Report (Universitetet i Bergen. Matematisk institutt)

Department of PURE MATHEMATICS

DIE STRUKTUR DER REGULÄREN DARSTELLUNGEN

von

CHRISTOPH KIRFEL

Report No. 50 May 1987

UNIVERSITY OF BERGEN

Bergen, Norway

Department of Mathematics
University of Bergen
5007 Bergen - U
NORWAY

ISSN - 0332-5407

DIE STRUKTUR DER REGULÄREN DARSTELLUNGEN

von

CHRISTOPH KIRFEL

Report No. 50 May 1987

EINLEITUNG.

Reguläre Darstellungen von Zahlen haben eine grosse Bedeutung im Reichweitenproblem, weshalb wir mit der Vorstellung dieses Problems beginnen möchten.

Sei $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge von natürlichen Zahlen mit $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, dann lässt sich jede Zahl $N \in \mathbb{N}$ darstellen als $N = x_k a_k + x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + x_1$, wobei wir $x_j \in \mathbb{N}_0$ voraussetzen wollen. Dabei verstehen wir unter $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich der Null.

Mit hA_k wollen wir die Menge derjenigen Zahlen bezeichnen, die mit höchstens h Summanden aus A_k darstellbar sind:

$$hA_k = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; n = \sum_1^k x_j a_j,\; x_j \in \mathbb{N}_0,\; a_j \in A_k,\; \sum_1^k x_j \leq h \right\}.$$

A_k nennen wir dann eine h-Basis oder einfach eine Basis.

Wir betrachten nun die kleinste Zahl $N \in \mathbb{N}$, die nicht mit höchstens h Summanden aus A_k dargestellt werden kann. Wir nennen $N - 1$ die h-Reichweite $n_h(A_k)$ von A_k:

$$n_h(A_k) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \notin hA_k \right\} - 1.$$

Mit h_0 möchten wir die kleinste Summandenzahl, bei der die Reichweite erstmals das grösste Element a_k überschreitet, bezeichnen:

$$h_0 = h_0^{(k)} = \min \left\{ h \in \mathbb{N} \;\middle|\; n_h(A_k) \geq a_k \right\}.$$

Bei der regulären Darstellung einer Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von A_k verwendet man das grösste Element a_k sooft als möglich, dann das zweitgrösste sooft als möglich u.s.w. Weil $a_1 = 1$, führt dieser Prozess zum Ziel. Reguläre Darstellungen spielen eine grosse Rolle im Reichweitenproblem. Fast alle bekannten Konstruktionen z.B. von "guten Basen" - also solchen mit grosser Reichweite - gehen von regulären Darstellungen zuzüglich einiger weniger zusätzlicher Darstellungen aus. Andererseits macht die Defi-

nition der Regularität, die ja $k - 1$ Bedingungen enthält, nämlich

$$\sum_1^{i-1} x_j a_j < a_i, \quad i = 2, 3, \ldots, k,$$

die Entscheidung, ob eine Darstellung regulär ist oder nicht, nicht einfach. Deshalb kann es von Bedeutung sein, mehr über diese Sorte Darstellungen zu erfahren, was wir hier versuchen wollen.

Beschränkt man sich auf reguläre Darstellungen, so kann man nun auch nach der sogenannten <u>regulären Reichweite</u> $g_h(A_k)$ von A_k fragen, die nur mit regulären Darstellungen erreicht werden soll. Ähnlich stellt sich die Frage nach dem neuen $\tilde{h}_o$, bei dem die reguläre Reichweite erstmals das grösste Element a_k erreicht. (Aus $n_h(A_k) \geqslant g_h(A_k)$ folgt $\tilde{h}_o \geqslant h_o$.) Beide Probleme sind bereits vollständig gelöst, erstmals von Hofmeister [1]. Wir verwenden jedoch die Darstellung aus Kirfel und Selmer [2].

