

Cellulære oppløsninger av utvalgte klasser av monomialideal

Masteroppgave i matematikk

Jørgen Drejer Thomassen

Matematisk institutt
Universitetet i Bergen



1. juni 2011

Innhold

Innledning	iii
1 Grunnleggende definisjoner	1
1.1 Monomialidealer, komplekser og frie oppløsninger	1
1.2 Simplisielle komplekser	3
1.3 Cellulære oppløsninger	4
1.4 Topologiske egenskaper og homologi	7
1.5 Tor-moduler	8
1.6 Avbildningskjegler	9
2 Ferrersidealer	11
2.1 Ferrersgrafer og kantidealer	11
2.2 Bettitall og primærdekomposisjon av Ferrersidealer	12
2.3 Cellulære oppløsninger av Ferrersidealer	16
2.4 Spesialisering av Ferrersidealer	19
3 Boksoppløsningen	25
3.1 Hypergrafer som delvis ordnede mengder	25
3.2 Kvadratfrie sterkt stabile hypergrafer og Ferrers hypergrafer	27
3.3 Boksoppløsningen	28
4 Kointervallidealer	35
4.1 Kointervallgrafer	35
4.2 Cellulære oppløsninger av kointervallidealer	36
4.3 Oppløsninger av ikke-kointervalle d -grafer	39
4.4 Dimensjonen til komplekset X_H	39
5 Oppløsninger konstruert av polytooper	45
5.1 Oppløsninger støttet av polytooper	45
5.2 Sammenliming av polygoner	47
5.2.1 Sammenliming av to polygoner	53
5.2.2 Sammenliming av tre polygoner	54
5.2.3 Trådkomplekser	56
5.3 Veier videre	60

Innledning

Kombinatorisk kommutativ algebra er en forholdsvis ny og raskt voksende matematisk gren, som kjennetegnes ved bruk av metoder fra kommutativ algebra for å løse kombinatoriske problemer og vice versa. Polyhedral geometri spiller en viktig rolle innenfor dette feltet, spesielt i forbindelse med cellulære oppløsninger, frie oppløsninger av idealer som konstrueres ut fra polyhedrale cellekomplekser. Dette geometriske fundamentet gjør at mange av konseptene lett kan visualiseres, noe som gjør teorien både enklere å forstå og mer interessant å jobbe med.

Oppgaven handler i all hovedsak om hvordan vi kan konstruere cellulære oppløsninger for utvalgte klasser av monomialidealene. Monomialidealene vi ser på i denne oppgaven er stort sett kantidealene, det vil si at strukturen til idealene avhenger av strukturen til en graf. Dette gir oss igjen muligheten til å visualisere materialet vi jobber med. At vi hele tiden kan knytte teorien opp til figurer og diagrammer gir fagfeltet et estetisk aspekt, en god kilde til inspirasjon og motivasjon.

Oppgavens struktur er som følger:

I kapittel 1 innfører vi de sentrale begrepene og definisjonene vi skal bruke i oppgaven, samt noen viktige resultater og konstruksjoner.

I kapittel 2 tar vi for oss to artikler av Alberto Corso og Uwe Nagel som omhandler en spesiell type grafer kalt Ferrersgrafer, og hvordan vi kan konstruere cellulære oppløsninger av kantidealene til disse grafene. Vi ser også på hvordan spesialisering av slike idealer kan gi oss oppløsninger av andre klasser idealer.

I kapittel 3 generaliserer vi mange av resultatene fra kapittel 2, blant annet ser vi på d -partitte Ferrersgrafer i motsetning til bipartitte (spesialtilfellet der $d = 2$). Kapitlet baserer seg i hovedsak på en artikkel av Uwe Nagel og Victor Reiner. Vi ser også på hvordan vi kan konstruere oppløsninger for sterkt stabile og kvadratfrie sterkt stabile idealer.

I kapittel 4 tar vi for oss en ny type grafer, kointervallgrafer, som inneholder klassen av kvadratfritt sterkt stabile hypergrafer som vi ser på i kapittel 3. Vi tar for oss kantidealene til slike grafer, og konstruerer cellulære oppløsninger av disse idealene. Noen av resultatene i dette kapitlet er igjen generaliseringer av tidligere resultater. Kapitlet inneholder mye teori fra en artikkel av Anton Dochtermann og Alexander Engström. Kapitlet inneholder også noen egne resultater, blant annet ser vi på sammenhengen mellom dimensjonen til cellekomplekset vi konstruerer og antall hjørner i kointervallgrafen.

Kapittel 5 inneholder hovedsaklig egne resultater, her ser vi på hvordan vi kan konstruere et ideal som har en oppløsning støttet på et gitt cellekompleks. I all hovedsak fokuserer vi på komplekser som konstrueres ved å lime sammen polygoner.

Takk til

Jeg vil gjerne takke veileder Gunnar Fløystad for hjelp og tips underveis i skriveingen, samt introduksjonen til en interessant del av matematikken. Jeg vil også takke andre forelesere jeg har hatt ved Matematisk Institutt, samt familie og venner for støtte og oppmuntring underveis.

En spesiell takk rettes til Mannskoret Arme Riddere som har gjort studietiden i Bergen helt spesiell.

Kapittel 1

Grunnleggende definisjoner

Definisjonene i dette kapittelet er, om ikke annet er spesifisert, hentet fra [10].

1.1 Monomialideal, komplekser og frie oppløsninger

Vi skal i denne oppgaven stort sett jobbe over polynomringen $S = \mathbb{k}[\mathbf{x}]$, der \mathbf{x} er en samling variable. I eksemplene i dette kapittelet lar vi $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$. Gitt en vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i \mathbb{N}^n , la notasjonen $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ bety $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$.

Definisjon 1.1. Et *monom* eller et *monomial* er et produkt $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Hvis alle koordinatene til \mathbf{a} er enten 0 eller 1 sier vi at monomet $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ er *kvadratfritt*. Et (*kvadratfritt*) *monomialideal* er et ideal $I \subseteq S$ som er generert av (kvadratfrie) monomer.

Definisjon 1.2. Vi lar *støtten* til en vektor \mathbf{a} , $\text{supp}(\mathbf{a})$, være vektoren som har 0 som i -nde koordinat hvis og bare hvis \mathbf{a} har 0 som i -nde koordinat, og 1 som i -nde koordinat hvis ikke.

Vi ser at $\mathbf{x}^{\text{supp}(\mathbf{a})}$ alltid vil være et kvadratfritt monom.

Proposisjon 1.3. *Alle monomialideal er minimalt generert av et endelig antall monomer, og mengden av disse monomene er entydig bestemt.*

Bevis. Se [10], s. 4. □

Denne oppgaven handler i stor grad om å finne minimale frie oppløsninger av monomialideal I og kvotientringer S/I . La oss derfor begynne med å definere disse, samt konseptene de er bygget på.

Vi kommer ofte til å se på S som en gradert ring, og vi benytter oss av to forskjellige graderinger:

- i) S har en \mathbb{N}^n -gradering der $S_{\mathbf{a}}$ er vektorrommet over \mathbb{k} utspent av monomet $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Vi skriver modulen som er lik S bortsett fra at alle elementer har fått \mathbf{a} lagt til graden sin som $S(-\mathbf{a})$, og observerer at $S(-\mathbf{a}) \cong \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \rangle$ som \mathbb{N}^n -graderte moduler.
- ii) S har en \mathbb{N} -gradering der S_d er vektorrommet over \mathbb{k} utspent av monomene $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ der $|\mathbf{a}| = \sum_i a_i = d$. Vi skriver modulen som er lik S bortsett fra at alle elementer har fått d lagt til graden sin som $S(-d)$.

Definisjon 1.4. En *fri S -modul av endelig rang r* er en modul F som er isomorf til en direkte sum

$$S(-\mathbf{a}_1) \oplus \cdots \oplus S(-\mathbf{a}_r)$$

av kopier av S med (mulig) forskjøvet gradering.

Definisjon 1.5. Et *kompleks* er en sekvens

$$\mathcal{F}_\bullet : 0 \xleftarrow{\partial_0} F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\cdots} \cdots \xleftarrow{\partial_{l-1}} F_{l-1} \xleftarrow{\partial_l} F_l \xleftarrow{\cdots} 0 \quad (1.1)$$

av S -moduler og homomorfismer der $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ for alle i . Vi krever også at homomorfismene bevarer grader, slik at elementer i F_i av en bestemt grad avbildes til elementer i F_{i-1} av samme grad. Vi sier at sekvensen er *eksakt i homologisk grad i* hvis $\ker(\partial_i) = \text{im}(\partial_{i+1})$.

Vi er nå klare til å definere frie oppløsninger.

Definisjon 1.6. En *fri oppløsning* av en S -modul M er et kompleks \mathcal{F}_\bullet av frie moduler som er eksakt i alle homologiske grader med unntak av 0, hvor $M = F_0/\text{im}(\partial_1)$. *Lengden* til oppløsningen er den største homologiske graden til en modul i oppløsningen som er forskjellig fra null; hvis vi antar $F_l \neq 0$ i (1.1) så er lengden til oppløsningen l .

Vi kan utvide en oppløsning ved å føye til M på venstre side av komplekset:

$$0 \leftarrow M \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow \cdots,$$

en slik utvidelse er eksakt overalt.

Hvis M er endelig generert har lengden av oppløsningen en øvre skranke, gitt av følgende teorem hentet fra s. 474 i [6]:

Teorem 1.7 (Hilberts syzygyteorem). *Alle endelig genererte (graderte) moduler over $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ har en (gradert) fri oppløsning med lengde $\leq n$.*

Vi kan konstruere en fri oppløsning av en endelig generert modul M ved å la en avbildning fra F_0 til M sende de frie generatorene til den frie modulen F_0 til en mengde som genererer M . La M_1 være kjernen til denne avbildningen, velg en generatormengde for M_1 , og konstruer avbildningen fra F_1 til F_0 slik at de frie generatorene sendes til generatorene til M_1 , osv. Hvis vi hele tiden velger minimale generatorsett for M og M_i får vi en minimal fri oppløsning, som vi definerer under.

Definisjon 1.8. En fri oppløsning gitt ved komplekset \mathcal{F}_\bullet er *minimal* hvis $\text{im}(\partial_i)$ er inneholdt i $(\mathbf{x})F_{i-1}$ for alle i .

Minimale frie oppløsninger av en endelig generert S -modul M er unike opp til isomorfi (se teorem 20.2 i [6]), så rangen til de frie modulene i en slik oppløsning er invarianter av M kalt Bettitall.

Definisjon 1.9. Hvis komplekset \mathcal{F}_\bullet er en minimal fri oppløsning av en endelig generert \mathbb{N}^n -gradert S -modul M , og $F_i = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} S(-\mathbf{a})^{\beta_{i,\mathbf{a}}}$, så er det i -nde *Bettitallet* til M i multigrad \mathbf{a} invarianten $\beta_{i,\mathbf{a}} = \beta_{i,\mathbf{a}}(M)$.

Vi opererer ofte med grovere varianter av Bettitalle, og

$$\beta_{i,d} := \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n, |\mathbf{a}|=d} \beta_{i,\mathbf{a}} \quad \text{og} \quad \beta_i := \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_{i,n}.$$

Vi sier at et ideal I har en d -lineær oppløsning hvis $\beta_{i,j}(I) = 0$ når $j - i \neq d$.

1.2 Simplisielle komplekser

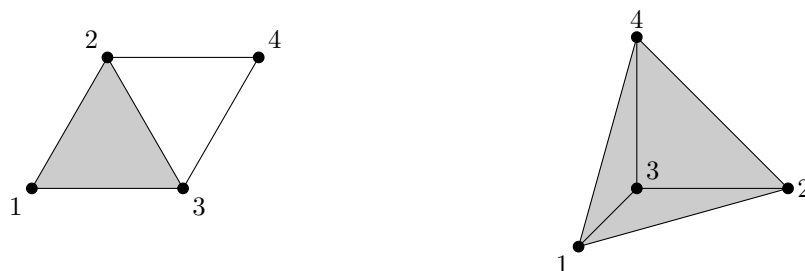
Vi skal assosiere en bestemt type oppløsninger med topologiske objekter kalt polyhedrale cellekomplekser senere i teksten. Vi begynner med å se på en undergruppe av disse kalt simplisielle komplekser, for lettere å oppnå en intuitiv forståelse av konseptene som innføres.

Definisjon 1.10. Et *simplisielt kompleks* Δ på hjørnemengden $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ er en mengde bestående av undermengder av $[n]$, kalt *fjes* i Δ , slik at hvis σ er et fjes i Δ , så er også alle undermengder av σ fjes i Δ .

Et fjes har *dimensjon* i hvis $|\sigma| = i + 1$, vi kaller da σ et i -fjes. Dimensjonen til Δ er lik den maksimale dimensjonen blant fjesene i Δ . Det tomme komplekset $\Delta = \{\emptyset\}$, har dimensjon -1 . Komplekset $\Delta = \{\}$ har dimensjon $-\infty$.

Et fjes i Δ som ikke er inneholdt i et annet fjes kaller vi en *fasett*. Et simplisielt kompleks er entydig bestemt av fasettene, vi kan dermed si at en mengde fasetter genererer et simplisielt kompleks. Et simplisielt kompleks som er generert av én fasett med dimensjon n kaller vi n -simplekset Δ_n .

Eksempel 1.11. I figur 1.1 ser vi geometriske realiseringer av det simplisielle komplekset definert av fasettene $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4\}$ og $\{3, 4\}$ samt simplekset Δ_3 .



Figur 1.1: To eksempler på simplisielle komplekser.

Vi skal nå konstruere et kompleks som i definisjon 1.5 ut fra et simplisielt kompleks Δ . La $F_i(\Delta)$ være mengden av i -fjes i Δ , og la $\mathbb{k}^{F_i(\Delta)}$ være et vektorrom over \mathbb{k} med basiselementer e_σ som tilsvarer i -fjesene σ i $F_i(\Delta)$.

Definisjon 1.12. Det *reduuerte kjedekomplekset* til Δ over \mathbb{k} er komplekset $\tilde{\mathcal{C}}_\bullet(\Delta; \mathbb{k})$ gitt ved

$$0 \leftarrow \mathbb{k}^{F_{-1}(\Delta)} \xleftarrow{\partial_0} \dots \leftarrow \mathbb{k}^{F_{i-1}(\Delta)} \xleftarrow{\partial_i} \mathbb{k}^{F_i(\Delta)} \leftarrow \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} \mathbb{k}^{F_{n-1}(\Delta)} \leftarrow 0, \quad (1.2)$$

der n er kardinaliteten til hjørnemengden til Δ . *Randavbildningene* ∂_i er gitt ved

$$\partial_i(e_\sigma) = \sum_{j \in \sigma} \varepsilon(j, \sigma) e_{\sigma \setminus j},$$

der $\varepsilon(j, \sigma) := (-1)^{r-1}$ hvis j er det r -te elementet i σ , skrevet i stigende rekkefølge.

Eksempel 1.13. Det simplisielle komplekset til venstre i figur 1.1 har det reduserte kjedekomplekset

$$0 \leftarrow \mathbb{k} \leftarrow \mathbb{k}^4 \leftarrow \mathbb{k}^5 \leftarrow \mathbb{k} \leftarrow 0.$$

Et eksempel på en avbildning i dette komplekset er

$$\partial_2(e_{\{1,2,3\}}) = e_{\{1,2\}} - e_{\{1,3\}} + e_{\{2,3\}}.$$

Vi definerer nå homologibegrepet for simplisielle komplekser.

Definisjon 1.14. Den i -nde *reduserte homologigruppen* til Δ over \mathbb{k} er \mathbb{k} -vektorrommet

$$\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{k}) = \ker(\partial_i) / \text{im}(\partial_{i+1}),$$

der ∂_i og ∂_{i+1} er avbildninger fra det reduserte kjedekomplekset til Δ .

1.3 Cellulære oppløsninger

Definisjonen under er hentet fra [15].

Definisjon 1.15. Et *affint underrom* i \mathbb{R}^m er en translasjon av et vektorrom inneholdt i \mathbb{R}^m , og har *dimensjon* lik dimensjonen til det tilhørende vektorrommet.

En delmengde K av \mathbb{R}^m er *konveks* hvis den for hvert par av punkter \mathbf{x}, \mathbf{y} i K også inneholder linja

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

mellom dem.

Den *konvekse innhylningen* til en delmengde $L \in \mathbb{R}^m$ er den minste konvekse delmengden som inneholder L , altså snittet av alle konvekse delmengder som inneholder L .

En *polytop* i \mathbb{R}^m er den konvekse innhylningen til en endelig mengde punkter i \mathbb{R}^m . *Dimensjonen* til en polytop P er lik dimensjonen til den *affine innhylningen* til P , det vil si snittet av alle affine underrom som inneholder P . En polytop med dimensjon d kaller vi en *d -polytop*. Den tomme polytopen $\{\emptyset\}$ har dimensjon -1 .

Et *fjes* i en d -polytop P er snittet av polytopen og et affint underrom med dimensjon $d-1$ som deler den affine innhylningen til P i to slik at P er fullstendig inneholdt i én av de to delene. En *fasett* i en d -polytop P er et fjes i P med dimensjon $d-1$.

Definisjon 1.16. Et *polyhedralt cellekompleks* X er en endelig samling av polytoper (i et reelt vektorrom \mathbb{R}^m), kalt *fjes* i X , der følgende er oppfylt:

- Hvis P er et fjes i X og F er et fjes i P , så er F et fjes i X .
- Hvis P og Q er fjes i X , så er $P \cap Q$ et fjes i både P og Q .

Et i -dimensjonalt fjes i X kaller vi et i -fjes.

Vi ser at den geometriske realiseringen av simplisielle komplekser, som eksemplifisert i figur 1.1, også er polyhedrale cellekomplekser, fra nå av kalt cellekomplekser. En *fasett* i et cellekompleks X er et fjes som ikke er inneholdt i et annet fjes.

