. Vernand, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 163-171): Laboratoire PSYDEE.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI study* (pp. 21-33). Dordrecht: Springer.

Kieran, C. (2007). The learning and teaching of school algebra. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390- 419). Charlotte: NCTM.

Kieran, C. (2013). The False Dichotomy in Mathematics Education Between Conceptual Understanding and Procedural Skills: An Example from Algebra. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital directions for Mathematics Education Research* (pp. 153-171). New York: Springer.

Kilpatrick, J. (2001). The Strands of Mathematical Proficiency. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (pp. 115-155). Washington DC: National Academies Press.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Küchemann, D. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: An International Journal, 5*(3), 233-250.

Lampert, M. (2004). Response to Teaching Practice/Teacher Learning Practice Group. In J. Spillane, P. Cobb, & A. Sfard (Eds.), *Investigating the Practice of School Improvement: Theory, Methodology, and Relevance*. Ballgio, Italy.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR, 25*, 299-317.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Lune, H., & Berg, B. L. (2012). *Qualitative research methods for the social sciences*. New Jersey: Pearson Education Inc.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The Effect of Different Approaches to Algebra onStudents' Perceptions of Functional Relationships. *Mathematics Education Research Journal, Vol. 7*(No. 1), 69-85.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2011). *Å lære algebraisk tenking* (J. Lie, Trans.). Bergen: Caspar Forlag AS.

NESH. (2016). Forskingsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi.

Niss, M. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning. From here to Utopia. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1293-1312). Charlotte: NCTM.

Nosrati, M., & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. Retrieved from https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-p%C3%A5-god-l%C3%A6ring-og-undervisning-i-matematikk

Postholm, M. B. (2004). Kvalitativ forskning på praksis. Fra opprinnelse til forskerfokus. *Norsk pedagogisk tidsskrift, 88*(1), 3-18.

Postholm, M. B. (2008). Vygotskys og Bakhtins perspektiver: i teori og praksis. *Norsk pedagogisk tidsskrift, 92*(3), 198-210.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2016). *Læreren med forskerblikk. Innføring i vitenskapelig metode for lærerstudenter*. Oslo: Cappelen Damm.

Radford, L. (2010). Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Teacher to Teacher: Figural and Numerical Modes of Generalizing in algebra. *mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification: The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 191-228.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *Five Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*: The National Council Of Teachers Of Mathematics.

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning. In M. Brekke & T. Tiller (Eds.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen*. Oslo: Universitetsforlaget AS.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Lins (Ed.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141–153). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning,, 10*(4), 313-340.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: Simon & Schuster, Inc.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i utdanningsprogram for studiespesialisering (MAT3-01)*. https://www.udir.no/kl06/MAT3-01.

Vygotskij, L. S. (2001). *Tenkning og tale*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society. The development of psychological prosesses*. Cambridge: Harvard University Press.

Webb, N. (1991). Task-Related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups. *Journal for Reesarch in Mathematics Education, 22*(5), 366-389.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing Students Functional Thinking in Algebra through different Visualisations of a growing Pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*(28), 223-243.

VEDLEGG

Vedlegg 1

Ove Gunnar Drageset
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 21.02.2017	Vår ref: 52117 / 3 / BGH	Deres dato:	Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 12.01.2017. Meldingen gjelder prosjektet:

52117	*Likningsforståing hos elevar på programfag matematikk i den vidaregåande skulen*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Ove Gunnar Drageset*
Student	*Lena Haugland*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 01.07.2018, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Kjersti Haugstvedt　　　　Belinda Gloppen Helle

Kontaktperson: Belinda Gloppen Helle tlf: 55 58 28 74

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS　Harald Hårfagres gate 29　Tel: +47-55 58 21 17　nsd@nsd.no　Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data　NO-5007 Bergen, NORWAY　Faks: +47-55 58 96 50　www.nsd.no

Vedlegg 2

BEKREFTELSE PÅ ENDRING

Vi viser til statusmelding mottatt: 07.10.2018.

Personvernombudet har nå registrert ny dato for prosjektslutt 31.12.2018.

Det legges til grunn at prosjektopplegget for øvrig er uendret.
Ved ny prosjektslutt vil vi rette en ny statushenvendelse.

Hvis det blir aktuelt med
ytterligere forlengelse, gjør vi oppmerksom på at utvalget vanligvis må informeres ved forlengelse på mer enn ett år utover det de tidligere har blitt informert om.