Zur Bestimmung von $\tilde{h}_o$ nund $g_h(A_k)$ muss zunächst folgender Divisionsalgorithmus durchgeführt werden, dessen Algorithmusgrössen wir auch im folgenden laufend benutzen werden:

$$\begin{array}{lr}
a_1 = 1 & \\
a_2 = f_1 a_1, & 0 = r_1 < 1 \\
a_3 = f_2 a_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < a_2 \\
a_4 + r_2 = f_3 a_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < a_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(1) \quad a_{i+2} + r_i = f_{i+1} a_{i+1} + r_{i+1}, & 0 \leqslant r_{i+1} < a_{i+1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_k + r_{k-2} = f_{k-1} a_{k-1} + r_{k-1} & 0 \leqslant r_{k-1} < a_{k-1}.
\end{array}$$

Dann gilt, wie Selmer in [2] zeigt:

$$(2) \quad \tilde{h}_o = \tilde{h}_o^{(k)} = \sum_1^{k-1} (f_j - 1)$$

$$(3)\qquad \begin{cases} g_h(A_k) = (h - \tilde{h}_o)a_k + g_{\tilde{h}_o}(A_k), & h \geqslant \tilde{h}_o - 1 \\ g_{\tilde{h}_o}(A_k) = \sum_1^{k-1}(f_j - 1)a_j + a_k - 1 = 2a_k - r_{k-1} - 2. \end{cases}$$

DIE STRUKTUR DER REGULÄREN DARSTELLUNGEN.

Im folgenden wollen wir nun immer wieder die reguläre Darstellung einer Zahl $N \in \mathbb{N}$, $N < a_k$, nämlich $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ betrachten und möglichst viele Informationen über die x_j sammeln.

Trivialerweise gilt $x_j \leqslant f_j$, da $(f_j + 1)a_j > a_{j+1}$. Dies lässt sich auch noch generalisieren, wie wir in Satz 2 sehen werden.

Wir beginnen mit

SATZ 1. *Sei $N \in \mathbb{N}$, $N < a_k$ und $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ die reguläre Darstellung von N mit A_k. Wir bezeichnen mit $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$ sämtliche Indizes j mit $x_j = f_j$, dann gilt:*

(4) *Es gibt Indizes $1 \leqslant i_1 < q_1$ und $q_{j-1} < i_j < q_j$, $j = 2, 3, \ldots, m$, sodass $x_{i_1} \leqslant f_{i_1} - 2$ und $x_{i_j} \leqslant f_{i_j} - 2$.*

BEWEIS: Wir setzen $q_{j-1} = b$ und $q_j = c$. Dann ist $c = b + 1$ unmöglich, denn

$$f_{b+1}a_{b+1} + f_b a_b = a_{b+2} + r_b - r_{b+1} + a_{b+1} - r_b + r_{b-1} > a_{b+2},$$

was der Regularität der Darstellung widerspricht.

Angenommen $x_j = f_j - 1$, $j = b+1, b+2, \ldots, c-1$, so ist

$$f_c a_c + (f_{c-1} - 1)a_{c-1} + \ldots + (f_{b+1} - 1)a_{b+1} + f_b a_b = a_{c+1} + a_c - r_c + r_{b-1} > a_{c+1},$$

was uns den gleichen Widerspruch wie oben bringt. Also findet sich "zwischen" $x_b = f_b$ und $x_c = f_c$ immer noch ein $x_j \leqslant f_j - 2$, $b < j < c$, und unsere Behauptung (4) ist bewiesen, wenn wir noch bedenken, dass natürlich $q_1 > 1$ und

$$f_{q_1} a_{q_1} + (f_{q_1 - 1} - 1)a_{q_1 - 1} + \ldots + (a_2 - 1) = a_{q_1+1} + a_{q_1} - r_{q_1} - 1 \geqslant a_{q_1+1}.$$