Et cellekompleks X har i likhet med et simplisielt kompleks et tilhørende redusert kjedekompleks, gitt ved et kompleks som i (1.2), men der Δ er erstattet med X og n er antallet *hjørner*, altså 0-dimensjonale fjes, i X . For å definere randavbildningene gir vi alle fjes i X en orientering. En orientert polytop i P inducerer orienteringer på fasettene sine, og vi lar funksjonen $\varepsilon(P, Q) = 1$ hvis orienteringen til Q stemmer overens med den induserte orienteringen fra P og $\varepsilon(P, Q) = -1$ hvis ikke. Deretter definerer vi randavbildningene i kjedekomplekset ved

$$\partial_i(e_P) = \sum_{\text{fasetter } Q \text{ i } P} \varepsilon(P, Q)e_Q,$$

der P er et i -fjes i X og e_P og e_Q er basiselementer som tilsvarende fjesene P og Q . Det vi trenger å vite om orientering er at den sørger for at kjedekomplekset til X faktisk blir et kompleks, den som vil vite mer kan for eksempel begynne med ss. 233-239 i [8].

Vi kan også definere reduserte homologigrupper for et cellekompleks på samme måte som vi gjorde for simplisielle komplekser i definisjon 1.14. Vi sier at et cellekompleks er *asyklisk* hvis det er tomt eller hvis alle de reduserte homologigruppene er lik null.

Definisjon 1.17. Hvis vi tilegner eller *merker* hvert hjørne i X med en vektor \mathbf{a} i \mathbb{N}^n får vi et *merket cellekompleks*. Et vilkårlig fjes F i X er merket med eksponentvektoren til minste felles multiplum av monomene $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$ der \mathbf{a}_i er *merkene* til hjørnene i F , vi kaller merket til F for \mathbf{a}_F . Med andre ord er

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_F} = \text{lcm}(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \mid \mathbf{a}_i \text{ er merket til et hjørne i } F).$$

Vi vil også bruke notasjonen m_F for monomet $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_F}$. For å gjøre teksten lettere å lese vil vi bruke merket til F både om m_F og \mathbf{a}_F , hvilken vi mener vil gå klart frem fra konteksten.

Vi definerer nå et nytt kompleks assosiert med et merket cellekompleks X . La $F_i(X)$ være mengden av alle i -fjes i X , som tidligere. Vi definerer den frie modulen

$$S^{F_i(X)} = \bigoplus_{P \in F_i(X)} S(-\mathbf{a}_P) \cdot e_P$$

med basiselementer e_P som tilsvarende i -fjes i X , og avbildningen

$$\partial_i(e_P) = \sum_{\text{fasetter } Q \text{ i } P} \varepsilon(P, Q)\mathbf{x}^{\mathbf{a}_P - \mathbf{a}_Q} e_Q.$$

Definisjon 1.18. Komplekset

$$0 \leftarrow S^{F_{-1}(X)} \xrightarrow{\partial_1} S^{F_0(X)} \xrightarrow{\partial_2} \dots \xrightarrow{\partial_{d+1}} S^{F_d(X)} \leftarrow 0$$

der d er dimensjonen til fjeset i X med størst dimensjon er det *cellulære frie komplekset* \mathcal{F}_X støttet på X . Vi sier at komplekset er en *cellulær oppløsning* dersom det er *asyklisk*, det vil si eksakt i homologisk grad i for alle $i > 0$.¹

¹Her er det lett å rote med begrepene, et kompleks er ikke det samme som et cellekompleks, og kriteriene for asyklisitet er ikke like.

Merk at vi har en forskyvning i hvilke fjes som ligger i hvilken homologisk grad i forhold til kjedekomplekset. I kjedekomplekset ligger basiselementet e_0 i homologisk grad -1 , her ligger det i homologisk grad 0 .

Merknad 1.19. Hvis

$$0 \leftarrow S/I \leftarrow S \xleftarrow{\partial_1} S_1 \xleftarrow{\partial_2} S_2 \leftarrow \dots$$

er en utvidet cellulær oppløsning av kvotientringen S/I så vil

$$0 \leftarrow I \xleftarrow{\partial_1} S_1 \xleftarrow{\partial_2} S_2 \leftarrow \dots$$

være en utvidet oppløsning av I , siden $\text{im}(\partial_1) = I$. Av denne grunn skiller vi ikke alltid tydelig mellom oppløsninger av I og oppløsninger av S/I . Merk også at $\beta_i(S/I) = \beta_{i-1}(I)$.

Gitt to vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$, la $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ bety at $\mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Vi lar $X_{\preceq \mathbf{b}}$ være delkomplekset av X som består av alle fjes F der $\mathbf{a}_F \preceq \mathbf{b}$. Gitt dette kan vi formulere et veldig nyttig resultat som gir oss en måte å undersøke om et cellulært fritt kompleks er en cellulær oppløsning.

Proposisjon 1.20. *Det cellulære frie komplekset \mathcal{F}_X støttet på X er en cellulær oppløsning hvis og bare hvis $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er asyklisk som cellekompleks for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Hvis \mathcal{F}_X er asyklisk, er det en fri oppløsning av S/I , der I er idealet generert av merkene på hjørnene til X .*

Bevis. Vi observerer at siden $(S(-\mathbf{a}))_{\mathbf{b}}$ er lik vektorrommet $\mathbb{k}\{\mathbf{x}^{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\}$ dersom $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ og null hvis ikke, har vi at $(\mathcal{F}_X)_{\mathbf{b}}$ vil sammenfalle med kjedekomplekset til $X_{\preceq \mathbf{b}}$. Dermed vil kriteriene for asyklisitet for \mathcal{F}_X og alle $X_{\preceq \mathbf{b}}$ sammenfalle på grunn av forskyvningen av homologisk grad nevnt tidligere. At \mathcal{F}_X ikke er eksakt i homologisk grad 0 henger sammen med at noen av kompleksene $X_{\preceq \mathbf{b}}$ er tomme, slik at $\tilde{H}_{-1}(X_{\preceq \mathbf{b}}; \mathbb{k}) = \mathbb{k}$.

Hvis \mathcal{F}_X er asyklisk, vil den være en oppløsning av S/I siden $\text{im}(\partial_1) = I$. \square

Eksempel 1.21. (Hentet fra s. 109, [10]). Cellekomplekset X i figur 1.2 har det frie cellulære komplekset

$$0 \leftarrow S \leftarrow S(-2)^3 \oplus S(-3) \leftarrow S(-3) \oplus S(-4)^3 \leftarrow S(-5) \oplus S(-6) \leftarrow 0,$$

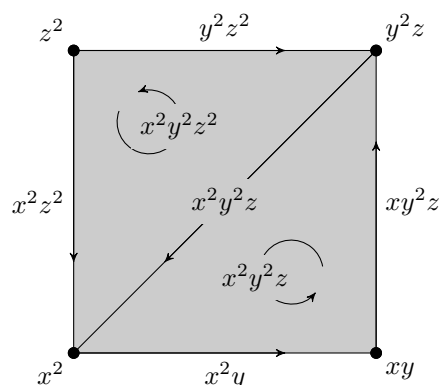
her utstyrt med \mathbb{N} -gradering. Eksempel på en randavbildning er

$$\partial_3(e_{\{x^2, y^2 z, z^2\}}) = y^2 e_{\{x^2, z^2\}} - z e_{\{x^2, y^2 z\}} - x^2 e_{\{y^2 z, z^2\}}.$$

Hvis vi lar $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$ får vi at $X_{\preceq \mathbf{b}}$ består av to punkter. Kjedekomplekset blir

$$0 \leftarrow \mathbb{k} \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{k}^2 \leftarrow 0$$

slik at $\tilde{H}_0(X_{\preceq \mathbf{b}}; \mathbb{k}) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^2 \mid b = -a \right\} \simeq \mathbb{k}$, dermed gir proposisjon 1.20 oss at X ikke støtter en cellulær oppløsning.



Figur 1.2: Et merket cellekompleks.

1.4 Topologiske egenskaper og homologi

Metoden for å sjekke om et cellekompleks $X_{\leq b}$ er asyklisk som vi bruker i eksempel 1.21 blir fort upraktisk for mer avanserte cellekomplekser. Vi ønsker derfor å finne et annet kriterium for asyklisitet. Vi trenger noen topologiske definisjoner, disse er hentet fra [11].

Definisjon 1.22. La X og Y være topologiske rom, og la f og f' være kontinuerlige avbildninger fra X til Y . Vi sier at f er *homotop* til f' hvis det finnes en kontinuerlig avbildning $F : X \times I \rightarrow Y$ der $I = [0, 1]$ slik at

$$F(x, 0) = f(x) \text{ og } F(x, 1) = f'(x)$$

for alle x . F kalles en *homotopi* mellom f og f' . Hvis f er homotop til en konstant avbildning sier vi at f er *nullhomotop*.

Definisjon 1.23. La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow X$ være kontinuerlige avbildninger. Hvis $g \circ f : X \rightarrow X$ er homotop med identitetsavbildningen til X , og $f \circ g : Y \rightarrow Y$ er homotop med identitetsavbildningen til Y , sier vi at f og g er *homotopiekvivalenser*. Hvis det eksisterer slike ekvivalenser mellom to topologiske rom sier vi at disse er *homotopiekvivalente*.

Cellekomplekser er homotopiekvivalente dersom de underliggende topologiske rommene er det. Homotopiekvivalens er interessant for oss på grunn av følgende resultat, hentet fra s. 111 i [8]:

Proposisjon 1.24. Hvis cellekompleksene X og Y er homotopiekvivalente, så er $\tilde{H}_i(X; \mathbb{k}) \simeq \tilde{H}_i(Y; \mathbb{k})$ for alle i .

Definisjon 1.25. Hvis identitetsavbildningen til et topologisk rom X er nullhomotop sier vi at X er *kontraktibelt*. Dette er ekvivalent med å si at X er homotopiekvivalent med et punkt.

Av dette følger kriteriet vi etterlyste i starten av dette delkapittelet:

Lemma 1.26. Hvis cellekomplekset X er kontraktibelt som topologisk rom så er X asyklisk.

Bevis. Siden X er kontraktibelt er det ikke tomt. La P være det simplisielle komplekset bestående av $\{1\}$, da gir proposisjon 1.24 oss at $\tilde{H}_i(X; \mathbb{k}) \simeq \tilde{H}_i(P; \mathbb{k})$ for alle i . P har kjedekomplekset

$$0 \leftarrow \mathbb{k} \xleftarrow{\bar{}} \mathbb{k} \leftarrow 0$$

slik at

$$\tilde{H}_{-1} = \mathbb{k}/\mathbb{k} = 0 \text{ og } \tilde{H}_0 = 0/0 = 0,$$

dermed er X asyklisk. □

Vi ser på et spesielt kompleks, det såkalte Koszul-komplekset.

Definisjon 1.27. *Koszul-komplekset* \mathbb{K}_\bullet for x_1, \dots, x_n i $S = \mathbb{k}[\mathbf{x}]$ er det cellulære frie komplekset støttet på cellekomplekset til simplekset Δ_{n-1} der hjørnene er merket med x_1, \dots, x_n .

Eksempel 1.28. Under ser vi Koszul-komplekset for x_1, \dots, x_4 med \mathbb{N} -gradering.

$$0 \leftarrow S \leftarrow S(-1)^4 \leftarrow S(-2)^6 \leftarrow S(-3)^4 \leftarrow S(-4) \leftarrow 0$$

Vi ser lett at Bettitallene til Koszulkomplekset er gitt ved $\beta_i = \binom{n}{i}$, og at oppløsningen er lineær.

Proposisjon 1.29. *Koszul-komplekset* \mathbb{K}_\bullet er en minimal fri oppløsning av $\mathbb{k} = S/\mathfrak{m}$ der $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$.

Bevis. Siden \mathbb{K}_\bullet er støttet på simplekset Δ_{n-1} vil delkomplekset $(\Delta_{n-1})_{\leq \mathbf{b}}$ være enten tomt eller et simpleks for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Det er velkjent at alle simplekser er kontraktible, så resultatet følger av lemma 1.26 og proposisjon 1.20. □

1.5 Tor-moduler

Såkalte Tor-moduler kan blant annet brukes til å beregne Bettitallene til en modul. Definisjonen av Tor-moduler er hentet fra [13].

Definisjon 1.30. Gitt to S -moduler A og B , og en projektiv oppløsning²

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \rightarrow 0$$

av B . Hvis vi tensorerer A med den projektive oppløsningen av B ,

$$\dots \xrightarrow{A \otimes \partial_3} A \otimes P_2 \xrightarrow{A \otimes \partial_2} A \otimes P_1 \xrightarrow{A \otimes \partial_1} A \otimes P_0 \rightarrow 0,$$

så vil den i -nde Tor-modulen være lik den i -nde homologigruppen til dette komplekset,

$$\mathrm{Tor}_i^S(A, B) := \ker(A \otimes \partial_i) / \mathrm{im}(A \otimes \partial_{i+1}).$$

Vi kan også definere Tor-modulene ved å bruke en projektiv oppløsning av A , tensorere denne med B og deretter beregne homologigruppene. Teorem 7.9 i [14] gir oss at disse definisjonene er ekvivalente. Definisjonene er også uavhengige av valgt oppløsning.

²Vi definerer ikke projektive oppløsninger, men alle frie oppløsninger er projektive, og vi benytter oss av slike i våre utregninger.

Proposisjon 1.31. Hvis $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ er en eksakt sekvens, så er

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_1(A, B) \rightarrow \operatorname{Tor}_1(A, B'') \rightarrow \operatorname{Tor}_0(A, B') \rightarrow \operatorname{Tor}_0(A, B) \rightarrow \operatorname{Tor}_0(A, B'') \rightarrow 0$$

en lang eksakt sekvens.

Hvis $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ er en eksakt sekvens, så er

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_1(A, B) \rightarrow \operatorname{Tor}_1(A'', B) \rightarrow \operatorname{Tor}_0(A', B) \rightarrow \operatorname{Tor}_0(A, B) \rightarrow \operatorname{Tor}_0(A'', B) \rightarrow 0$$

en lang eksakt sekvens.

Bevis. Se [14], s. 221. □

Proposisjon 1.32. Hvis F er en fri S -modul, så er

$$\operatorname{Tor}_i^S(F, B) = \operatorname{Tor}_i^S(A, F) = 0$$

for alle A, B og alle $i \geq 1$.

Bevis. Dette følger av at $0 \leftarrow F \leftarrow 0$ er en fri oppløsning av F . □

Proposisjon 1.33. $\operatorname{Tor}_0(A, B) \simeq A \otimes B$.

Bevis. La $\cdots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ være en utvidet projektiv oppløsning av B . Siden $A \otimes$ er en høyreeksakt funktor så vil

$$A \otimes P_1 \xrightarrow{A \otimes \partial_1} A \otimes P_0 \xrightarrow{A \otimes \pi} A \otimes B \rightarrow 0$$

være en eksakt sekvens. Dermed blir $A \otimes B \simeq A \otimes P_0 / \operatorname{im}(A \otimes \partial_1) = \operatorname{Tor}_0(A, B)$. □

Vi introduserer Tor-modulene fordi vi som tidligere nevnt kan bruke dem til å beregne Bettitall.

Lemma 1.34. Det i -nde Bettitallet til en \mathbb{N}^n -gradert modul M i multigrad \mathbf{a} er lik vektorromdimensjonen $\dim_{\mathbb{k}} \operatorname{Tor}_i^S(\mathbb{k}, M)_{\mathbf{a}}$.

Bevis. La $0 \leftarrow F_0 \leftarrow \cdots \leftarrow F_l \leftarrow 0$ være en minimal fri oppløsning av M . Vi tensorerer denne med \mathbb{k} , og siden $S(-\mathbf{a}) \otimes \mathbb{k} = \mathbb{k}(-\mathbf{a})$ får vi komplekset

$$0 \leftarrow \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \mathbb{k}(-\mathbf{a})^{\beta_{0,\mathbf{a}}} \leftarrow \cdots \leftarrow \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \mathbb{k}(-\mathbf{a})^{\beta_{l,\mathbf{a}}} \leftarrow 0.$$

Alle avbildningene i komplekset er 0 siden avbildningene i den frie oppløsningen alle har verdimensje inneholdt i det maksimale idealet $\mathfrak{m} = (\mathbf{x})$, som er lik null i S -modulen $\mathbb{k} = S/\mathfrak{m}$. Dermed følger resultatet fra definisjonen til Tor-modulene. □

1.6 Avbildningskjetter

Såkalte avbildningskjetter er en annen konstruksjon vi skal benytte oss av i et bevis. Vi trenger først noen flere egenskaper ved komplekser.

Definisjon 1.35. Gitt to komplekser \mathcal{F}_{\bullet} og \mathcal{G}_{\bullet} så er en morfisme mellom disse en sekvens $\varphi_{\bullet} = (\varphi_0, \dots, \varphi_l)$ av homomorfismer $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$ slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_i & \xrightarrow{\partial_i^{\mathcal{F}}} & F_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \varphi_i & & \downarrow \varphi_{i-1} & & \\
\cdots & \longrightarrow & G_i & \xrightarrow{\partial_i^{\mathcal{G}}} & G_{i-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

kommuterer.

Definisjon 1.36. En kort eksakt sekvens av komplekser

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_{\bullet} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_{\bullet} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''_{\bullet} \rightarrow 0$$

er et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F'_i & \xrightarrow{\varphi_i} & F_i & \xrightarrow{\psi_i} & F''_i \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial_{i'} & & \downarrow \partial_i & & \downarrow \partial_{i''} \\
0 & \longrightarrow & F'_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & F_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & F''_{i-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

der hver rad er en eksakt sekvens.

Teorem 1.37. Anta at vi har en kort eksakt sekvens av komplekser

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_{\bullet} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_{\bullet} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}''_{\bullet} \rightarrow 0.$$

Da har vi en lang eksakt sekvens av homologigrupper

$$\cdots H_{i+1}(\mathcal{F}''_{\bullet}) \rightarrow H_i(\mathcal{F}'_{\bullet}) \rightarrow H_i(\mathcal{F}_{\bullet}) \rightarrow H_i(\mathcal{F}''_{\bullet}) \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{F}'_{\bullet}) \rightarrow \cdots$$

Bevis. Se [13], s. 49-51. □

Dermed kan vi definere avbildningskjeglen, denne definisjonen er hentet fra [6], men med en liten endring i randavbildningen.