Ta gjerne kontakt dersom
du har spørsmål.

Vennlig hilsen,
Håkon Jørgen Tranvåg - Tlf: 55 58 20 43
Hakon.Tranvag@nsd.no
Personvernombudet for forskning,
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS
Tlf. direkte: (+47) 55 58 21 17 (tast 1)

Vedlegg 3

Informasjonsskriv til elevar

Førespurnad om deltaking i forskingsprosjekt i samband med masteroppgåve

Eg er for tida student ved Universitetet i Bergen og er i gong med ei masteroppgåve innan matematikkdidaktikk. Tema for oppgåva er likningsforståing hos elevar som har valt matematikk som programfag i den vidaregåande skulen. Løysing av likningar inngår i mange emne innanfor matematikken. Som lærar er det viktig at ein har kunnskap om kva utfordringar elevane slit med i samband med likningsløysing slik at ein kan hjelpe dei best mogleg. Eg ønskjer også å sjå på om bruken av ein undervisningsmetode kalla «5 practices» kan hjelpe elevane til å auke sin kompetanse innanfor likningsløysing.

For å undersøke dette, vil eg gjennomføre ein kartleggingstest før eg startar med «5 practices». Deretter vil eg i 2-3 veker gjennomføra den alternative undervisningsmetoden, i tillegg til ordinær undervisning. I slutten av denne perioden, vil de få ein test til. Det er då mogleg å sjå om det har vore ei utvikling i dykkar forståing i denne perioden. Testane vil vare i 30-45 min. På bakgrunn av den siste testen, ønsker eg å intervjue nokre av dykk. I intervjuet vil de mellom anna bli spurt om å fortelja korleis de kom fram til svara på oppgåvene. Eit intervju vil gi meg ei større innsikt og auka kunnskap i korleis de tenker og kva forståing de har for likningsløysing. Det vil bli brukt bandopptakar under intervjuet. Intervjuet vil vare i ca. 30 minuttar.

Det er frivillig å delta, både på dei skriftlege testane og på intervjua. Det vert ikkje registrert sensitive opplysningar under prosjektet. Samtykket kan trekkast tilbake når som helst i prosjektet utan nærare grunngjeving. Det vil ikkje få konsekvensar for deg om du ikkje ønsker å delta.

På den skriftlege testen, vil du bli identifisert med ein kode. Det er kun eg som har tilgang på kodelista. Alle opplysningar vert behandla konfidensielt og dei vert anonymisert. Det vil dermed ikkje vere mogleg å identifisere deltakarane i prosjektet. Ingen einskildpersonar vil kunne kjenne seg igjen i den ferdige oppgåva. Alt materialet som vert samla inn undervegs i prosjektet (testane, lydopptak og transkripsjonar) vert sletta når oppgåva er ferdig, innan 1.juli 2018.

Dersom de har spørsmål til prosjektet, kan de kontakte meg på tlf. [redacted], eller senda ein epost til lena.haugland@skole.rogfk.no . De kan òg ta kontakt med rettleiaren min, førsteamanuensis Ove Gunnar Drageset ved Universitetet i Tromsø, Institutt for lærarutdanning og pedagogikk på tlf [redacted], eller senda ein epost til ove.gunnar.drageset@uit.no

Studien er meldt til Personvernombudet for forsking, NSD - Norsk senter for forskningsdata AS.

Med helsing
Lena S. Haugland

Samtykke til å delta i prosjektet

Eg har motteke informasjon om forskingsprosjektet og ønsker å delta:

Sett kryss:

_____ Eg samtykker til å delta på dei skriftlege testane

_____ Eg samtykker til å delta på intervju

(Dato og signatur)

Vedlegg 4

Intervjuguide

Individuelt semistrukturert intervju – varigheit ca. 30 min.

Tema: Likningsforståing blant elevar i den vidaregåande skulen (vart endra undervegs)

Intervjuet vil basere seg på to identiske testar som elevane har gjennomført i forkant. Det vil derfor vere variasjon i kva oppgåver ein samtalar med elevane om. Intervjuguiden vil vere ganske generell, sidan spørsmål, tema og rekkefølge vil variera.