SATZ 2. Sei $N \in \mathbb{N}$, $N < a_k$ und $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ die reguläre Darstellung von N mit A_k, dann gilt:

$$(5) \qquad \sum_q^Q x_j \leq \sum_q^Q (f_j - 1) + 1, \quad 1 \leq q \leq Q < k.$$

BEWEIS: Wie im Beweis von Satz 1 bereits gezeigt, gibt es zwischen q_j und q_{j+1} immer ein i_j mit $x_{i_j} \leq f_{i_j} - 2$. Beim Aufsummieren von aufeinanderfolgenden Koeffizienten überschreitet die Summe also nie $\sum_q^Q (f_j - 1) + 1$.

SATZ 3. Sei $N \in \mathbb{N}$, $N < a_k$ und $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ die reguläre Darstellung von N mit A_k. Gilt für einen Index s:
$x_s = f_s - 2 - d$, für $d \in \mathbb{N}_o$, so gilt $\sum_1^{k-1} x_j \leq \tilde{h}_o - d$.

BEWEIS: Falls $x_j \leq f_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, so ist die Behauptung trivial.

Sei nun $x_j \leq f_j - 1$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \setminus \{q\}$ und $x_q = f_q$, so gilt wieder $\sum_1^{k-1} x_j \leq \tilde{h}_o - d$.

Also können wir annehmen, dass es mehrere Indizes $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$ gibt mit $x_{q_j} = f_{q_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Nach Satz 1 gibt es dann auch Indizes $1 \leq i_1 < q_1$ und $q_{j-1} < i_j < q_j$, $j = 2, 3, \ldots, m$ mit $x_{i_1} \leq f_{i_1} - 2$ und $x_{i_j} \leq f_{i_j} - 2$. Dabei kann s einer dieser Indizes sein und

$$\sum_1^{k-1} x_j \leq \sum_1^{k-1} (f_j - 1) + m - m - d = \tilde{h}_o - d.$$

KOROLLAR. Sei $N \in \mathbb{N}$, $N < a_k$ und $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ die reguläre Darstellung von N mit A_k. Gibt es Indizes s_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ mit $x_{s_j} = f_{s_j} - 2 - d_j$, $d_j \in \mathbb{N}_o$, so ist $\sum_1^{k-1} x_j \leq \tilde{h}_o - \sum_1^p d_j$.

Im folgenden Satz möchten wir diejenigen Zahlen charakterisieren, die in ihrer regulären Darstellung exakt $\tilde{h}_o$ Summanden verwenden und selbst kleiner als das grösste Element a_k sind.

SATZ 4. Sei $N \in \mathbb{N}$, $N < a_k$ und $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ die reguläre Darstellung von N mit A_k und sei $\sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_0$, dann hat N folgende Form:

Entweder a) $x_j = f_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$,

oder b) Es gibt Indizes $1 \leqslant i_1 < q_1 < i_2 < q_2 < \ldots < i_m < q_m$ mit $x_{i_j} = f_{i_j} - 2$, $x_{q_j} = f_{q_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ und $x_i = f_i - 1$ sonst.

BEWEIS: Beide Typen haben die Koeffizientensumme $\tilde{h}_0$. Weiterhin ist auch klar, dass $x_j \leqslant f_j$. Mit Hilfe von Satz 1 und Satz 3 ist die Behauptung dann sofort bewiesen.

SATZ 5. Es gibt höchstens 2^{k-2} Zahlen $< a_k$, die in ihrer regulären Darstellung genau $\tilde{h}_0$ Summanden verwenden

(bzw. $\left|\left\{N \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_k > N = \sum_1^{k-1} x_j a_j \text{ regulär}, \sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_0\right\}\right| \leqslant 2^{k-2}$).