Definisjon 1.38. Hvis $\varphi_{\bullet} : \mathcal{F}_{\bullet} \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet}$ er en morfisme mellom to komplekser så er *avbildningskjeglen* $\mathcal{M}(\varphi)_{\bullet}$ et kompleks definert ved $M(\varphi)_i = F_{i-1} \oplus G_i$ der randavbildningene er gitt ved

$$\partial_i(f \oplus g) = \partial_{i-1}^{\mathcal{F}}(f) \oplus ((-1)^i \varphi_{i-1}(f) + \partial_i^{\mathcal{G}}(g)).$$

Vi ser fra definisjonen at vi har en naturlig inklusjon av G_i i $M(\varphi)_i$, slik at $M(\varphi)_i/G_i \simeq F_{i-1}$. Vi sier at \mathcal{G}_{\bullet} er et *delkompleks* i $\mathcal{M}(\varphi)_{\bullet}$, og at kvotienten er $\mathcal{F}_{\bullet}[-1]$, komplekset som er definert ved $F[-1]_i = F_{i-1}$. Vi får en kort eksakt sekvens av komplekser,

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_{\bullet} \rightarrow \mathcal{M}(\varphi)_{\bullet} \rightarrow \mathcal{F}_{\bullet}[-1] \rightarrow 0.$$

Legg forøvrig merke til at $H_i(\mathcal{F}_{\bullet}[-1]) = H_{i-1}(\mathcal{F}_{\bullet})$.

Kapittel 2

Ferrersidealer

I dette kapitlet skal vi se på en spesiell klasse monomialidealer kalt Ferrersidealer, samt spesialiseringer av disse, og hvordan vi kan konstruere cellulære oppløsninger for disse idealene.

2.1 Ferrersgrafer og kantidealer

Ferrersidealer oppstår i forbindelse med en spesiell type grafer, kalt Ferrersgrafer. La oss begynne med noen definisjoner knyttet til grafer, hentet fra [1].

Definisjon 2.1. En *enkel graf* G er en ikke-tom hjørnemengde V og en kantmengde E som består av undermengder av V med to elementer,

$$E \subseteq \{X \mid X \subseteq V, |X| = 2\} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}.$$

I vårt tilfelle vil vi som regel la hjørnemengden V bestå av variablene over en polynomring $S = \mathbb{k}[\mathbf{x}]$.

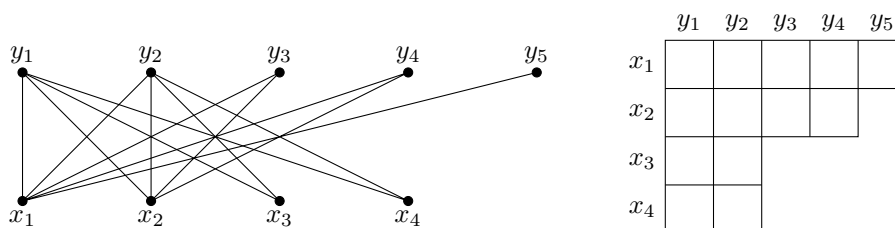
Definisjon 2.2. La x være et hjørne i en graf G . *Graden til x* er antallet kanter i E som inneholder x .

Definisjon 2.3. En graf G er en *bipartitt graf* hvis vi har delmengder X og Y i hjørnemengden V slik at

1. $V = X \cup Y$;
2. $X \cap Y = \emptyset$;
3. alle kantene i E inneholder ett element fra X og ett fra Y .

Vi er nå klare til å definere Ferrersgrafer.

Definisjon 2.4. La $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ og $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. En *Ferrersgraf* G er en bipartitt graf på hjørnemengden $X \cup Y$ slik at hvis (x_i, y_j) er en kant i G , så er (x_p, y_q) også en kant i G for alle $1 \leq p \leq i$ og $1 \leq q \leq j$. I tillegg krever vi at (x_1, y_m) og (x_n, y_1) er kanter i G .



Figur 2.1: Ferrersgrafen og -tablået til $\lambda = (5, 4, 2, 2)$.

En Ferrersgraf gir opphav til en sekvens av naturlige tall $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ der λ_i er graden til hjørnet x_i . Vi ser fra definisjonen at $m = \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1$, med andre ord er λ en *partisjon* av $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

En annen måte å representere en Ferrersgraf på er ved hjelp av et *Ferrers-stablå*, det vil si et diagram T_λ bestående av n rader med celler, der den i -nde raden inneholder λ_i venstrejusterte celler.

Eksempel 2.5. I figur 2.1 ser vi Ferrersgrafene og -tablået assosiert med partisjonen $\lambda = (5, 4, 2, 2)$.

Definisjon 2.6. Hvis vi lar hjørnemengden til en graf G bestå av variabler i en polynomring kan vi definere *kantidealet* til grafen som

$$I(G) = (x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E).$$

Kantidealet til en Ferrersgraf er et kvadratfritt monomialideal i

$$R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

der alle generatorene har grad 2. I delkapittel 2.3 skal vi konstruere en cellulær oppløsning for slike idealer, som vi kaller *Ferrersidealer*.

2.2 Bettitall og primærdekomposisjon av Ferrersidealer

I det følgende lar vi partisjonene assosiert til Ferrersgrafer være

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, 1, \dots, 1)$$

slik at $\lambda_s \geq 2$. Resultatene i dette og neste delkapittel er hentet fra [3].

Teorem 2.7. *La G være en Ferrersgraf med assosiert partisjon*

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, 1, \dots, 1)$$

og la I_λ være kantidealet til G i

$$R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m].$$

Da er

$$(y_1, \dots, y_{\lambda_1}) \cap (x_1, y_1, \dots, y_{\lambda_2}) \cap \dots \cap \\ \cap (x_1, \dots, x_{s-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_s}) \cap (x_1, \dots, x_s, y_1) \cap (x_1, \dots, x_n)$$

en primærdekomposisjon av I_λ . Den minimale \mathbb{N} -graderte frie oppløsningen av R/I_λ er 2-lineær, og det i -nde Bettitallet er gitt ved

$$\beta_i(R/I_\lambda) = \binom{\lambda_1}{i} + \binom{\lambda_2 + 1}{i} + \dots + \binom{\lambda_n + n - 1}{i} - \binom{n}{i+1}$$

for $1 \leq i \leq \max_j \{\lambda_j + j - 1\}$.

Bevis. Vi benytter oss av induksjon på n . Hvis $n = 1$ så er $\lambda = (m)$ og $I_\lambda = x_1(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m) \cap (x_1, y_1) \cap (x_1)$. Oppløsningen av R/I_λ er gitt ved komplekset

$$0 \leftarrow R \xrightarrow{x_1 \cdot \partial_1} R(-2)^m \leftarrow \dots$$

som bortsett fra endringen av den ene avbildningen og skiftet av gradering er helt lik Koszul-komplekset for y_1, \dots, y_m (se def. 1.27), så Bettitalleene til oppløsningen er

$$\beta_i(R/I_\lambda) = \binom{m}{i} = \binom{m}{i} - \binom{1}{i+1},$$

siden den siste binomialkoeffisienten er null.

For $n \geq 2$ skiller vi mellom to tilfeller, der $\lambda_n = 1$ og der $\lambda_n \geq 2$.

Vi lar $\lambda_n = 1$, og ser på partisjonen $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Vi merker oss at s er lik for λ og λ' . Induksjonshypotesen gir oss primærdekomposisjonen

$$I_{\lambda'} = (y_1, \dots, y_{\lambda_1}) \cap (x_1, y_1, \dots, y_{\lambda_2}) \cap \dots \cap \\ \cap (x_1, \dots, x_{s-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_s}) \cap (x_1, \dots, x_s, y_1) \cap (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Vi lar J være snittet av alle komponentene i dekomposisjonen som inneholder $x_n y_1$, slik at $I_{\lambda'} = J \cap (x_1, \dots, x_{n-1})$. Siden $I_\lambda = I_{\lambda'} + (x_n y_1)$ får vi

$$I_\lambda = J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n y_1) \\ = J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1) \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ = J \cap (x_1, \dots, x_n)$$

(den siste likheten holder siden $(x_1, \dots, x_s, y_1) \subseteq (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1)$), som er den ønskede primærdekomposisjonen.

Primærdekomposisjonen over gir oss at $(I_{\lambda'} : x_n y_1) = (x_1, \dots, x_{n-1})$, slik at sekvensen

$$0 \rightarrow R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2] \xrightarrow{x_n y_1} R/I_{\lambda'} \rightarrow R/I_\lambda \rightarrow 0$$

er eksakt. Proposisjon 1.31 gir oss den lange eksakte sekvensen

$$\dots \rightarrow \mathrm{Tor}_i(R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2], \mathbb{k}) \rightarrow \mathrm{Tor}_i(R/I_{\lambda'}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathrm{Tor}_i(R/I_\lambda, \mathbb{k}) \rightarrow \\ \rightarrow \mathrm{Tor}_{i-1}(R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2], \mathbb{k}) \rightarrow \mathrm{Tor}_{i-1}(R/I_{\lambda'}, \mathbb{k}) \rightarrow \dots$$

Siden $R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2]$ har Koszul-komplekset der graderingen er skiftet med to som oppløsning, og $R/I_{\lambda'}$ er 2-lineær ved induksjonshypotesen, gir lemma 1.34 oss at den graderte biten $(\mathrm{Tor}_i(R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2], \mathbb{k}))_j = 0$ for alle

$j \neq i + 2$ og $(\text{Tor}_i(R/I_{\lambda'}, \mathbb{k}))_j = 0$ for alle $j \neq i + 1$. Kombinert med sekvensen over gir dette at $(\text{Tor}_i(R/I_{\lambda}, \mathbb{k}))_j = 0$ for alle $j \neq i + 1$. I tillegg får vi den korte eksakte sekvensen

$$0 \rightarrow (\text{Tor}_i(R/I_{\lambda'}, \mathbb{k}))_{i+1} \rightarrow (\text{Tor}_i(R/I_{\lambda}, \mathbb{k}))_{i+1} \rightarrow (\text{Tor}_{i-1}(R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2], \mathbb{k}))_{i+1} \rightarrow 0,$$

som kombinert med lemma 1.34 gir oss at

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}(R/(x_1, \dots, x_{n-1})[-2]) &= \beta_i(R/I_{\lambda}) - \beta_i(R/I_{\lambda'}) \\ \beta_i(R/I_{\lambda}) &= \binom{\lambda_1}{i} + \binom{\lambda_2}{i} + \dots + \binom{\lambda_{n-1} + n - 2}{i} \\ &\quad - \binom{n-1}{i+1} + \binom{n-1}{i-1}. \end{aligned}$$

Dette er det ønskede resultatet siden

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{i-1} - \binom{n-1}{i+1} &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} - \frac{(n-1)!}{(i+1)!(n-i-2)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot i(i+1) - (n-1)! \cdot (n-i-1)(n-i)}{(i+1)!(n-i)!} \\ &= \frac{n! \cdot (i+1) - n! \cdot (n-i)}{(i+1)!(n-i)!} = \binom{n}{i} - \binom{n}{i+1}. \end{aligned}$$

For tilfellet $\lambda_n \geq 2$ benytter vi induksjon på λ_n .

For $\lambda_n = 2$, la $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)$. Vi har allerede vist at

$$\begin{aligned} I_{\lambda'} &= (y_1, \dots, y_{\lambda_1}) \cap (x_1, y_1, \dots, y_{\lambda_2}) \cap \dots \cap \\ &\quad \cap (x_1, \dots, x_{n-2}, y_1, \dots, y_{\lambda_{n-1}}) \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1) \cap (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

La J være snittet av alle komponentene over som inneholder $x_n y_2$, slik at $I_{\lambda'} = J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1)$. Siden $I_{\lambda} = I_{\lambda'} + (x_n y_2)$ får vi

$$\begin{aligned} I_{\lambda} &= J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, x_n y_2) \\ &= J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2) \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, y_1), \end{aligned}$$

som er den ønskede primærdekomposisjonen. Gitt denne har vi at $(I_{\lambda'} : (x_n y_2)) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1)$, og et tilsvarende argument som tidligere gir oss at

$$\begin{aligned} \beta_i(R/I_{\lambda}) &= \beta_i(R/I_{\lambda'}) + \beta_i(R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1)[-2]) \\ &= \binom{\lambda_1}{i} + \dots + \binom{\lambda_{n-1} + n - 2}{i} + \binom{n}{i} - \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i-1} \\ &= \binom{\lambda_1}{i} + \dots + \binom{\lambda_{n-1} + n - 2}{i} + \binom{2 + (n-1)}{i} - \binom{n}{i+1} \end{aligned}$$

siden $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i} = \binom{2+(n-1)}{i}$.

Hvis $\lambda_n \geq 3$ har vi at både λ og $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n - 1)$ har $s = n$. Induksjonshypotesen gir oss at

$$\begin{aligned} I_{\lambda'} &= (y_1, \dots, y_{\lambda_1}) \cap (x_1, y_1, \dots, y_{\lambda_2}) \cap \dots \cap \\ &\quad \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_{n-1}}) \cap (x_1, \dots, x_n, y_1) \cap (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Vi lar J være snittet av alle komponentene i dekomposisjonen som inneholder $x_n y_n$, slik at $I_{\lambda'} = J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})$. Siden $I_\lambda = I_{\lambda'} + (x_n y_n)$ får vi

$$\begin{aligned} I_\lambda &= J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1}, x_n y_n) \\ &= J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1}, y_{\lambda_n}) \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1}) \\ &= J \cap (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n}), \end{aligned}$$

som er den ønskede primærdekomposisjonen. Gitt denne får vi $(I_{\lambda'} : (x_n y_n)) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})$, og ved samme eksakte sekvens og argument som tidligere får vi

$$\begin{aligned} \beta_i(R/I_\lambda) &= \beta_i(R/I_{\lambda'}) + \beta_{i-1}(R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})[-2]) \\ &= \binom{\lambda_1}{i} + \dots + \binom{\lambda_n - 1 + n - 1}{i} - \binom{n}{i+1} + \binom{n-1 + \lambda_n - 1}{i-1} \\ &= \binom{\lambda_1}{i} + \dots + \binom{\lambda_n + n - 1}{i} - \binom{n}{i+1} \end{aligned}$$

siden $\binom{\lambda_n + n - 2}{i} + \binom{\lambda_n + n - 2}{i-1} = \binom{\lambda_n + n - 1}{i}$. \square

Korollar 2.8. Den irredundante primærdekomposisjonen av Ferrersidealet I_λ er

$$I_\lambda = \bigcap_{i=1}^{t+1} (x_1, \dots, x_{j_i-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_{j_i}}),$$

der parene (j_i, λ_{j_i}) for $i = 1, \dots, t$ svarer til de ytre hjørnene i Ferrerstablået til I_λ , og $j_0 = \lambda_{t+1} = 0$, slik at $(x_1, \dots, x_{j_0}) = (y_1, \dots, y_{\lambda_{j_0}}) = (0)$.

Eksempel 2.9. Vi tar for oss λ fra eksempel 2.5. Den irredundante primærdekomposisjonen av idealet I_λ blir

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \cap (x_1, y_1, y_2, y_3, y_4) \cap (x_1, x_2, y_1, y_2) \cap (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Vi får følgende Bettitall:

$$\begin{aligned} \beta_1(R/I_\lambda) &= \binom{5}{1} + \binom{5}{1} + \binom{4}{1} + \binom{5}{1} - \binom{4}{2} = 13, \\ \beta_2(R/I_\lambda) &= \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} - \binom{4}{3} = 32, \\ \beta_3(R/I_\lambda) &= \binom{5}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} - \binom{4}{4} = 33, \\ \beta_4(R/I_\lambda) &= \binom{5}{4} + \binom{5}{4} + \binom{4}{4} + \binom{5}{4} = 16, \\ \beta_5(R/I_\lambda) &= \binom{5}{5} + \binom{5}{5} + \binom{5}{5} = 3. \end{aligned}$$

Dermed blir den minimale \mathbb{N} -graderte frie oppløsningen på formen

$$0 \leftarrow S(-2) \leftarrow S(-3)^{13} \leftarrow S(-4)^{32} \leftarrow S(-5)^{33} \leftarrow S(-6)^{16} \leftarrow S(-7)^3 \leftarrow 0.$$

2.3 Cellulære oppløsninger av Ferrersidealer

Vi skal nå konstruere en cellulær oppløsning for et generelt Ferrersideal. Vi begynner med å se på den komplette bipartitte grafen $\mathcal{K}_{n,m}$ som svarer til kantidealet $(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_m)$. Til denne grafen assosierer vi cellekomplekset $X_{n,m}$ gitt ved polytopen $\Delta_{n-1} \times \Delta_{m-1}$, det kartesiske produktet av et $(n-1)$ -simpleks og et $(m-1)$ -simpleks. Vi merker hjørnene til Δ_{n-1} med x_1, \dots, x_n og hjørnene til Δ_{m-1} med y_1, \dots, y_m slik at hjørnene i cellekomplekset $X_{n,m}$ på en naturlig måte blir merket med monomene $x_i y_j$ for $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq m$.

Definisjon 2.10. Det *polyhedrale cellekomplekset assosiert til partisjonen* λ er delkomplekset av $X_{m,n}$ bestående av hjørnene som er merket med monomene som genererer Ferrersidealet I_λ , og fjesene som kun består av disse hjørnene.

Teorem 2.11. *Det cellulære frie komplekset \mathcal{F}_{X_λ} støttet på X_λ er en cellulær oppløsning. Denne oppløsningen er den minimale frie \mathbb{N}^{m+n} -graderte oppløsningen til R/I_λ .*

Bevis. Vi bruker induksjon på $|\lambda|$. Siden $\lambda_1 = m$ så er $|\lambda| \geq m$.

Hvis $|\lambda| = m$ så er $X_\lambda = X_{1,m} \simeq \Delta_{m-1}$, og det cellulære frie komplekset blir det skiftede Koszul-komplekset diskutert i beviset til teorem 2.7.

Vi ser på situasjonen når $|\lambda| > m$.