1. Uformell samtale, informasjon om prosjektet.

2. Her er det du gjorde på test 2. Kan du forklare meg korleis du gjekk fram for å finne svaret på denne oppgåva?
   - Oppfølgingsspørsmål: Kan du seie litt om kvifor du tenkte slik?
   - Kvifor meiner du at det du gjer er rett?

3. Dette er det du gjorde på den fyrste testen. Kan du forklare meg korleis du har tenkt her?
   - Oppfølgingsspørsmål:
     - i. Kan du forklare kvifor du tenkte slik?
     - ii. Kvifor meiner du at det du gjer er rett?
   - Dersom noko er endra
     - i. Kan du seie litt om kva som har endra seg?
     - ii. Kan du forklare kvifor det har skjedd ei endring?
     - iii. Hugsar du kven som hadde ideen?
     - iv. Hugsar du kva han/ho sa?
   - Kan oppgåva løysast på andre måtar?
   - Når du seier….meiner du….eller…..?
   - Du meiner altså at…..?

Intervjuet vert avslutta med å spørje eleven om han har noko anna han vil ta opp, eller om han har spørsmål om det me har snakka om.

Vedlegg 5

Test i likningsforståing Elevnummer:________

Oppgåve 1

Spørsmåla under handlar om følgande uttrykk:

$$5 + 8 = 13$$

$$\uparrow$$

a) Pila over peikar på eit symbol. Kva er namnet på dette symbolet?

b) Kva tyder symbolet?

c) Kan symbolet bety noko anna? Viss ja, gje ei forklaring.

Oppgåve 2

Løys likningane:

a) $x - \sqrt{x^2 - 1} = 1$

b) $3^{4x+1} - 5 = 22$

c) $8\sin^2 t + 2\sin t - 1 = 0$

Oppgåve 3

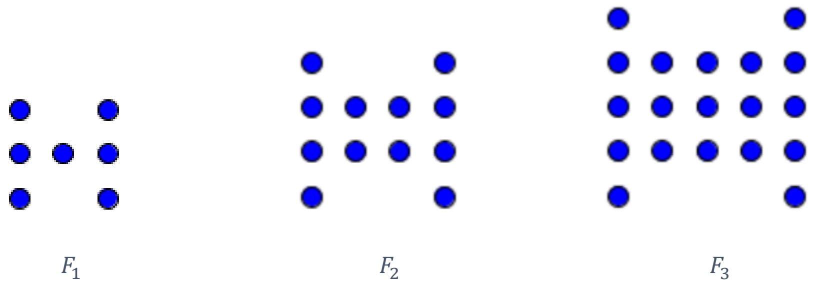
Avgjer om kvar likning er sann eller usann. Grunngje svaret ditt

a) $(p + q)^2 = p^2 + q^2$

b) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

c) $\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{a}{x}\right) - \left(\frac{b}{x}\right)} = \frac{1}{a-b}$

Oppgåve 4



Ole lagar figurar av runde perler. Ovanfor ser du tre figurer F_1, F_2 og F_3.

a) Følg same mønster, og teikn figuren F_4.

b) Sett opp ein modell som viser kor mange perler det vil vere i figur F_n uttrykt ved n.

Ole har totalt 690 perler.

c) Kva er den største figuren av F_n han kan lage?

Oppgåve 5

Du skal lage ei eske utan lokk. Eska skal ha kvadratisk grunnflate med side lik x dm. Høgda skal vere y dm.

Til å lage eska, går det med $16{,}0\ dm^2$ av ei papplate.

Finn det største volumet denne eska kan ha.

[redacted] **VIDAREGÅANDE SKULE**

Lena Haugland

14.02.2017

Deres ref.:

Saksbeh. [redacted]
Direkte innvalg: [redacted]

Saksnr. 17/5092-2
Løpenr. 13819/17
Arkivnr.

SVAR - SØKNAD OM Å FÅ LOV TIL Å FORSKE PÅ ELEVERS LIGNINGSFORSTÅELSE

Søknaden din om å få tillatelse til å forske på elevers ligningsforståelse blitt innvilget.
Vi forutsetter at personvernet blir formelt rett ivaretatt.

Med hilsen

[redacted]
rektor

POSTADRESSE
Postboks 34
[redacted]

BESØKSADRESSE
[redacted]

TELEFON
[redacted]

ORGANISASJONSNR.
[redacted]

E-POST: [redacted]

INTERNETT: [redacted]

Dette dokumentet er godkjent elektronisk og har derfor ingen signatur.