BEWEIS: Wir konstruieren eine Menge P_2 von Zahlen, die alle regulären Darstellungen mit genau $\tilde{h}_0$ Summanden umfasst und leicht abzuzählen ist, u.U. aber zu gross ausfällt. Wir setzen zunächst alle x_j in einer Darstellung gleich $f_j - 1$. Dann wählen wir, ob der Index $1 = i_1$ sein soll oder nicht, und fahren so fort, indem wir für jeden Index entscheiden, ob er zur Menge $M = \{i_1, q_1, i_2, q_2, \ldots, i_m, q_m\}$ gehören soll oder nicht. Dabei können wir frei wählen, müssen nur aufpassen, dass wir insgesamt eine gerade Anzahl von Indizes in der Menge M sammeln. Dabei ergibt sich automatisch aus den bereits vorher gewählten Indizes, ob ein Index zu den i_j oder q_j gehört, ohne dass dies die Wahl beeinflussen würde. Wir benutzen den grössten Index $k-1$ dazu, die Elementezahl in M gerade zu machen, haben dann aber dort keine Wahl mehr, sondern x_{k-1} ist bestimmt. Insgesamt ergeben sich also 2^{k-2} Möglichkeiten, da wir an $k - 2$ Stellen jeweils zwischen zwei Alternativen, $x_j \in M$ oder $x_j = f_j - 1$, entscheiden können.

Man hätte auch anders argumentieren können:

Aus $k - 1$ Indizes werden $2m$ Stück für die Menge M ausgewählt für $m = 0, 1, \ldots, \left[(k-1)/2\right] = K$. Dies kann auf $\sum_0^K \binom{k-1}{2m} = 2^{k-2}$ Arten geschehen, denn wegen $0 = (1-1)^{k-1} = \sum_0^{k-1} (-1)^m \binom{k-1}{m}$ ist $\sum_0^K \binom{k-1}{2m} = \frac{1}{2} \sum_0^{k-1} \binom{k-1}{m} = 2^{k-2}$.

<u>BEMERKUNG</u>: Die in Satz 5 beschriebene Menge P kann oft auch zu viele Elemente enthalten, die wegen der Beschaffenheit der Basis gar nicht als reguläre Darstellungen in Betracht kommen, z.B. wird

$$(f_{k-1} - 1)a_{k-1} + (f_{k-2} - 1)a_{k-2} + \ldots + (f_3 - 1)a_3 + f_2 a_2 + a_2 - 2$$

immer mitgezählt, obwohl diese Darstellung nur im Falle $a_3 = f_2 a_2 + a_2 - 1$ (also bei maximalem r_2) in Frage kommt.

Andererseits kann man immer Basen konstruieren, die genau 2^{k-2} reguläre Darstellungen mit $\tilde{h}_0$ Summanden unterhalb a_k besitzen. Wählt man nämlich $r_j = a_j - 1$, $f_j \geqslant 2$, $j = 2, 3, \ldots, k-1$, so ist dies der Fall.

Möchte man die genaue Anzahl der $\tilde{h}_0$-Darstellungen unterhalb a_k ermitteln, so muss man aus unserer in vielen Fällen zu gross ausfallenden Menge P mit 2^{k-2} Elementen diejenigen $\tilde{h}_0$-Darstellungen

$$x_{k-1} a_{k-1} + \ldots + f_i a_i + \sum_1^{i-1} x_j a_j$$

mit $\sum_1^{i-1} x_j a_j \geqslant r_i - r_{i-1}$ wieder herausnehmen, was sich natürlich in jedem Einzelfall anders gestalten kann. Gilt $r_i - r_{i-1} < 0$, so müssen wir auch die Darstellungen mit $f_i - 1$ an der Stelle von f_i in der obigen Form herausnehmen, falls gilt:

$$(f_i - 1)a_i + \sum_1^{i-1} x_j a_j \geqslant a_{i+1}.$$

Wir möchten nun alle regulären Darstellungen unterhalb a_k mit $\tilde{h}_o - 1$ Summanden konstruieren. Wieder wählen wir $2m$ Indizes aus $k - 1$ für die Menge M aus, und anschliessend vermindern wir einen Koeffizienten um 1. Dies darf jedoch keiner der x_{q_j} sein. Wir haben also höchstens $F = \sum_0^K (k-1-m)\binom{k-1}{2m} = 3(k-1)2^{k-4}$ Möglichkeiten. Dabei haben wir wieder $K = [(k-1)/2]$ gesetzt. Es ist nämlich $G = \sum_0^K m\binom{k-1}{2m} = \frac{(k-1)}{2}\sum_0^K\binom{k-2}{2m-1} = (k-1)2^{k-4}$ und $G + F = (k-1)2^{k-2}$.

SATZ 6. Es gibt höchstens $3(k-1)2^{k-4}$ Zahlen $< a_k$, die in ihrer regulären Darstellung genau $\tilde{h}_o - 1$ Summanden verwenden (bzw. $\left|\left\{ N \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_k > N = \sum_1^{k-1} x_j a_j \text{ reg.}, \sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o - 1\right\}\right| \leq 3(k-1)2^{k-4}$).
Der Beweis ist oben bereits erbracht.

Für $k = 3$ ergeben sich folgende 3 "Kandidaten":

$$m_o = (f_2 - 2)a_2 + a_2 - 1$$
$$m_1 = (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 2$$
$$m_2 = f_2a_2 + a_2 - 3.$$

Für $k = 4$ sind es höchstens 9 Kandidaten:

$$m_o = (f_3 - 2)a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 1$$
$$m_1 = (f_3 - 2)a_3 + f_2a_2 + a_2 - 2$$
$$m_2 = (f_3 - 1)a_3 + (f_2 - 2)a_2 + a_2 - 1$$
$$m_3 = (f_3 - 1)a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 2$$
$$m_4 = (f_3 - 1)a_3 + f_2a_2 + a_2 - 3$$
$$m_5 = f_3a_3 + (f_2 - 3)a_2 + a_2 - 1$$
$$m_6 = f_3a_3 + (f_2 - 2)a_2 + a_2 - 2$$
$$m_7 = f_3a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 3$$

Dabei führen $f_3a_3 + (f_2 - 2)a_2 + a_2 - 1$ und $f_3a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 2$, die ja beide genau $\tilde{h}_o$ Summanden besitzen, bei der entsprechenden Reduktion zu demselben m_6, was auch erklärt, warum wir nicht neun sondern acht Kandidaten erhalten.

Wollen wir nun allgemein Darstellungen mit $\tilde{h}_o - t$ Summanden konstruieren, so wollen wir von einer $\tilde{h}_o$—Darstellung Zahlen

$$Y = \sum_{j \notin \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}}{}_1^{k-1} y_j a_j, \; y_j \in N_o, \; \sum_1^{k-1} y_j = t$$

subtrahieren. Dies lässt sich, wie ein einfaches kombinatorisches Argument zeigt, auf $\binom{k-2+t-m}{t}$ Arten tun. Also erhalten wir höchstens

$$F_t = \sum_0^K \binom{k-2+t-m}{t}\binom{k-1}{2m} \leqslant \binom{k-2+t}{t} 2^{k-2}$$

Möglichkeiten. Denn jede Darstellung mit $\tilde{h}_o - t$ Summanden erfüllt nämlich auch (4) aus Satz 1. Dann können wir durch Hinzufügen von Basiselementen eine Darstellung mit $\tilde{h}_o$ Summanden, wie sie in Satz 5 konstruiert wurde, erhalten. Diese braucht bekanntlich nicht unbedingt regulär zu sein. Auf jeden Fall erhalten wir mit unserer Methode <u>alle</u> $(\tilde{h}_o - t)$-Darstellungen unterhalb a_k, die regulär sind. Insgesamt können wir folgendes festhalten:

<u>SATZ 7. Es gibt höchstens</u> $\binom{k-2+t}{t} 2^{k-2}$ <u>Zahlen</u> $< a_k$, <u>die in ihrer regulären Darstellung genau</u> $\tilde{h}_o - t$ <u>Summanden verwenden</u> (<u>bzw.</u> $\left|\left\{N \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_k > N = \sum_1^{k-1} x_j a_j \text{ reg.}, \sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o - t\right\}\right| \leqslant \binom{k-2+t}{t} 2^{k-2}$).