For $k < n + \lambda_n - 2$, la G_{k-1} være den frie R -modulen generert av de k -dimensjonale fjesene i X_λ som inneholder hjørnet $x_n y_{\lambda_n}$. Hvis vi ser på Ferrerstablået T_λ vil et slikt fjes svare til cellene $\{i_1, \dots, i_a\} \times \{j_1, \dots, j_b\}$ der $i_1 < \dots < i_a = n$ og $j_1 < \dots < j_b = \lambda_n$ og $a + b - 2 = k$. Ved hjelp av dette kan vi beregne antallet slike fjes, som svarer til rangen til G_{k-1} :

$$\begin{aligned} \text{rank}(G_{k-1}) &= \sum_{a=1}^{k+1} \binom{n-1}{a-1} \binom{\lambda_n-1}{b-1} = \sum_{a=1}^{k+1} \binom{n-1}{a-1} \binom{\lambda_n-1}{k-a+1} \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{n-1}{j} \binom{\lambda_n-1}{k-j} = \binom{n+\lambda_n-2}{k}, \end{aligned}$$

den siste likheten er Vandermondes identitet.

Beskrivelsen over av et k -dimensjonalt fjes $P \in X_\lambda$ gir oss at vi kan finne fasettene til dette fjeset ved å fjerne en rad eller kolonne fra cellene som beskriver P , slik at fasetten Q er gitt ved cellene $\{i_1, \dots, i_r, \dots, i_a\} \times \{j_1, \dots, j_b\}$ eller $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_a\} \times \{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_b\}$. Dette tilsvarer å fjerne en av variablene i R fra merkingen til P , hvis vi lar l være denne variabelen får vi at $m_P = l \cdot m_Q$, og vi skriver Q som P/l .

Hvis vi lar P være et k -dimensjonalt fjes i X_λ som inneholder hjørnet $x_n y_{\lambda_n}$ får vi at

$$\begin{aligned} \partial_k(e_P) &= \sum_{l|m_P} l \cdot \varepsilon(P/l, P) e_{P/l} \\ &= x_n \cdot \varepsilon(P/x_n, P) e_{P/x_n} + y_{\lambda_n} \cdot \varepsilon(P/y_{\lambda_n}, P) e_{P/y_{\lambda_n}} + \sum_{\substack{l|m_P \\ l \nmid x_n y_{\lambda_n}}} l \cdot \varepsilon(P/l, P) e_{P/l} \\ &= \varphi_{k-1}(e_P) + (-1)^k \delta_{k-1}(e_P), \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned}\varphi_{k-1}(e_P) &= \sum_{\substack{l|m_P \\ l|x_n y_{\lambda_n}}} l \cdot \varepsilon(P/l, P) e_{P/l} \\ \delta_{k-1}(e_P) &= (-1)^k x_n \cdot \varepsilon(P/x_n, P) e_{P/x_n} + (-1)^k y_{\lambda_n} \cdot \varepsilon(P/y_{\lambda_n}, P) e_{P/y_{\lambda_n}}.\end{aligned}$$

Siden $\varphi_{k-1}(e_P)$ er i G_{k-2} kan vi lage en sekvens

$$\mathbb{G}_\bullet : \quad 0 \rightarrow G_{n+\lambda_n-3} \xrightarrow{\varphi_{n+\lambda_n-3}} \cdots \rightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_0 \rightarrow 0,$$

der $\text{im}(\varphi_1) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})$. Ved nærmere inspeksjon ser vi at \mathbb{G}_\bullet er isomorft med Koszul-komplekset på hjørnemengden $x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1}$ der alle gradene er skiftet med -2 . Med andre ord er \mathbb{G}_\bullet en minimal fri oppløsning av $R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})[-2]$.

Beviset til teorem 2.7 viser at gitt en vilkårlig λ så fins det en partisjon λ' slik at $|\lambda'| = \lambda - 1$, $I_\lambda = I_{\lambda'} + (x_n y_{\lambda_n})$ og $(I_{\lambda'} : (x_n y_{\lambda_n})) = (x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})$. Av dette følger det at

$$0 \rightarrow R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})[-2] \xrightarrow{x_n y_{\lambda_n}} R/I_{\lambda'} \rightarrow R/I_\lambda \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

er en kort eksakt sekvens.

For en gitt en basisvektor e_P i G_{k-1} , så vil $\delta_{k-1}(e_P)$ være i $R^{F_{k-1}(X_{\lambda'})}$. Dermed får vi følgende diagram:

$$\begin{array}{ccc} G_{k-2} & \xrightarrow{\delta_{k-2}} & R^{F_{k-2}(X_{\lambda'})} \\ \uparrow \varphi_{k-1} & & \uparrow \partial'_{k-1} \\ G_{k-1} & \xrightarrow{\delta_{k-1}} & R^{F_{k-1}(X_{\lambda'})}, \end{array}$$

her er ∂' randavbildningen til oppløsningen av $R/I_{\lambda'}$ som er gitt ved induksjonshypotesen. Hvis dette diagrammet er kommutativt, gir det oss i følge definisjon 1.35 en morfisme mellom kompleksene \mathbb{G}_\bullet og $\mathcal{F}_{X_{\lambda'}}$. Vi sjekker dette:

$$\begin{aligned}\delta_{k-2}(\varphi_{k-1}(e_P)) &= \delta_{k-2} \left(\sum_{\substack{l|m_P \\ l|x_n y_{\lambda_n}}} l \varepsilon(P, P/l) e_{P/l} \right) \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{\substack{l|m_P \\ l|x_n y_{\lambda_n}}} x_n l \varepsilon(P, P/l) \varepsilon(P/l, P/l x_n) e_{P/l x_n} \\ &\quad + (-1)^{k-1} \sum_{\substack{l|m_P \\ l|x_n y_{\lambda_n}}} y_{\lambda_n} l \varepsilon(P, P/l) \varepsilon(P/l, P/l y_{\lambda_n}) e_{P/l y_{\lambda_n}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial'_{k-1}(\delta_{k-1}(e_P)) &= \partial'_{k-1} \left((-1)^k x_n \varepsilon(P, P/x_n) e_{P/x_n} + (-1)^k y_{\lambda_n} \varepsilon(P, P/y_{\lambda_n}) e_{P/y_{\lambda_n}} \right) \\
&= (-1)^k x_n \varepsilon(P, P/x_n) \sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n}} l \varepsilon(P/x_n, P/lx_n) e_{P/lx_n} \\
&\quad + (-1)^k y_{\lambda_n} \varepsilon(P, P/y_{\lambda_n}) \sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n}} l \varepsilon(P/y_{\lambda_n}, P/ly_{\lambda_n}) e_{P/ly_{\lambda_n}} \\
&= (-1)^k x_n \varepsilon(P, P/x_n) \left(\sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n y_{\lambda_n}}} l \varepsilon(P/x_n, P/lx_n) e_{P/lx_n} + y_{\lambda_n} \varepsilon(P/x_n, P/x_n y_{\lambda_n}) e_{P/x_n y_{\lambda_n}} \right) \\
&\quad + (-1)^k y_{\lambda_n} \varepsilon(P, P/y_{\lambda_n}) \left(\sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n y_{\lambda_n}}} l \varepsilon(P/y_{\lambda_n}, P/ly_{\lambda_n}) e_{P/ly_{\lambda_n}} + x_n \varepsilon(P/y_{\lambda_n}, P/x_n y_{\lambda_n}) e_{P/x_n y_{\lambda_n}} \right) \\
&= (-1)^k x_n \varepsilon(P, P/x_n) \left(\sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n y_{\lambda_n}}} l \varepsilon(P/x_n, P/lx_n) e_{P/lx_n} \right) \\
&\quad + (-1)^k y_{\lambda_n} \varepsilon(P, P/y_{\lambda_n}) \left(\sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n y_{\lambda_n}}} l \varepsilon(P/y_{\lambda_n}, P/ly_{\lambda_n}) e_{P/ly_{\lambda_n}} \right) \\
&= (-1)^{k-1} \sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n y_{\lambda_n}}} x_n l \varepsilon(P, P/l) \varepsilon(P/l, P/lx_n) e_{P/lx_n} \\
&\quad + (-1)^{k-1} \sum_{l \mid \frac{m_P}{x_n y_{\lambda_n}}} y_{\lambda_n} l \varepsilon(P, P/l) \varepsilon(P/l, P/ly_{\lambda_n}) e_{P/ly_{\lambda_n}},
\end{aligned}$$

her er de to siste likhetene en konsekvens av måten ε er definert på, som fører til at

$$\varepsilon(P, P/l) \cdot \varepsilon(P/l, P/lh) + \varepsilon(P, P/h) \cdot \varepsilon(P/h, P/lh) = 0.$$

Siden vi har $\delta_\bullet : \mathbb{G}_\bullet \rightarrow \mathcal{F}_{X_{\lambda'}}$, kan vi definere avbildningskjeglen $\mathcal{M}(\delta)_\bullet$ som i definisjon 1.38, som gir oss den korte eksakte sekvensen

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{X_{\lambda'}} \rightarrow \mathcal{M}(\delta)_\bullet \rightarrow \mathbb{G}_\bullet[-1] \rightarrow 0.$$

Vi vet at $\mathcal{F}_{X_{\lambda'}}$ og \mathbb{G}_\bullet kun har homologi i grad 0, så $\mathbb{G}_\bullet[-1]$ har kun homologi i grad 1. Vi vet også at $H_0(\mathcal{F}_{X_{\lambda'}}) = R/I_{\lambda'}$ og $H_0(\mathbb{G}_\bullet) = H_1(\mathbb{G}_\bullet[-1]) = R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})[-2]$. Kombinert med teorem 1.37 gir dette oss den eksakte sekvensen

$$0 \rightarrow H_1(\mathcal{M}(\delta)_\bullet) \rightarrow R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})[-2] \xrightarrow{\cdot x_n y_{\lambda_n}} R/I_{\lambda'} \rightarrow H_0(\mathcal{M}(\delta)_\bullet) \rightarrow 0.$$

(2.1) gir oss at avbildningen fra $R/(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{\lambda_n-1})[-2]$ til $R/I_{\lambda'}$ er injektiv, slik at $H_1(\mathcal{M}(\delta)_\bullet) = 0$, dermed blir $H_0(\mathcal{M}(\delta)_\bullet) = R/I_{\lambda'}$ (dette følger også av (2.1)), og avbildningskjeglen er en fri oppløsning av $R/I_{\lambda'}$.

Vi ser nå lett at avbildningskjeglen er lik komplekset støttet på $X_{\lambda'}$. Det gjenstår å sjekke at denne oppløsningen er minimal. Vi ser fra definisjon 1.8

at oppløsningen er minimal så lenge ingen fjes med forskjellig dimensjon i X_λ har samme merke. Dette stemmer siden graden til m_P alltid er to mer enn dimensjonen til P , $\deg(m_P) = \dim(P) + 2$, dette følger av at et k -dimensjonalt fjes korresponderer med snittet av a rader og b kolonner i Ferrerstablået T_λ slik at $a + b = k + 2$. \square

2.4 Spesialisering av Ferrersidealer

Oppløsningen vi har funnet for Ferrersidealer kan også brukes til å konstruere cellulære oppløsninger for andre idealer. Disse idealene er såkalte spesialiseringer av Ferrersidealer. Resultatene i dette delkapittelet er hentet fra [4].

Definisjon 2.12. La I være et monomialideal i $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. La $\sigma : \{y_1, \dots, y_m\} \rightarrow \{x_1, \dots, x_k\}$ være en avbildning der $k = \max\{m, n\}$. Vi lar dessuten σ representere homomorfismen

$$\sigma : R \rightarrow S := \mathbb{k}[x_1, \dots, x_k]$$

som er gitt ved avbildningene $x_i \mapsto x_i$ og $y_i \mapsto \sigma(y_i)$. Vi kaller σ *spesialisering*-avbildningen, og sier at $\bar{I} = \sigma(I) \subset S$ er *spesialiseringen* av I .

Generelt vil I og \bar{I} ha ganske ulike egenskaper, vi skal derfor alltid gå ut fra at $m \geq n$ og at σ er gitt ved $\sigma(y_i) = x_i$.

Definisjon 2.13. Gitt partisjonen $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, la $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ være en vektor i \mathbb{N}^n slik at

$$\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n < \lambda_n.$$

Vi definerer det *generaliserte Ferrersidealet*

$$I_{\lambda-\mu} := (x_i y_j \mid 1 \leq i \leq n, \mu_i < j \leq \lambda_i).$$

Generaliserte Ferrersidealer er isomorfe med vanlige Ferrersidealer. Dette ser vi enklest ved et eksempel.

Eksempel 2.14. Gitt $\lambda = (5, 5, 4)$ og $\mu = (1, 1, 2)$ får vi idealet

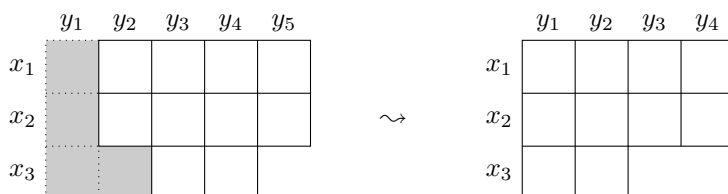
$$I_{\lambda-\mu} = (x_1 y_2, x_1 y_3, x_1 y_4, x_1 y_5, x_2 y_2, x_2 y_3, x_2 y_4, x_2 y_5, x_3 y_3, x_3 y_4).$$

Vi kan tilegne et diagram $T_{\lambda-\mu}$ til dette idealet ved å fjerne de første μ_i cellene i den i -nde raden i Ferrerstablået T_λ . Ved å bytte om på kolonnene i dette diagrammet kan vi lage et nytt Ferrersdiagram for partisjonen $(\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_n - \mu_n)$, dette gir oss isomorfien. I dette tilfellet er $I_{\lambda-\mu}$ isomorf med Ferrersidealet gitt ved $\lambda' = (4, 4, 2)$, isomorfien er gitt ved $y_3 \mapsto y_1$, $y_4 \mapsto y_2$, $y_2 \mapsto y_3$ og $y_5 \mapsto y_4$. Se figur 2.2.

Merk at selv om to generaliserte Ferrersidealer er isomorfe, trenger ikke spesialiseringene å være isomorfe.

Vi kan nå lett beskrive en minimal fri oppløsning av et generalisert Ferrersideal.

Definisjon 2.15. Det *merkede polyhedrale cellekomplekset assosiert til λ og μ* er delkomplekset $X_{\lambda-\mu} \subseteq X_{m,n}$ bestående av hjørnene som er merket med monomene som genererer det generaliserte Ferrersidealet $I_{\lambda-\mu}$, og fjesene som kune består av disse hjørnene.



Figur 2.2: Diagrammet $T_{\lambda-\mu}$ for $\lambda = (5, 5, 4)$ og $\mu = (1, 1, 2)$.

Proposisjon 2.16. *Det cellulære frie komplekset $\mathcal{F}_{X_{\lambda-\mu}}$ er en cellulær oppløsning, og er den minimale frie \mathbb{N}^{m+n} -graderte oppløsningen av $R/I_{\lambda-\mu}$.*

Bevis. Siden $I_{\lambda-\mu}$ er isomorf med et Ferrersideale vil oppløsningen være identisk med oppløsningen fra teorem 2.11, bortsett fra at vi stokker om på variablene y_1, \dots, y_m . \square

Vi ser nå på spesialiseringer av generaliserte Ferrersidealer.

Lemma 2.17. *Anta $\mu_i \geq i - 1$ for $i = 1, \dots, n$. Da har det generaliserte Ferrersidealet $I_{\lambda-\mu}$ og spesialiseringen $\bar{I}_{\lambda-\mu}$ samme antall minimale generatore, gitt ved $|\lambda| - |\mu| = \lambda_1 - \mu_1 + \dots + \lambda_n - \mu_n$.*

Bevis. Resultatet holder hvis spesialiseringsavbildningen er injektiv på mengden av minimale generatore for det generaliserte Ferrersidealet. Siden $x_i y_j$ sendes til $x_i x_j$ må vi sørge for at $I_{\lambda-\mu}$ ikke inneholder både $x_i y_j$ og $x_j y_i$ når $i \neq j$. Disse er speilinger av hverandre for diagonalen i diagrammet $T_{\lambda-\mu}$ som inneholder cellene $x_i y_i$, kravet vi stiller sørger for at alt under denne diagonalen fjernes. \square

Definisjon 2.18. Gitt $X_{\lambda-\mu}$, la $\bar{X}_{\lambda-\mu}$ være cellekomplekset vi får ved å spesialisere merkene til $X_{\lambda-\mu}$.

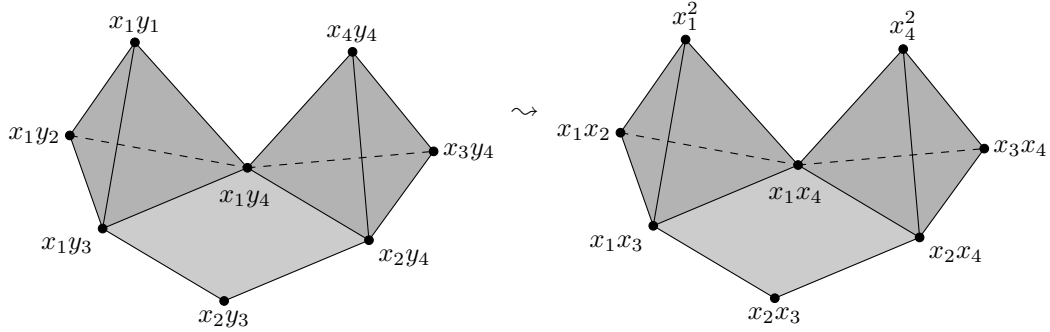
Merk at lemma 2.17 gir oss at ingen hjørner har samme merke dersom kravet på μ er oppfylt.

Eksempel 2.19. Vi lar $\lambda = (4, 4, 4, 4)$ og $\mu = (0, 2, 3, 3)$. Figur 2.3 viser kompleksene $X_{\lambda-\mu}$ og $\bar{X}_{\lambda-\mu}$, som er like bortsett fra merkingen.

Hovedresultatet i dette delkapittelet er det neste teoremet.

Teorem 2.20. *Hvis $\mu_i \geq i - 1$ for $i = 1, \dots, n$ så gir det cellulære frie komplekset $\mathcal{F}_{\bar{X}_{\lambda-\mu}}$ opphav til den minimale frie \mathbb{N}^m -graderte oppløsningen av $S/\bar{I}_{\lambda-\mu}$, der $\bar{I}_{\lambda-\mu}$ er spesialiseringen av det generaliserte Ferrersidealet.*

Bevis. Et fjes i $X_{\lambda-\mu}$ tilsvarer en mengde celler $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\} \times \{y_{j_1}, \dots, y_{j_q}\}$ i diagrammet $T_{\lambda-\mu}$ der $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ og $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m$. Fjeset inneholder dermed pq hjørner, hvert med merke $x_{i_k} y_{j_l}$, der disse merkene alle er generatore i $I_{\lambda-\mu}$. Siden $x_{i_p} y_{j_1}$ er en slik generator, så gir kravet $\mu_i \geq i - 1$ oss at $i_p \leq j_1$. Av dette følger det at $m_F = x_{i_1} \dots x_{i_p} y_{j_1} \dots y_{j_q}$ spesialiseres til $x_{i_1} \dots x_{i_p} x_{j_1} x_{j_q}$, som kun inneholder et kvadrat dersom $i_p = j_1$. Av dette ser vi enkelt at spesialiseringen av m_F er lik minste felles multiplum av spesialiseringene av hjørnene til F .



Figur 2.3: $X_{\lambda-\mu}$ og $\overline{X}_{\lambda-\mu}$ for $\lambda = (4, 4, 4, 4)$ og $\mu = (0, 2, 3, 3)$.

Vi lar nå \bar{c} være en vektor i \mathbb{N}^n , og ser på hjørnene i delkomplekset $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$. Lemma 2.17 gir oss at hvert slikt hjørne korresponderer med et hjørne i $X_{\lambda-\mu}$, men med en annen merking. Vi definerer $\mathbf{c} = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{N}^{n+m}$ slik at $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$ er minste felles multiplum av merkene til hjørnene i $X_{\lambda-\mu}$ som korresponderer til hjørnene i $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$, argumentasjonen i forrige avsnitt gir en metode for å finne disse.

Vi lar notasjonen $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \preceq \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ bety at $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$, og ønsker å vise at $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$ er lik spesialiseringen av $(X_{\lambda-\mu})_{\preceq \mathbf{c}}$.

La F være et fjes i $(X_{\lambda-\mu})_{\preceq \mathbf{c}}$. Definisjonen av \mathbf{c} gir oss at merkene til hjørnene i F spesialiseres til monomer $x_{i_k}x_{j_l} \preceq \mathbf{x}^{\bar{c}}$. Hvis vi lar $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ være minste felles multiplum av disse merkene, så vil $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \preceq \mathbf{x}^{\bar{c}}$. Første avsnitt av beviset gir oss at $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ er spesialiseringen av m_F , slik at F korresponderer med et av fjesene i $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$.

La nå \overline{F} være et fjes i $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$. Definisjonen av \mathbf{c} gir at hjørnene i \overline{F} korresponderer til hjørner i $(X_{\lambda-\mu})_{\preceq \mathbf{c}}$. Vi lar $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{y}^{\mathbf{b}}$ være minste felles multiplum av merkene til disse hjørnene, da må $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{y}^{\mathbf{b}} \preceq \mathbf{x}^{\mathbf{c}}$, igjen på grunn av definisjonen av \mathbf{c} . Altså korresponderer \overline{F} med et fjes i $(X_{\lambda-\mu})_{\preceq \mathbf{c}}$. Vi har dermed vist at $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$ er lik spesialiseringen av $(X_{\lambda-\mu})_{\preceq \mathbf{c}}$.

Proposisjon 2.16 gir oss at $\mathcal{F}_{X_{\lambda-\mu}}$ er en cellulær oppløsning, så i følge proposisjon 1.20 er $(X_{\lambda-\mu})_{\preceq \mathbf{c}}$ asyklisk. Argumentasjonen over viser at $(\overline{X}_{\lambda-\mu})_{\preceq \bar{c}}$ også må være asyklisk, og en ny anvendelse av proposisjon 1.20 gir oss at $\mathcal{F}_{\overline{X}_{\lambda-\mu}}$ er en fri oppløsning av $R/\overline{I}_{\lambda-\mu}$. Minimaliteten følger som før av at fjes i forskjellig dimensjon alltid har merker med forskjellig grad. \square

Vi ser på noen typer idealer som vi kan finne oppløsningen til ved hjelp av teorem 2.20.

Definisjon 2.21. Et *sterkt stabilt* ideal I er et monomialideal der $x_i \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{x_j} \in I$ hvis $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in I$, x_j deler $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ og $1 \leq i < j$.

Et *kvadratfritt sterkt stabilt* ideal I er et kvadratfritt monomialideal der $x_i \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{x_j} \in I$ hvis $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ er en minimal generator for I , x_j deler $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ mens x_i ikke gjør det, og $1 \leq i < j$.

Hvis et sterkt stabil ideal I har generatorer av grad 2 ser vi at hvis $x_p x_q$ er en generator for I så må $x_i x_j$ også være en generator for I hvis $i < p$ og $j < q$. Dette fører til at $I = \bar{T}_{\lambda-\mu}$ der $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ og $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ er gitt som følger:

$$\begin{aligned} n &:= \max\{i \mid \text{det finnes } x_i x_j \in I \text{ der } i \leq j\} \\ \lambda_i &:= \max\{j \mid x_i x_j \in I\} \\ \mu_i &:= i - 1. \end{aligned}$$

Dette ser vi enklest ved et eksempel.

Eksempel 2.22. La I være et sterkt stabilt ideal gitt ved at $x_1 x_6$, $x_2 x_4$ og x_3^2 er blant generatorene. Vi ser at generatorene til I kan stilles opp i følgende skjema

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1						
x_2						
x_3						

og vi ser at dette skjemaet er identisk med $\bar{T}_{\lambda-\mu}$ for gitt λ og μ .

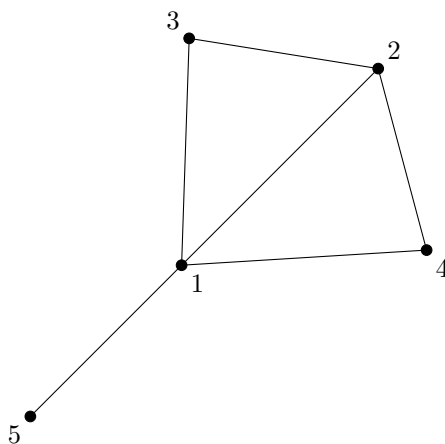
Teorem 2.20 gir oss at vi kan bruke formlene fra teorem 2.7 til å beregne Bettitallene til S/I , og vi ser at oppløsningen blir på formen

$$0 \rightarrow S \rightarrow S(-2)^{10} \rightarrow S(-3)^{23} \rightarrow S(-4)^{25} \rightarrow S(-5)^{16} \rightarrow S(-6)^6 \rightarrow S(-7) \rightarrow 0.$$

Vi ser på en spesiell type grafer som har kantidealer som kan oppnås ved å spesialisere generaliserte Ferrersidealer. Definisjonen er hentet fra [7].

Definisjon 2.23. En *terskelgraf* er en graf som kan konstrueres fra den tomme grafen ved å gjentatte ganger legge til enten et isolert hjørne eller et dominerende hjørne, det vil si et hjørne som er forbundet med alle andre hjørner.

Eksempel 2.24. Vi ser på en terskelgraf G der vi har nummerert hjørnene etter graden deres, fra størst til minst.



Fra definisjonen får vi at hjørnene nummereres i følgende rekkefølge: først de dominerende hjørnene, med det siste tillagte først, deretter de isolerte hjørnene, med det første tillagte først. Hvis $x_i x_j$ er i kantidealet til en terskelgraf og $i < j$ så må i og alle hjørner k der $k < i$ være dominerende hjørner, noe som gir oss at kantidealet I_G er et kvadratfritt sterkt stabilt ideal generert i grad 2. Faktisk har vi en én-til-én-korrespondanse mellom slike idealer og terskelgrafer.

For å se dette bruker vi en annen definisjon av terskelgrafer, hentet fra [4]: G er en terskelgraf dersom det finnes en vektor $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ slik at $\{i, j\}$ er en kant i G hvis og bare hvis $w_i + w_j > 0$. Gitt et kvadratfritt sterkt stabilt ideal I generert i grad 2, la $m = \max\{j \mid x_i x_j \in I, i < j\}$. La $w_k = m - k + 1$ for $k \leq m$ og la $w_k = m' - m$ der $m' = \max\{i \mid x_i x_k \in I, i < k\}$ for $k > m$. Terskelgrafene gitt ved denne vektoren sammenfaller med grafen som har I som kantideal.

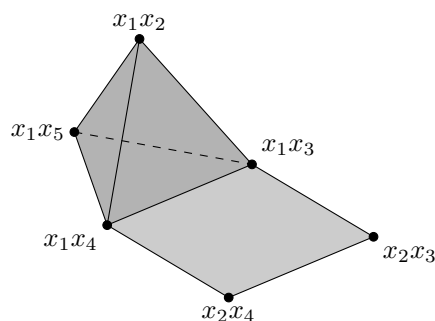
Ut fra definisjonen til terskelgrafer ser vi at $I_G = \bar{I}_{\lambda-\mu}$ der $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ og $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} n &:= \text{antall tillagte dominerende hjørner} \\ \lambda_i &:= \deg(i) + 1 \\ \mu_i &:= i \end{aligned}$$

Teorem 2.20 gir oss dermed at S/I_G har en oppløsning på formen

$$0 \rightarrow S \rightarrow S(-2)^6 \rightarrow S(-3)^9 \rightarrow S(-4)^5 \rightarrow S(-5) \rightarrow 0,$$

støttet på følgende cellekompleks:



Kapittel 3

Boksoppløsningen

Vi tar nå for oss en mer generell konstruksjon kalt boksoppløsningen, som generaliserer resultatene fra kapittel 2. Denne konstruksjonen gir oss i tillegg oppløsninger for andre klasser av idealer. Resultatene i dette kapittelet er hentet fra [12].

3.1 Hypergrafer som delvis ordnede mengder

Definisjon 3.1. Vi lar K være en mengde som består av delmengder av de positive heltallene $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, \dots\}$ med kardinalitet d ,

$$K := \{\{i_1, \dots, i_d\} \mid i_1 < \dots < i_d\} \subseteq \binom{\mathbb{P}}{d},$$

der $\binom{\mathbb{P}}{d}$ er mengden av alle slike delmengder.

Hvis $d = 2$ ser vi at vi kan assosiere K med en graf på en hjørnemengde $V \subseteq \mathbb{P}$ ved å la delmengdene i K representere kantene til grafen. Generelt kaller vi K en *d-uniform hypergraf*.

Vi lar kantidealet $I(K)$ til en slik hypergraf være det kvadratfrie monomialidealet

$$I(K) = (x_{i_1} \cdots x_{i_d} \mid \{i_1, \dots, i_d\} \in K) \subseteq \mathbb{k}[\mathbf{x}].$$

For å kunne si noe om ikke-kvadratfrie monomialidealener definerer vi også mengden

$$\binom{\mathbb{P} + d - 1}{d} = \{(i_1, \dots, i_d) \mid i_1 \leq \dots \leq i_d \text{ og } i_j \in \mathbb{P} \text{ for alle } j\}.$$

Da kan vi skrive alle monomialidealener som

$$I(M) = (x_{i_1} \cdots x_{i_d} \mid (i_1, \dots, i_d) \in M) \subseteq \mathbb{k}[\mathbf{x}].$$

der M er en delmengde i $\binom{\mathbb{P} + d - 1}{d}$.

Vi innfører nå en delvis ordning på $\binom{\mathbb{P}}{d}$ og $\binom{\mathbb{P} + d - 1}{d}$.

Definisjon 3.2. Gitt to d -delmengder

$$S = \{i_1 < \dots < i_d\} \text{ og } S' = \{i'_1 < \dots < i'_d\},$$

så sier vi at $S \leq_{\text{Gale}} S'$ i *Gale-ordningen* på $\binom{\mathbb{P}}{d}$ hvis $i_j \leq i'_j$ for alle j .

Tilsvarende sier vi at $(i_1, \dots, i_d) \leq_{\text{Gale}} (i'_1, \dots, i'_d)$ i *Gale-ordningen* på $\binom{\mathbb{P}+d-1}{d}$ hvis $i_j \leq i'_j$ for alle j . Vi legger merke til at bijeksjonen

$$\begin{aligned} \text{depol} : \binom{\mathbb{P}}{d} &\rightarrow \binom{\mathbb{P}+d-1}{d} \\ \{i_1 < \dots < i_d\} &\mapsto (i_1, i_2 - 1, i_3 - 2, \dots, i_d - (d-1)) \end{aligned}$$

bevarer *Gale-ordningen*.

Vi tar med noen generelle definisjoner for delvis ordnede mengder.

Definisjon 3.3. La A være en mengde med delvis ordning \leq , og la x og y være to elementer i A . Et element z i A er *møtestedet* for x og y dersom

- i) $z \leq x$ og $z \leq y$ og
- ii) for alle w i A slik at $w \leq x$ og $w \leq y$ så er $w \leq z$.

Dersom møtestedet eksisterer vil det være unikt, og vi skriver det som $x \wedge y$. Ved å snu ulikhetstegnene i definisjonen over får vi definisjonen for *foreningen* $x \vee y$.

Hvis alle par av elementer i A har både et møtested og en forening kaller vi A et *gitter*.

En delmengde $I \subseteq A$ kalles et *ordningsideal* hvis

- i) alle $y \leq x$ er inneholdt i I hvis x er inneholdt i I , og
- ii) for alle x, y i I har vi et element z i I slik at $x \leq z$ og $y \leq z$.

Hvis A er et gitter er det siste kravet ekvivalent med at I inneholder $x \vee y$.

Definisjonen av *Gale-ordningen* gir oss følgende resultat:

Proposisjon 3.4. For *Gale-ordningen* på mengdene $\binom{\mathbb{P}}{d}$ og $\binom{\mathbb{P}+d-1}{d}$ gjelder følgende:

De er *gittere*, og møtested og forening er gitt ved *komponentvis minimum* og *maksimum*, med andre ord, hvis

$$v = (i_1, \dots, i_d) \text{ og } v' = (i'_1, \dots, i'_d)$$

så er

$$\begin{aligned} v \wedge v' &= (\min\{i_1, i'_1\}, \dots, \min\{i_d, i'_d\}) \\ v \vee v' &= (\max\{i_1, i'_1\}, \dots, \max\{i_d, i'_d\}). \end{aligned}$$

3.2 Kvadratfrie sterkt stabile hypergrafer og Ferrers hypergrafer

Definisjon 3.5. En d -uniform hypergraf $K \subseteq \binom{[d]}{d}$ er *kvadratfri sterkt stabil* hvis den er et ordningsideal i Gale-ordningen på $\binom{[d]}{d}$. En delmengde $M \subseteq \binom{[d]}{d}$ er *sterkt stabil* hvis den er et ordningsideal i Gale-ordningen på $\binom{[d]}{d}$.

De assosierte idealene $I(K)$ og $I(M)$ er (kvadratfrie) sterkt stabile idealer generert i grad d .

Vi generaliserer nå ideen om Ferrersgrafer til hypergrafer, og ser at alle slike Ferrers hypergrafer kan skrives som en polarisering av en kvadratfri sterkt stabil hypergraf.

Definisjon 3.6. En d -uniform hypergraf K er *d -partitt* på hjørnemengden $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(d)}$ hvis alle elementer $S = \{i_1 < \dots < i_d\}$ i K er slik at $i_j \in X^{(j)}$ for alle j .

En hypergraf $K \subseteq \binom{[d]}{d}$ eller en delmengde $M \subseteq \binom{[d]}{d}$ har en assosiert d -partitt d -uniform hypergraf $F(K)$ eller $F(M)$ på $X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(d)}$ der $X^{(j)} := \{1^{(j)}, 2^{(j)}, \dots\}$, gitt ved

$$F(K) := \{\{i_1^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_d^{(d)}\} \mid \{i_1 < \dots < i_d\} \in K\}$$

$$F(M) := \{\{i_1^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_d^{(d)}\} \mid (i_1 \leq \dots \leq i_d) \in M\}.$$

Disse hypergrafene gir også opphav til kantidealene $I(F(K))$ og $I(F(M))$ definert over kroppen $\mathbb{k}[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(d)}]$ ved at $\{i_1^{(1)}, \dots, i_d^{(d)}\}$ svarer til monomet $x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_d}^{(d)}$.

Eksempel 3.7. La $d = 3$. For enklere notasjon lar vi hjørnemengden $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)}$ være gitt ved

$$\{a_1, a_2, \dots\} \cup \{b_1, b_2, \dots\} \cup \{c_1, c_2, \dots\},$$

og vi skriver kanter som f.eks. 124 istedet for $\{1, 2, 4\}^1$. Vi lar $M = \text{depol}(K)$. Da får vi

$$K = \{123, 124, 125, 135, 145, 235\}$$

$$I(K) = (x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 x_4, x_1 x_2 x_5, x_1 x_3 x_5, x_1 x_4 x_5, x_2 x_3 x_5)$$

$$I(F(K)) = (a_1 b_2 c_3, a_1 b_2 c_4, a_1 b_2 c_5, a_1 b_3 c_5, a_1 b_4 c_5, a_2 b_3 c_5)$$

$$M = (111, 112, 113, 123, 133, 223)$$

$$I(M) = (x_1^3, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_1 x_2 x_3, x_1 x_3^2, x_2^2 x_3)$$

$$I(F(M)) = (a_1 b_1 c_1, a_1 b_1 c_2, a_1 b_1 c_3, a_1 b_2 c_3, a_1 b_3 c_3, a_2 b_2 c_3)$$

Definisjon 3.8. En *Ferrers hypergraf* er en d -partitt d -uniform hypergraf F på en hjørnemengde $X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(d)}$, der hver $X^{(j)}$ har en lineær ordning, slik at hvis (i_1, \dots, i_d) er i F og (i'_1, \dots, i'_d) oppfyller $i'_j \leq i_j$ i $X^{(j)}$ for alle j , så er (i'_1, \dots, i'_d) også i F . Med andre ord er F et ordningsideal i $X^{(1)} \times \dots \times X^{(d)}$ med komponentvis delvis ordning, det vil si ordningen der $(i_1^{(1)}, \dots, i_d^{(d)}) \leq (i_1'^{(1)}, \dots, i_d'^{(d)})$ hvis $i_j^{(j)} \leq i_j'^{(j)}$ for alle j .

¹Vi bruker denne notasjonen gjennom resten av teksten.