Der Beweis ergibt sich aus dem vorher gesagten.

Wir möchten nun zeigen, dass man mit Hilfe gewisser Basen alle Zahlen $< 2a_k$ mit $\tilde{h}_o$ Summanden darstellen kann, wobei wir jetzt auch nicht-reguläre Darstellungen zulassen müssen. Bis a_k ist ist dies natürlich möglich. Alle weiteren Zahlen stellen wir als $a_k + N$, $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ dar, wobei wir Regularität der Darstellung voraussetzen möchten. Wir bekommen Schwierigkeiten bei allen N mit $\sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o$, also höchstens 2^{k-2} mal. Kann man für alle solche N eine andere Darstellung von $a_k + N$ mit höchstens $\tilde{h}_o$

Summanden finden, so sind wir fertig.

$k = 3$. Gibt es für

$$n_o = a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 1 \quad \text{und}$$
$$n_1 = a_3 + f_2a_2 + a_2 - 2$$

jeweils eine Darstellung mit höchstens $\tilde{h}_o = a_2 + f_2 - 2$ Summanden, so ist $m_{\tilde{h}_o}(A_3) \geqslant 2a_3$. Dabei taucht n_o in jedem Fall auf, während n_1 nur auftritt, falls $r_2 = a_2 - 1$, also r_2 maximal ist.

$k = 4$. Gibt es für

$$n_o = a_4 + (f_3 - 1)a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 1 = 2a_4 - r_3 - 1$$
$$n_1 = a_4 + (f_3 - 1)a_3 + f_2a_2 + a_2 - 2 = 2a_4 - r_3 + a_2 - 2$$
$$n_2 = a_4 + f_3a_3 + (f_2 - 2)a_2 + a_2 - 1 = 2a_4 - r_3 + a_3 - a_2 - 1$$
$$n_3 = a_4 + f_3a_3 + (f_2 - 1)a_2 + a_2 - 2 = 2a_4 - r_3 + a_3 - 2$$

jeweils eine Darstellung mit höchstens $\tilde{h}_o^{(4)} = a_2 + f_2 + f_3 - 3$ Summanden, so gilt $m_{\tilde{h}_o}(A_4) \geqslant 2a_4$. Dabei tritt n_o immer auf, während n_1 nur vorkommt, wenn $r_2 = a_2 - 1 \leqslant r_3$. Die Zahl n_2 tritt nur auf, falls $r_3 - r_2 > (f_2 - 1)a_2 - 1$, also $r_3 > a_3 - a_2 - 1$, und n_3 nur, falls $r_3 - r_2 > f_2a_2 - 2$, also $r_3 = a_3 - 1$.

Speziell fur $r_2 \leqslant a_2 - 2$ und $r_3 \leqslant a_3 - a_2 - 1$ gilt immer $m_{\tilde{h}_o}(A_4) \geqslant 2a_4$, falls $n_o = g_{\tilde{h}_o}(A_4) + 1 \in \tilde{h}_oA_4$.