Proposisjon 3.9. *Alle Ferrers hypergrafer er isomorfe til en d -partitt d -uniform hypergraf på formen $F(K \setminus K')$ der K, K' er kvadratfrie sterkt stabile.*

Bevis. Vi skriver hjørnemengden til F som $X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(d)}$ og lar $N := \max_j \{|X^{(j)}|\}$. Da vil den komponentvise ordningen av $X^{(1)} \times \dots \times X^{(d)}$ tilsvare en underordning av den komponentvise ordningen av $[N]^d := \{1, 2, \dots, N\}^d$, slik at F er et ordningsideal i $[N]^d$ med denne ordningen.

Vi lar

$$S_F := \{1 < N + 1 < 2N + 1 < \dots < (d - 1)N + 1\} \text{ og} \\ T_F := \{N < 2N < 3N < \dots < dN\}$$

slik at $S_F \leq_{\text{Gale}} T_F$ i $\binom{\mathbb{P}}{d}$, og intervallet $[S_F, T_F]_{\text{Gale}}$ har en åpenbart ordningsbevarende isomorfi

$$\phi: [S_F, T_F]_{\text{Gale}} \rightarrow [N]^d \\ \{i_1 < \dots < i_d\} \mapsto (i_1, i_2 - N, i_3 - 2N, \dots, i_d - (d - 1)N),$$

slik at $\phi^{-1}(F)$ er et ordningsideal i intervallet $[S_F, T_F]_{\text{Gale}}$. Da kan vi lett se at F er isomorf med $F(K \setminus K')$ der K og K' er de kvadratfrie sterkt stabile hypergrafene i $\binom{\mathbb{P}}{d}$ gitt ved

$$K := \{S \in \binom{\mathbb{P}}{d} \mid \text{det fins et element } S' \in \phi^{-1}(F) \text{ s.a. } S' \geq S\} \\ K' := \{S \in K \mid S \not\geq S_F\}.$$

□

3.3 Boksoppløsningen

Vi definerer nå det polyhedrale cellekomplekset som støtter oppløsningene vi skal gi i dette delkapittelet.

Definisjon 3.10. La F være en d -partitt d -uniform hypergraf på hjørnemengden $X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(d)}$. En *boks* i F er en delmengde av F som kan skrives som et kartesisk produkt $X_1 \times \dots \times X_d$ der X_j er en delmengde av $X^{(j)}$.

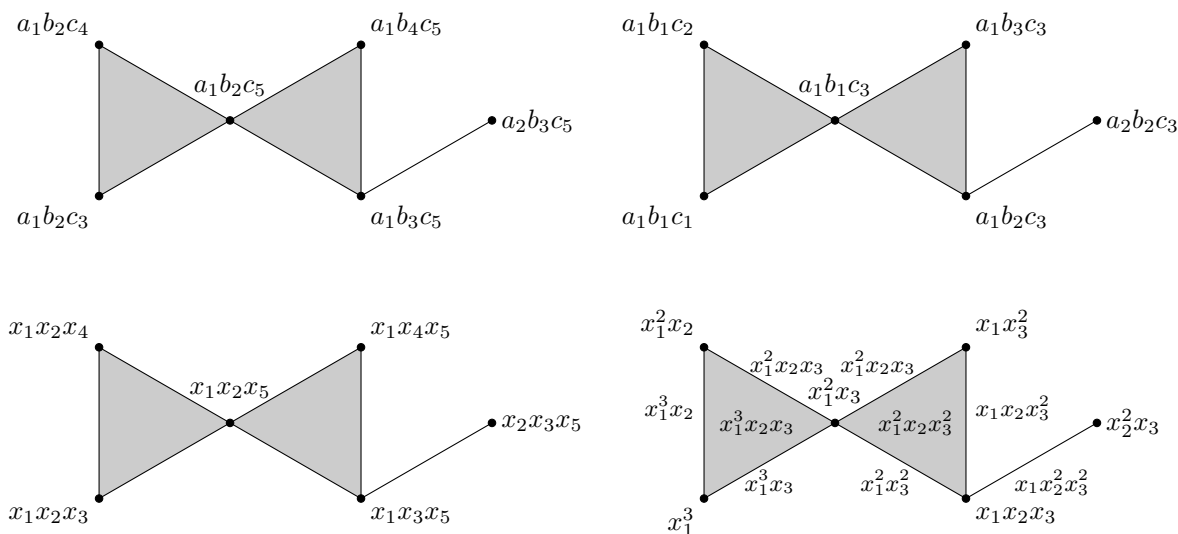
La cellekomplekset X_{tot} være det kartesiske produktet av simplekser gitt ved

$$X_{\text{tot}} = \Delta_{|X^{(1)}|-1} \times \dots \times \Delta_{|X^{(d)}|-1},$$

der hjørnene i simplekset $\Delta_{|X^{(j)}|-1}$ er merket med elementene i $X^{(j)}$, som igjen gir en merking på hjørnene i X_{tot} av elementer i $X^{(1)} \times \dots \times X^{(d)}$.

Bokskomplekset til F er delkomplekset av X_{tot} som består av de fjesene i X_{tot} hvis hjørnemerker utgjør en boks i F .

Eksempel 3.11. Vi ser på hypergrafene $F(K)$ og $F(M)$ fra eksempel 3.7. Da blir bokskompleksene til $F(K)$ og $F(M)$ som i figur 3.1, der hjørnene er merket med hhv. generatorene til $I(F(K))$ og $I(F(M))$, eller med generatorene til $I(K)$ og $I(M)$. Den siste merkingen oppnås ved å spesialisere merkene gitt ved $I(F(K))$ og $I(F(M))$. Se teorem 3.13 for detaljer rundt hvordan merkingen er gitt. Merking av fjes er som tidligere minste felles multiplum av merkene til hjørnene i fjeset, disse er kun tatt med på det spesialiserte komplekset til $F(M)$ av plasshensyn.



Figur 3.1: Bokskompleksene til $F(K)$ og $F(M)$ med vanlig og spesialisert merking.

I beviset til det neste teoremet trenger vi følgende lemma, hentet fra [12], s. 55.

Lemma 3.12. *La C være et polyhedralt cellekompleks, og v et hjørne i C som ligger i en unik fasett P med strengt positiv dimensjon. Da er delkomplekset $C \setminus \{v\}$, gitt ved å fjerne v og alle fjesene som inneholder v fra C , homotopiekvivalent med C .*

Teorem 3.13. *La $K \subset \binom{\mathbb{P}}{d}$ være kvadratfri sterkt stabil og la $M \subset \binom{\mathbb{P}+d-1}{d}$ være sterkt stabil. La $F(K)$ og $F(M)$ være de assosierte d -partitte d -uniforme hypergrafene, og la F være en vilkårlig d -partitt d -uniform Ferrers hypergraf.*

i) *Hvis I er et av idealene $I(F(K))$, $I(F(M))$ eller $I(F)$ i $R = \mathbb{k}[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(d)}]$, merk hjørnet $(i_1^{(1)}, \dots, i_d^{(d)})$ i det tilhørende bokskomplekset med monomet $x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_d}^{(d)}$. Da støtter bokskomplekset en minimal fri d -lineær oppløsning av R/I .*

ii) *Spesialiseringsavbildningen*

$$\begin{aligned} \text{sp} : R = \mathbb{k}[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(d)}] &\rightarrow S = \mathbb{k}[\mathbf{x}] \\ x_i^{(j)} &\mapsto x_i \end{aligned}$$

sender oppløsningen av $R/I(F(K))$ eller $R/I(F(M))$ til en minimal fri d -lineær oppløsning av hhv. $S/I(K)$ eller $S/I(M)$.

iii) *Hvis $M = \text{depol}(K)$ så induserer bijeksjonen $\binom{\mathbb{P}}{d} \xrightarrow{\text{depol}} \binom{\mathbb{P}+d-1}{d}$ en cellulær isomorfi mellom bokskomplekset til $I(F(K))$ og $I(F(M))$. Denne isomorfien bevarer gradene til monomene m_P som merker fjesene i kompleksene.*

Vi ser forholdsvis enkelt at teorem 3.13 er en generalisering av teorem 2.11. De maksimale boksene i F når $d = 2$ svarer til de ytre hjørnene i Ferrerstablået, som igjen svarer til fasettene i $X_\lambda = X_{\text{tot}}$.

Bevis. Vi antar $d = 3$ i beviset for forenklet notasjon, og lar a_i , b_j og c_k være variablene i hhv. $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ og $X^{(3)}$.

For å vise at bokskompleksene for idealene $I(F)$, $I(K)$, $I(F(K))$, $I(M)$ eller $I(F(M))$ gir en cellulær oppløsning, skal vi benytte oss av lemma 1.20. Vi lar C være bokskomplekset til ett av disse idealene, og vil vise at $C_{\leq \mathbf{b}}$ er kontraktibelt, og dermed asyklisk, for alle multigrader \mathbf{b} . Dette gjør vi ved induksjon på antallet hjørner i $C_{\leq \mathbf{b}}$.

Hvis $C_{\leq \mathbf{b}}$ kun har ett hjørne er det åpenbart kontraktibelt.

Hvis $C_{\leq \mathbf{b}}$ har flere hjørner, velg et hjørne $v = (i_1, i_2, i_3)$ hvis tilhørende delmengde er *Gale-maksimal* blant hjørnene til $C_{\leq \mathbf{b}}$, det vil si at hvis merket til v korresponderer med S i $\binom{\mathbb{P}}{d}$ eller $\binom{\mathbb{P}^{+d-1}}{d}$ og S' er en delmengde som korresponderer med et annet hjørne i $C_{\leq \mathbf{b}}$, så har vi $S \not\prec_{\text{Gale}} S'$.

Vi hevder at $C_{\leq \mathbf{b}}$ har en unik fasett $P_{v,\mathbf{b}}$ som inneholder v , og konstruerer denne fasetten for alle de omtalte idealene. Vi viser at vi faktisk får en fasett for idealet $I(F)$, lignende argumentasjon gir oss det samme resultatet for de andre idealene. Under lar vi $[x_i, x_j] := \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j\}$, og vi lar $\text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})$ være mengden av variabler i \mathbf{x} som deler $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$.

Hvis $I = I(F)$ der F er en Ferrers hypergraf, så er $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ et monom i variablene a_i , b_j og c_k . La

$$P_{v,\mathbf{b}} = ([a_1, a_{i_1}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})) \times ([b_1, b_{i_2}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})) \times ([c_1, c_{i_3}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})).$$

Definisjonen av en Ferrers hypergraf sikrer at $P_{v,\mathbf{b}}$ er et fjes i $C_{\leq \mathbf{b}}$. La P være et annet fjes i $C_{\leq \mathbf{b}}$ som inneholder v , vi skriver P som

$$P = \{a_{i_{\min}}, \dots, a_{i_{\max}}\} \times \{b_{j_{\min}}, \dots, b_{j_{\max}}\} \times \{c_{k_{\min}}, \dots, c_{k_{\max}}\}.$$

Siden $v \in P$ har vi at $i_{\min} \leq i_1 \leq i_{\max}$, $j_{\min} \leq i_2 \leq j_{\max}$ og $k_{\min} \leq i_3 \leq k_{\max}$. Siden v er Gale-maksimal, får vi $i_1 = i_{\max}$, $i_2 = j_{\max}$ og $i_3 = k_{\max}$. Kombinerer vi dette med at $P \subseteq C_{\leq \mathbf{b}}$, ser vi lett at $P_{v,\mathbf{b}}$ inneholder P , og er dermed en fasett.

Hvis $I = I(F(K))$ så er $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ et monom i variablene a_i , b_j og c_k . Vi lar

$$P_{v,\mathbf{b}} = ([a_1, a_{i_1}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})) \times ([b_{i_1+1}, b_{i_2}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})) \times ([c_{i_2+1}, c_{i_3}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})),$$

det at K er et ordningsideal i $\binom{\mathbb{P}}{d}$ sikrer at $P_{v,\mathbf{b}}$ er et fjes i $C_{\leq \mathbf{b}}$.

Hvis $I = I(F(M))$ så er $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ et monom i variablene a_i , b_j og c_k . Vi lar

$$P_{v,\mathbf{b}} = ([a_1, a_{i_1}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})) \times ([b_{i_1}, b_{i_2}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})) \times ([c_{i_2}, c_{i_3}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})),$$

det at M er et ordningsideal i $\binom{\mathbb{P}^{+d-1}}{d}$ sikrer at $P_{v,\mathbf{b}}$ er et fjes i $C_{\leq \mathbf{b}}$.

Hvis $I = I(K)$ så er $\mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ et monom i variablene x_i . Vi lar $P_{v,\mathbf{b}}$ være spesialiseringen av boksen

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{v,\mathbf{b}} = & ([a_1, a_{i_1}] \cap \{a_j \mid x_j \in \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})\}) \times ([b_{i_1+1}, b_{i_2}] \cap \{b_j \mid x_j \in \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})\}) \\ & \times ([c_{i_2+1}, c_{i_3}] \cap \{c_j \mid x_j \in \text{supp}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}})\}) \end{aligned}$$

i bokskomplekset til $I(F(K))$.

Hvis $I = I(M)$ så er \mathbf{x}^b et ikke nødvendigvis kvadratfritt monom i variablene x_i . Vi lar $m_j^k(v)$ være multiplisiteten til j i de første k koordinatene til (i_1, i_2, i_3) , for eksempel er $m_2^3(v) = 2$ hvis $v = (3, 3, 4)$. Vi definerer følgende undermengder:

$$\begin{aligned} S_1(v, \mathbf{b}) &= \{a_j \mid x_j^{m_0^j+1} \text{ deler } \mathbf{x}^b\}, \\ S_2(v, \mathbf{b}) &= \{b_j \mid x_j^{m_1^j+1} \text{ deler } \mathbf{x}^b\}, \\ S_3(v, \mathbf{b}) &= \{c_j \mid x_j^{m_2^j+1} \text{ deler } \mathbf{x}^b\}. \end{aligned}$$

Vi lar $P_{v, \mathbf{b}}$ være spesialiseringen av boksen

$$\tilde{P}_{v, \mathbf{b}} = ([a_1, a_{i_1}] \cap S_1(v, \mathbf{b})) \times ([b_1, b_{i_2}] \cap S_2(v, \mathbf{b})) \times ([c_1, c_{i_3}] \cap S_3(v, \mathbf{b}))$$

i bokskomplekset til $I(F(M))$.

Vi ønsker nå å vise at dersom $v = (i_1, \dots, i_d)$ ikke er det eneste hjørnet i $C_{\leq \mathbf{b}}$, så har $P_{v, \mathbf{b}}$ strengt positiv dimensjon. Siden v er Gale-maksimal kan vi anta at det eksisterer et hjørne $v' = (i'_1, \dots, i'_d)$ i $C_{\leq \mathbf{b}}$ slik at $v' \leq_{\text{Gale}} v$. Dette følger av at gitt et hjørne $w \neq v$ så vil $v \wedge w$ i følge proposisjon 3.4 ligge under v i Gale-ordningen.

Vi antar nå at $P_{v, \mathbf{b}} = X_1 \times \dots \times X_d$ har dimensjon null, det vil si at $|X_m| = 1$ for alle m . Definisjonene av $P_{v, \mathbf{b}}$ i de forskjellige tilfellene over gir oss at $v' = v$, noe som gir oss en kontradiksjon. Altså må $P_{v, \mathbf{b}}$ ha strengt positiv dimensjon. Vi viser argumentasjonen for $I = I(F)$:

Siden $v' \leq_{\text{Gale}} v$ har vi $i'_m \leq i_m$. Definisjonen av $P_{v, \mathbf{b}}$ gir oss at $|X_m| = |([x_{i_{m-1}+1}^{(m)}, x_{i_m}^{(m)}] \cap \text{supp}(\mathbf{x}^b))| = 1$. Siden vi vet at $\text{supp}(\mathbf{x}^b)$ inneholder $x_{i_m}^{(m)}$ (dette følger av at $v \in C_{\leq \mathbf{b}}$) så må $i'_m = i_m$.

Lemma 3.12 gir oss nå at $C_{\leq \mathbf{b}}$ og $C_{\leq \mathbf{b}} \setminus \{v\}$ er homotopiekvivalente. Vi ser på idealet I' generert av merkene på hjørnene som blir igjen i C etter at vi har fjernet alle hjørnene som er $\geq_{\text{Gale}} v$. Dette idealet vil være av samme type som I , og dermed ha et bokskompleks, la oss kalle det C' . Da vil $C'_{\leq \mathbf{b}}$ og $C_{\leq \mathbf{b}} \setminus \{v\}$ være isomorfe, og begge vil være kontraktible ved induksjonshypotesen. Siden $C_{\leq \mathbf{b}}$ og $C_{\leq \mathbf{b}} \setminus \{v\}$ er homotopiekvivalente vil $C_{\leq \mathbf{b}}$ være kontraktibelt, og resultatet følger.

Del iii) følger av at gitt en boks

$$P = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\} \times \{b_{j_1}, \dots, b_{j_s}\} \times \{c_{k_1}, \dots, c_{k_t}\}$$

i $F(K)$ så vil

$$\text{depol}(P) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\} \times \{b_{j_1-1}, \dots, b_{j_s-1}\} \times \{c_{k_1-2}, \dots, c_{k_t-2}\}$$

være en boks i $F(M)$ og vice versa. \square

Korollar 3.14. *Hvis K er en kvadratfri sterkt stabil d -uniform hypergraf, og $M = \text{depol}(K)$, så har alle de fire idealene $I = I(K) \ I(F(K)), I(M), I(F(M))$ Bettitall $\beta_{i,j}(I) = 0$ med mindre $j = i + d$. I så fall er*

$$\beta_i(I) = \beta_{i, i+d}(I) = \sum_{S \in K} \binom{\max(S) - d}{i} = \sum_{k \geq d} \mu_k(K) \binom{k - d}{i},$$

der $\mu_k(K) := |\{S \in K \mid \max(S) = k\}|$.

Hvis F er en d -partitt d -uniform Ferrers hypergraf så er $\beta_{i,j}(F) = 0$ med mindre $j = i + d$. I så fall er

$$\beta_i(I(F)) = \beta_{i,i+d}(I(F)) = \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in F} \binom{\sum_j i_j - d}{i} = \sum_{k \geq d} \alpha_k(K) \binom{k-d}{i},$$

der $\alpha_k(K) := |\{(i_1, \dots, i_d) \in F \mid \sum_j i_j = k\}|$.

Bevis. Punkt ii) og iii) i teorem 3.13 gir oss at idealene $I = I(K) \cap I(F(K))$, $I(M)$, $I(F(M))$ alle har de samme Bettitallene $\beta_{i,j}(I)$, og siden oppløsningene er d -lineære så er $\beta_{i,j}(I) = 0$ med mindre $j = i + d$.

La X være en delmengde av hjørnemengden $X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(d)}$ til $F(K)$, og la \mathbf{b}_X være multigraden til monomet $\prod_{i_j^{(k)} \in X} x_{i_j}$. Da er $\beta_{i, \mathbf{b}_X}(I(K))$ lik antallet bokser $X_1 \times \dots \times X_d$ i $F(K)$ der $X = X_1 \cup \dots \cup X_d$.

Vi assosierer disse boksene til elementer i K på følgende måte:

$$S = \{\max(X_1) < \dots < \max(X_d)\} = \{i_1 < \dots < i_d\} \in K.$$

Gitt et vilkårlig element S i K så vil det ha en boks assosiert til seg hvis og bare hvis $F(S) \subseteq X$ og $\max(F(S)) = \max(X_d) = \max(X)$. For $|X| = i + d$ kan vi da velge elementene i X som ikke er i $F(S)$ på

$$\binom{|\max(S) \setminus S|}{i} = \binom{\max(S) - d}{i}$$

måter, der $[\max(S)] := \{1, 2, \dots, \max(S)\}$, hver slik delmengde X legger 1 til Bettitallet $\beta_{i,i+d}(I(K)) = \beta_{i,i+d}(I) = \beta_i(I)$. Av dette følger den første formelen i korollaret.

For en Ferrers hypergraf F , assosier boksene i F med elementer i F på følgende måte:

$$(\max(X_1), \dots, \max(X_d)) = (i_1, \dots, i_d) \in F.$$

(i_1, \dots, i_d) har en assosiert boks hvis og bare hvis $\{i_1, \dots, i_d\} \subseteq X$ og $i_j = \max(X_j)$ for alle j , så de resterende elementene i X kan velges på $\binom{\sum_j i_j - d}{i}$ når $|X| = i + d$, dette gir oss den andre formelen. \square

Eksempel 3.15. Korollar 3.14 er en generalisering av formlene for å regne ut Bettitall i teorem 2.7. Vi tester dette ved å regne ut Bettitallene til I_λ fra eksempel 2.5. Antallet $(i_1, i_2) \in F$ slik at $i_1 + i_2 = k$ er gitt ved antallet ruter i den $(k-1)$ -ende diagonalen fra venstre til høyre i Ferrerstablået. Vi får

$$\begin{aligned} \beta_0(I_\lambda) &= 1 \cdot \binom{0}{0} + 2 \cdot \binom{1}{0} + 3 \cdot \binom{2}{0} + 4 \cdot \binom{3}{0} + 3 \cdot \binom{4}{0} \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 3 = 13, \\ \beta_1(I_\lambda) &= 2 \cdot \binom{1}{1} + 3 \cdot \binom{2}{1} + 4 \cdot \binom{3}{1} + 3 \cdot \binom{4}{1} = 2 + 6 + 12 + 12 = 32, \\ \beta_2(I_\lambda) &= 3 \cdot \binom{2}{2} + 4 \cdot \binom{3}{2} + 3 \cdot \binom{4}{2} = 3 + 12 + 18 = 33, \\ \beta_3(I_\lambda) &= 4 \cdot \binom{3}{3} + 3 \cdot \binom{4}{3} = 4 + 12 = 16, \\ \beta_4(I_\lambda) &= 3 \cdot \binom{4}{4} = 3. \end{aligned}$$

Vi ser at dette stemmer overens med resultatene fra eksempel 2.9 siden $\beta_i(I_\lambda) = \beta_{i+1}(R/I_\lambda)$.

I tillegg vil teorem 2.20 gi de samme oppløsningene for sterkt stabile og kvadratfrie sterkt stabile idealer som teorem 3.13 når $d = 2$.

Eksempel 3.16. Terskelgrafer er sterkt stabile 2-uniforme hypergrafer. Dette følger av korrespondansen mellom slike grafer og kvadratfrie sterkt stabile idealer generert i grad 2. Grafen i eksempel 2.24 er gitt ved $K = \{12, 13, 14, 15, 23, 24\}$, og vi ser lett at de maksimale boksene i $F(K)$ er $\{a_1\} \times \{b_2, b_3, b_4, b_5\}$ og $\{a_1, a_2\} \times \{b_3, b_4\}$, som gir opphav til det samme komplekset som tidligere.

Kapittel 4

Kointervallidealer

I dette kapittelet ser vi på kantidealene til en type grafer kalt kointervallgrafer, disse generaliserer blant annet de sterkt stabile hypergrafene vi så på i forrige kapittel. Vi konstruerer et cellekompleks som støtter en cellulær oppløsning for disse idealene, som vi kaller kointervallidealer. Resultatene i dette kapittelet er hentet fra [5].

4.1 Kointervallgrafer

Kointervallgrafer er en undergruppe av d -uniforme hypergrafer, disse blir fra nå av omtalt som d -grafer.

Definisjon 4.1. La H være en d -graf, og la v være et hjørne i hjørnemengden $V(H)$ til H som er inneholdt i \mathbb{N} . Da er v -laget til H en $(d-1)$ -graf på hjørnemengden $V \setminus v$ med kantmengden

$$\{v_1 v_2 \cdots v_{d-1} \mid v v_1 v_2 \cdots v_{d-1} \in E(H) \text{ og } v < v_1, v_2, \dots, v_{d-1}\}.$$

Eksempel 4.2. La H være gitt ved $V(H) = [5]$ og $E(H) = \{123, 124, 234, 235\}$. Da har 2-laget til H kantmengden $\{23, 24\}$.

Vi kan nå definere kointervallgrafer.

Definisjon 4.3. Kointervalle d -grafer defineres rekursivt på følgende måte:

Alle 1-grafer er kointervalle. For $d > 1$ så er en endelig d -graf H med hjørnemengde $V(H) \subseteq \mathbb{N}$ kointervall hvis

- i) i -laget til H er kointervall for alle $i \in V(H)$;
- ii) gitt et par av hjørner $i < j$ så er j -laget til H inneholdt som en delgraf i i -laget til H .

Klassen av kointervalle d -grafer inneholder de sterkt stabile hypergrafene fra kapittel 3. Hvis vi i tillegg til kravene over krever at gitt en 1-graf H så må $j \in E(H)$ hvis $i \in E(H)$ og $j < i$ så får vi nettopp klassen av sterkt stabile hypergrafer.

Følgende egenskap ved kointervallgrafer kommer til nytte når vi skal konstruere cellulære oppløsninger for kointervallidealer.

Definisjon 4.4. Gitt en d -graf H og en delmengde W av hjørnemengden $V(H)$. Den *induserte delgraf* $H[W]$ på W er d -grafen med hjørnemengde W og kantmengde $\{E \subseteq W \mid E \in E(H)\}$.

Proposisjon 4.5. *Alle induserte delgrafer av en kointervall d -graf er selv en kointervall d -graf.*

Bevis. Gitt en kointervall d -graf H og en induert delgraf $H[V]$, la oss vise at $H[V]$ er kointervall.

Vi benytter oss av induksjon på d . Alle 1-grafer er kointervalle, så vi kan anta $d > 1$. Vi sjekker om $H[V]$ oppfyller kravene i definisjon 4.3.

- i) La G være i -laget til $H[V]$, og la G' være i -laget til H . Ut fra definisjon 4.1 ser vi at $G = G'[V]$. G' er kointervall siden det er et av lagene til H , og siden G' er en $(d-1)$ -graf gir induksjonshypotesen oss at G er kointervall.
- ii) Gitt $i < j$ i $H[V]$ så må j -laget til $H[V]$ være en delgraf av i -laget til $H[V]$ siden j -laget til H er en delgraf av i -laget til H .

□

4.2 Cellulære oppløsninger av kointervallidealer

Vi begynner med å assosiere et polyhedralt cellekompleks til en generell d -graf. For to delmengder σ og τ i hjørnemengden $V \subseteq \mathbb{N}$ lar vi $\sigma < \tau$ bety at $s < t$ for alle $s \in \sigma$, $t \in \tau$.

Definisjon 4.6. La H være en d -graf på den endelige hjørnemengden $V \subseteq \mathbb{N}$. Det polyhedrale cellekomplekset X_H er delkomplekset av det kartesiske produktet

$$\prod_{i=1}^d \Delta_{|V|-1}$$

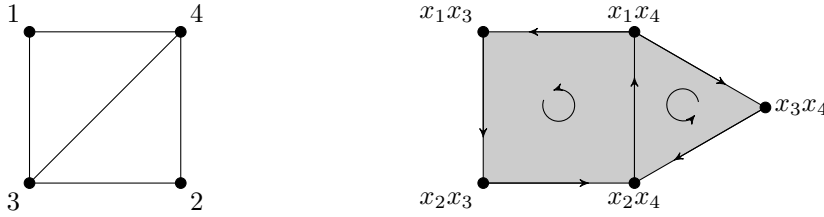
der simpleksene $\Delta_{|V|-1}$ har hjørnemengde V , som oppfyller følgende:

- i) Hjørnene til X_H er $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_d$, der $v_1 v_2 \cdots v_d$ er en kant i H ;
- ii) For undermengder σ_i i V så oppfyller fjesene $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_d$ kravet $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_d$.

Vi utstyrrer dette komplekset med en naturlig merking der hvert hjørne merkes med det tilsvarende monomet i $S = \mathbb{k}[\mathbf{x}]$, f.eks. merkes $1 \times 2 \times 4$ med $x_1 x_2 x_4$. Fjes i høyere dimensjoner bruker som tidligere minste felles multiplum av merkene til hjørnene som merke. Vi lar kantidealet I_H til H være idealet i S generert av merkene på hjørnene til X_H .

Eksempel 4.7. Figur 4.1 viser en kointervall 2-graf H med tilhørende kompleks X_H med en vilkårlig valgt orientering.

Det viser seg at X_H støtter en cellulær oppløsning av I_H når H er en kointervallgraf. Før vi kan bevise dette trenger vi en del resultater.

Figur 4.1: Kointervallgrafene H og komplekset X_H .

Proposisjon 4.8. Hvis P og Q er delvis ordnede mengder og $\varphi : P \rightarrow Q$ og $\psi : Q \rightarrow P$ er ordensbevarende avbildninger slik at $\psi(\varphi(x)) \leq x$ og $\varphi(\psi(y)) \leq y$, så er de induerte avbildningene $|\Delta(\varphi)|$ og $|\Delta(\psi)|$ mellom de geometriske realiseringene til de ordnede mengdene inverse homotopiekvivalenser.

Bevis. Se s. 27 i [2]. □

Teorem 4.9. La H være en d -graf med hjørnemengde $V \subseteq \mathbb{N}$ Anta at $i < j$ er hjørner i H , og la G være j -laget og G' i -laget til H . Hvis G er en delgraf av G' så er kompleksene X_H og $X_{H \setminus j * G}$ homotopiekvivalente, der $j * G$ er kantene i H på formen $jv_1 \cdots v_{d-1}$ der $v_1 \cdots v_{d-1}$ er kanter i G .

Bevis. Vi ønsker å bruke proposisjon 4.8 til å vise teoremet, ved å konstruere passende avbildninger mellom P_H og $P_{H \setminus j * G}$, mengdene av fjes i kompleksene X_H og $X_{H \setminus j * G}$, delvis ordnet ved inklusjon.

La P'_H være delmengden av P_H som inneholder alle fjesene F som oppfyller følgende krav: hvis $jv_2 \cdots v_d$ er et hjørne i F så er $iv_2 \cdots v_d$ også i F . Vi definerer avbildningen $\xi : P_H \rightarrow P'_H$ på følgende måte: hvis F ikke inneholder et hjørne på formen $jv_2 \cdots v_d$ så er $\xi(F) = F$, ellers er $\xi(F)$ fjeset gitt ved hjørnene i F samt hjørnet $iv_2 \cdots v_d$. At $G \subseteq G'$ sikrer at avbildningen er veldefinert, og vi ser lett at den er ordensbevarende.

La nå P''_H være de fjesene i P'_H som ikke inneholder et hjørne på formen $jv_2 \cdots v_d$. Da vil P''_H være isomorft med $P_{H \setminus j * G}$. Vi definerer en ny avbildning, $\xi' : P'_H \rightarrow P''_H$ der $\xi'(F) = F$ hvis F ikke inneholder et hjørne på formen $jv_2 \cdots v_d$, ellers er $\xi'(F)$ fjeset gitt ved hjørnene i F som ikke er på formen $jv_2 \cdots v_d$. Igjen ser vi lett at avbildningen er ordensbevarende.

Vi lar $\varphi : P_H \rightarrow P''_H$ være gitt ved $\varphi(x) = \xi'\xi(x)$ og $\psi : P''_H \rightarrow P_H$ være gitt ved at $\psi(y)$ er fjeset som inneholder hjørnene i y som ikke er på formen $iv_2 \cdots v_d$, en åpenbart ordensbevarende avbildning. Da vil $\psi(\varphi(x))$ være fjeset som inneholder hjørnene i x som ikke er på formen $iv_2 \cdots v_d$ eller $jv_2 \cdots v_d$, dermed holder $\psi(\varphi(x)) \leq x$. $\varphi(\psi(y))$ vil være fjeset som inneholder hjørnene i y som ikke er på formen $iv_2 \cdots v_d$, dermed holder $\varphi(\psi(y)) \leq y$ og proposisjon 4.8 gir oss teoremet. □

Lemma 4.10. Hvis H er en ikke-tom kointervall d -graf der $d > 0$ så er X_H kontraktibelt.

Bevis. Vi lar t være antallet ikke-tomme lag av H , og benytter induksjon på t og d .

Hvis $d = 1$ så er X_H et simpleks, altså er det kontraktibelt. Vi antar dermed $d > 1$.

Hvis $t = 1$ og i -laget G er det eneste ikke-tomme laget så må i være det minste hjørnet i H , og det må også være inneholdt i alle kantene i H , hvis ikke ville vi hatt flere ikke-tomme lag. Da er X_H og X_G isomorfe via den cellulære isomorfin $v \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_d \rightarrow \sigma_2 \times \dots \times \sigma_d$, slik at X_H er kontraktibel ved induksjon på d . Vi antar dermed $t > 1$.

La j være det største tallet der j -laget G til H ikke er tomt, og la $i < j$ være slik at i -laget til H heller ikke er tomt. Siden H er kointervall vil G være en delgraf av i -laget per definisjon. Teorem 4.9 gir oss at X_H er homotopiekvivalent med $X_{H \setminus j * G}$, og proposisjon 4.5 gir oss at $H \setminus j * G$ er kointervall, men den vil kun ha $t - 1$ ikke-tomme lag. Induksjonshypotesen gir oss at $X_{H \setminus j * G}$, og dermed også X_H , er kontraktibelt. \square

Teorem 4.11. *Hvis H er en kointervall d -graf så støtter komplekset X_H en minimal d -lineær cellulær oppløsning av kvotientringen S/I_H der I_H er kantidealet til grafen H .*

Bevis. Vi lar $n = |V(H)|$, \mathbf{b} være en vektor i \mathbb{N}^n og tar for oss komplekset $(X_H)_{\preceq \mathbf{b}}$. Siden alle hjørnemerkeene i X_H er kvadratfrie begrenser vi oss til tilfellene der $\mathbf{b} \in \{0, 1\}^n$. Gitt en slik vektor \mathbf{b} vil $(X_H)_{\preceq \mathbf{b}}$ være gitt ved komplekset $X_{H[W]}$ der $W = \{v \in V(H) \mid b_v = 1\}$. Vi antar at H er kointervall, dermed er $H[W]$ også kointervall ved proposisjon 4.5. Lemma 4.10 gir oss at $X_{H[W]}$ er kontraktibelt, og dermed gir proposisjon 1.20 oss at komplekset støtter en cellulær oppløsning av S/I_H .

Gitt et fjes $F = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_d$ i X_H så vil dette fjeset ha dimensjon $|\mathbf{a}_F| - d$, så fjes i forskjellig dimensjon vil alltid ha forskjellig merking der graden til merket er gitt ved $\dim F + d$. Dette gir oss at oppløsningen er minimal og d -lineær. \square

Siden klassen av kointervalle d -grafer som tidligere nevnt inneholder klassen av sterkt stabile hypergrafer så er teorem 4.11 en generalisering av deler av teorem 3.13.

Eksempel 4.12. Kantidealet $I_H = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4)$ til grafen H i figur 4.1 får følgende minimale frie oppløsning:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longleftarrow S \longleftarrow \begin{bmatrix} x_1x_3 \\ x_1x_4 \\ x_2x_3 \\ x_2x_4 \\ x_3x_4 \end{bmatrix}^T & \longleftarrow S(-2)^5 \longleftarrow \begin{bmatrix} -x_2 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & x_2 & -x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & -x_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & -x_2 \end{bmatrix} & \longleftarrow S(-3)^6 \longleftarrow \begin{bmatrix} x_4 & 0 \\ x_2 & 0 \\ x_1 & 0 \\ x_3 & x_3 \\ 0 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} & \longleftarrow S(-4)^2 \longleftarrow 0 \\
 \begin{array}{cccc}
 0000 & 1010 & 1110 & 1111 \\
 & 1001 & 1011 & 1111 \\
 & 0110 & 0111 & \\
 & 0101 & 1101 & \\
 & 0011 & 1011 & \\
 & & 0111 &
 \end{array}
 \end{array}$$

Tallene under de frie modulene angir multigradene til basiselementene tilsvarende fjesene i X_H .

Eksempel 4.13. Terskelgrafene i eksempel 2.24 er sterkt stabil, og dermed også kointervall. Teorem 4.11 bør derfor gi opphav til samme oppløsning som tidligere, og vi ser enkelt at dette stemmer da de maksimale fjesene i komplekset X_H er gitt ved $\{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}$ og $\{1, 2\} \times \{3, 4\}$.