Wir möchten dieses Prinzip jetzt ausweiten. Dabei gehen wir von einer regulären $\tilde{h}_o$-Darstellung unterhalb a_k aus und nehmen $m > 0$ an.

$$f_{q_1}a_{q_1} + (f_{q_1-1} - 1)a_{q_1-1} + \ldots + (f_{i_1+1} - 1)a_{i_1+1} + (f_{i_1} - 2)a_{i_1} + \ldots + a_2 - 1$$

ist nur dann eine reguläre Darstellung, wenn

$$r_{q_1} - r_{q_1-1} > \sum_1^{q_1-1} (f_j - 1)a_j - a_{i_1} = a_{q_1} - r_{q_1-1} - 1 - a_{i_1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$r_{q_1} > a_{q_1} - 1 - a_{i_1}.$$

Wir können also folgenden Satz formulieren:

SATZ 8. Gilt $r_j \leq a_j - a_{j-1} - 1$ für $j = 2, 3, \ldots, k-1$, wobei r_j dem Algorithmus (1) entnommen ist, und ist $g_{\tilde{h}_o}(A_k) + 1 \in \tilde{h}_o A_k$, so ist $n_{\tilde{h}_o}(A_k) \geq 2a_k$.
(Natürlich ist dann auch $n_{\tilde{h}_o}(A_k) \geq 2a_k + n_{\tilde{h}_o - 2}(A_k)$.)

BEWEIS: Ist $a_k < N \leq 2a_k$ und $N = a_k + \sum_1^{k-1} x_j a_j$ mit $\sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o$, so ist entweder $m = 0$ und $N = g_{\tilde{h}_o}(A_k) + 1$ oder $m > 0$ und es gibt ein i_1 und ein q_1. Dann tritt aber der oben erwähnte Fall ein, und wir haben einen Widerspruch konstruiert.

Möchte man sogar alle Zahlen bis $3a_k$ mit $\tilde{h}_o$ Summanden darstellen, so müssen wir genau wie oben alle $a_k + N$, wobei $N = \sum_1^{k-1} x_j a_j$ regulär ist, und $\sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o$, sowie alle $2a_k + N$ mit $\sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o$ oder $\sum_1^{k-1} x_j = \tilde{h}_o - 1$ berücksichtigen. Ganz ähnlich wie oben kommt

$f_{q_1} a_{q_1} + \ldots + (f_L - 2) a_L + \ldots + (f_{i_1} - 2) a_{i_1} + \ldots + a_2 - 1$

als reguläre Darstellung erst gar nicht vor, falls $r_{q_1} \leq a_{q_1} - 2a_{q_1 - 1} - 1$.
Gilt also $r_j \leq a_j - 2a_{j-1} - 1$, $j = 2, 3, \ldots, k-1$, so wissen wir, dass $n_{h_o}(A_k) \geq 3a_k$, falls $g_{h_o}(A_k) + 1$, $g_{h_o}(A_k) + a_k + 1$ und alle $2a_k + \sum_1^{k-1} x_j a_j \in \tilde{h}_o A_k$, wobei $x_j = f_j - 1$ für $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \setminus \{i\}$ und $x_i = f_i - 2$.

Diese Resultate möchten wir in einem Satz verallgemeinern:

SATZ 9. Gilt für eine Basis A_k: $r_j \leq a_j - t a_{j-1} - 1$ für $j = 2, 3, \ldots, k-1$ und ein $t \leq \tilde{h}_o$ und sind alle Zahlen der Form $b a_k + \sum_1^{k-1} x_j a_j$ mit $x_j \leq f_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, $b = 1, 2, \ldots, t-1$, in $\tilde{h}_o A_k$ enthalten, so gilt $n_{\tilde{h}_o}(A_k) \geq t a_k$.

BEWEIS: In den regulären Darstellungen mit $\tilde{h}_o, \tilde{h}_o - 1, \ldots, \tilde{h}_o - t + 1$ Summanden ist wegen der scharfen Bedingung für r_j immer $m = 0$, d.h. es kommt kein $x_j = f_j$ vor. Alle übrigen kritischen Darstellungen sind in der zweiten Bedingung enthalten.

LITERATURVERZEICHNIS.

1. G. Hofmeister, Über eine Menge von Abschnittsbasen, J. reine angew. Math. 213 (1963), 43-57.

2. C. Kirfel und E. S. Selmer, Regular h-ranges and weakly pleasant h-bases, Math. Scand. 58 (1986).