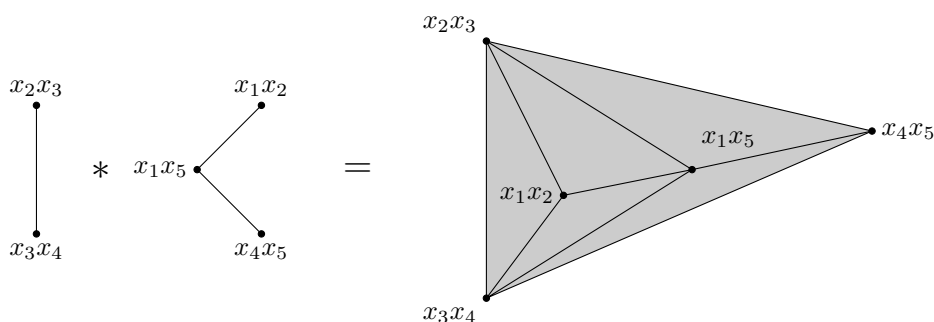
4.3 Oppløsninger av ikke-kointervalle d -grafer

Oppløsninger av kointervallgrafer kan også brukes til å konstruere (ikke nødvendigvis minimale) oppløsninger av hypergrafer som ikke er kointervalle. Vi bruker her foreningen $X * Y$ av kompleksene X og Y som løst definert er den disjunkte unionen av X og Y samt kantene $\{\{x, y\} | x \in X, y \in Y\}$.

Teorem 4.14. Gitt d -grafene H_1, H_2, \dots, H_n på hjørnemengden W , anta at det fins en cellulær oppløsning I_{H_i} støttet på et polyedralt cellekompleks X_i for alle $i = 1, 2, \dots, n$ der hjørnene er merket med kvadratfrie monomer og fjesene med minste felles multiplum av de tilhørende hjørnemerkenene. Hvis $H = H_1 \cup \dots \cup H_n$, $X = X_1 * \dots * X_n$ og fjesene i X merkes med minste felles multiplum av merkene til hjørnene de inneholder så vil X støtte en cellulær oppløsning av I_H .

Bevis. Gitt en vektor \mathbf{b} så vil $X_{\leq \mathbf{b}}$ være lik $(X_1)_{\leq \mathbf{b}} * \dots * (X_n)_{\leq \mathbf{b}}$. Siden $(X_i)_{\leq \mathbf{b}}$ er asyklisk eller tomt for alle i så vil $X_{\leq \mathbf{b}}$ være det samme, og teoremet følger av proposisjon 1.20. \square

Eksempel 4.15. En femkant $\{12, 23, 34, 45, 15\}$ er ikke en kointervallgraf, men kan skrives som en union $\{12, 45, 15\} \cup \{23, 34\}$ av to grafer som gitt riktig merking er kointervalle. Dermed får vi at komplekset



støtter en cellulær oppløsning av kantidealet I_H til femkanten H . Oppløsningen vil ikke være minimal, blant annet ser vi at trekanten merket $x_1x_2x_3x_4$ inneholder en kant med samme merking.

4.4 Dimensjonen til komplekset X_H

I dette delkapittelet ser vi på en måte å beskrive kointervalle 2-grafer på som gjør at vi kan sette opp kriterier for når komplekset X_H til en slik graf H er 0-, 1- eller 2-dimensjonalt. I tillegg ser vi på den øvre grensen for antall

hjørner en kointervall d -graf H kan ha når vi vet dimensjonen til komplekset X_H . Resultatene i dette delkapittelet er egenproduserte.

For å ha et empirisk grunnlag å gå ut ifra har vi sett på oppløsningene til kantidealene til 2- og 3-grafer på høyst 5 hjørner. Kompleksene til disse har vi henholdsvis i figur 4.2 og figur 9 i [5].

Kointervalle 2-grafer har egenskapen at hvis ab er en kant i grafen så må cb også være en kant i grafen for alle $c < a$. Vi benytter dette for å innføre en ny måte å notere kointervalle 2-grafer på.

Definisjon 4.16. Til en kointervall 2-graf assosierer vi funksjonen $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ som er definert på følgende måte:

$$s(d) = \begin{cases} 0 & \text{hvis det ikke eksisterer } a \text{ slik at } ad \text{ er en kant i grafen} \\ \max\{a \mid ad \text{ er en kant i grafen}\} & \end{cases}$$

Definisjonen til en kointervallgraf gir oss at $d > s(d)$, og at $s(d) \neq 0$ impliserer at for $e < d$ så har vi enten $s(e) \neq 0$ eller det eksisterer en d' slik at $s(d') \geq e$. Gitt disse forutsetningene er en kointervall 2-graf entydig bestemt ut fra funksjonen s (merk: to grafer som er like med unntak av merkingen på hjørnene vil ha forskjellig s -funksjon).

Eksempel 4.17. Kointervallgrafene i figur 4.1 har s -funksjon gitt ved følgende tabell (hvis $s(d) = 0$ så er d ikke med i tabellen):

d	$s(d)$
3	2
4	3

Ved å stille krav til s -funksjonen kan vi nå sette opp kriterier for lengden til oppløsningen av kantidealet I_H der H er en kointervall 2-graf, og dermed også til dimensjonen til komplekset X_H . Vi lar notasjonen $|d|$ bety antall d -verdier som ikke sendes til null av s , $|d| := |\{d \mid s(d) \neq 0\}|$.

Proposisjon 4.18. La H være en kointervall 2-graf med en tilhørende s -funksjon, og la l være lengden til oppløsningen av I_H .

- i) Hvis $\sum_d s(d) = 1$ så er $l = 0$.
- ii) Hvis $2 \leq \sum_d s(d) \leq 3$, $|d| \leq 2$ og $\max_d s(d) \leq 2$ så er $l = 1$.
- iii) Hvis $\sum_d s(d) \leq 6$, $|d| \leq 3$, $\max_d s(d) \leq 3$ og

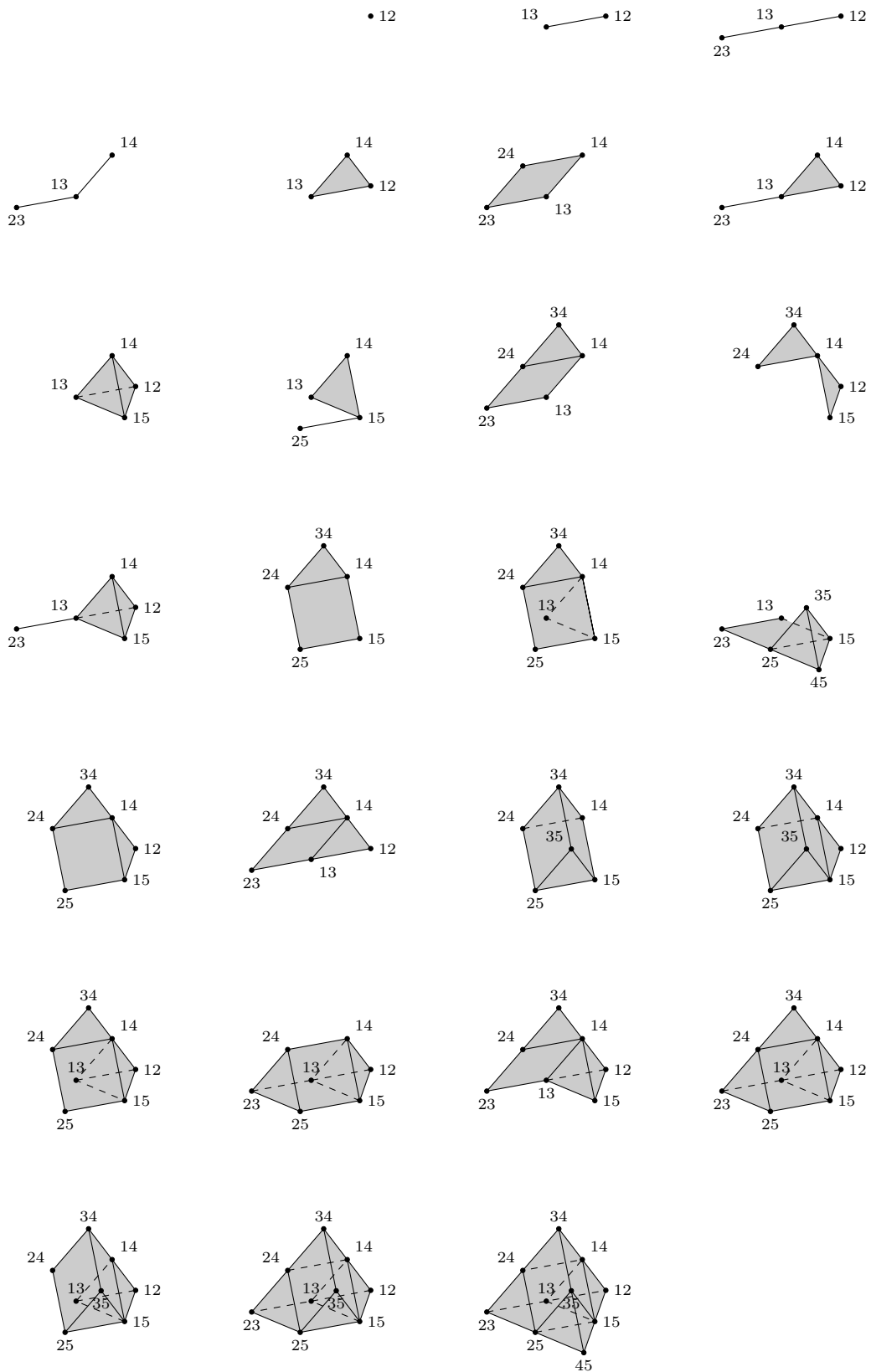
$$|\{d \mid s(d) = 3\}| \leq 1 \quad \wedge \quad |\{d \mid s(d) = 2\}| \leq 2$$

så er $l \leq 2$.

Bevis. i) Hvis $\sum_d s(d) = 1$ så er $H = \{1, 2\}$ og komplekset X_H består av kun ett punkt, dermed er $l = 0$.

- ii) Vi får todimensjonale fjes i komplekset X_H hvis vi har undermengder $\sigma_1 \times \sigma_2$ som danner trekanter eller firkanter, det vil si fjes på formene $\{a_1, b_1, c_1\} \times \{a_2\}$, $\{a_1\} \times \{a_2, b_2, c_2\}$ eller $\{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2\}$.

$\max_d s(d) \leq 2$ gjør at vi unngår fjes på den første formen, $|d| \leq 2$ forhindrer den andre formen, og den tredje formen fører til $\sum_d s(d) \geq 4$ så den er heller ikke mulig. Siden $\sum_d s(d) > 1$ så får vi $l = 1$.



Figur 4.2: Kompleksene som støtter oppløsningene til kointervalle 2-grafer.

- iii) Tredimensjonale fjes oppstår enten som tetrahedere eller prismer med trekanter som grunnflate, med andre ord fjes på formen $\{a_1\} \times \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$, $\{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2, c_2\}$, $\{a_1, b_1, c_1\} \times \{a_2, b_2\}$ eller $\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \times \{a_2\}$.

Den første formen forhindres av $|d| \leq 3$, den andre av

$$s(d) \leq 6 \quad \wedge \quad |\{d \mid s(d) = 2\}| \leq 2,$$

den tredje av

$$s(d) \leq 6 \quad \wedge \quad |\{d \mid s(d) = 3\}| \leq 1$$

og den siste forhindres av $|d| \leq 3$. Dermed er $l \leq 2$. □

For høyere dimensjoner blir kravene verre og verre å skrive ned, men gitt en s -funksjon for en graf H ved en tabell som i eksempel 4.17 kan vi forholdsvis lett se hva slags fjes vi får i komplekset X_H . Gitt et tall $e > 0$, tell hvor mange verdier av d vi har der $s(d) \geq e$, og kall dette antallet f . Da har vi et fjes i X_H av dimensjon $e + f - 2$ med mindre $f = 0$. På denne måten kan vi lett sjekke dimensjonen til komplekset.

Eksempel 4.19. Vi lar H være gitt ved s -funksjonen i tabellen under:

d	$s(d)$
3	2
5	3
6	5
7	3

Da har X_H tre firedimensjonale fasetter, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{6\}$ som vi finner ved å se at $e = 5 \Rightarrow f = 1$, $\{1, 2, 3\} \times \{5, 6, 7\}$ som vi finner ved å se at $e = 3 \Rightarrow f = 3$ og $\{1, 2\} \times \{3, 5, 6, 7\}$ som vi finner ved å se at $e = 2 \Rightarrow f = 4$.

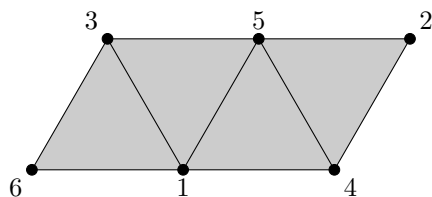
For kointervalle 3-grafer er bildet mer komplisert. Disse kan ikke like enkelt uttrykkes ved for eksempel en s -funksjon, blant annet fordi lagene til en generell 3-graf ikke automatisk er kointervalle. Enhver d -graf på n hjørner har en øvre skranke for dimensjonen til det tilhørende komplekset på $n-d$ siden dimensjonen til et fjes er gitt ved $|\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_d| - d$. Kan vi si noe om en øvre skranke for antall hjørner i kointervallgrafen H gitt dimensjonen til X_H ?

Vi antar at X_H er éndimensjonalt. Alle fjes i X_H er da på formen $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_d$ der $\sigma_i = 1$ for alle i bortsett fra én, la oss kalle den k , der $\sigma_k = 2$. Dermed har X_H maksimalt d fasetter og H har maksimalt $d + 1$ kanter. Da får vi med en gang en øvre skranke på $d(d + 1)$ hjørner siden hver kant inneholder d hjørner, men dette tallet blir fort langt større enn den reelle begrensningen på antall hjørner.

Hvis H er en 1-graf er X_H gitt ved simplekset Δ_{n-1} der n er antall hjørner i H , så H kan maksimalt ha to hjørner.

Hvis H er en 2-graf ser vi lett fra kravene i proposisjon 4.18 at H maksimalt kan ha fire hjørner.

Hvis H er en 3-graf observerer vi at følgende graf på seks hjørner



er en kointervall 3-graf siden 1-laget er isomorft med kointervallgrafen med kantmengde $\{13, 14, 23\}$. Det tilhørende komplekset vil være éndimensjonalt, gitt av fasettene $\{1, 2\} \times \{4\} \times \{5\}$, $\{1\} \times \{3, 4\} \times \{5\}$ og $\{1\} \times \{3\} \times \{5, 6\}$.

Vi prøver å konstruere en kointervall 3-graf H' med éndimensjonalt kompleks som har mer enn seks hjørner. Vi observerer at hvis H' inneholder kanten $3ab$ så får vi trekanten $\{1, 2, 3\} \times \{a\} \times \{b\}$ i $X_{H'}$, så kantene i H' inneholder enten 1 eller 2. Dermed inneholder 1-laget til H' fem hjørner, og har et tilhørende todimensjonalt kompleks, noe som medfører at dimensjonen til $X_{H'}$ er minst to. Altså kan en 3-graf med éndimensjonalt kompleks maksimalt ha seks hjørner.

Vi ser at argumentasjonen over kan gjøres induktiv, og dessuten kan brukes for andre dimensjoner enn $\dim X_H = 1$. Vi får følgende resultat.

Teorem 4.20. *Det eksisterer en kointervall d -graf H med n -dimensjonalt kompleks X_H som har $(n+1)d$ hjørner. Dette er det maksimale antallet hjørner en graf med tilhørende n -dimensjonalt kompleks kan ha.*

Bevis. Vi beviser teoremet ved induksjon på n .

Vi antar $n = 1$, og bruker induksjon på d .

Hvis $d = 1$ så har vi allerede vist at H har to hjørner. Anta $d > 1$.

Siden $n = 1$ vil alle kantene i H inneholde hjørnene 1 eller 2, hvis ikke vil vi få et todimensjonalt fjes, $\{1, 2, i\} \times \cdots \times \sigma_d$ der $i > 2$, i X_H . Dermed inneholder 1-laget til H , som er en kointervall $(d-1)$ -graf, maksimalt $2(d-1) = 2d-2$ hjørner ved induksjonshypotesen. Siden 2 ikke nødvendigvis er inneholdt i 1-laget får vi at H har maksimalt $2d-2+2 = 2d$ hjørner.

La oss nå konstruere en d -graf H på $2d$ hjørner slik at $\dim X_H = 1$. Induksjonshypotesen gir oss at det finnes en $(d-1)$ -graf G på $2d-2$ hjørner slik at $\dim X_G = 1$. Velg én av kantene i kantmengden E_G , la oss kalle den $e' = \{e'_1, \dots, e'_{d-1}\}$, og la H være gitt ved kantmengden

$$E_H = \{\{1, e_1+2, \dots, e_{d-1}+2\} \mid \{e_1, \dots, e_{d-1}\} \in E_G\} \cup \{2, e'_1+2, \dots, e'_{d-1}+2\}.$$

Siden 2-laget til H kun består av ett punkt, og 1-laget er isomorft med G har vi at H er en kointervall d -graf på $2d$ hjørner. Fasettene i det tilhørende komplekset X_H er enten på formen $\{1, 2\} \times \{e'_1\} \times \cdots \times \{e'_{d-1}\}$ eller $\{1\} \times F$, der F tilsvarer en fasett i X_G etter av vi har trukket to fra alle hjørnemerkenene. Dermed har vi at $\dim X_H = 1$.

Vi har vist at teoremet holder for $n = 1$. Anta $n > 1$.

Alle kantene i H vil inneholde minst ett av hjørnene $1, \dots, n+1$, hvis ikke inneholder X_H det $(n+1)$ -dimensjonale fjeset $\{1, \dots, n+1, i\} \times \cdots \times \sigma_d$, der $i > n+1$. Induksjonshypotesen gir at 1-laget til H inneholder maksimalt $(n+1)(d-1)$ hjørner, slik at H har maksimalt $(n+1)(d-1) + n+1 = nd + d - n - 1 + n + 1 = nd + d = (n+1)d$ hjørner.

Det gjenstår å finne en kointervall d -graf H på $(n+1)d$ hjørner slik at $\dim X_H = n$. Induksjonshypotesen gir oss en $(d-1)$ -graf på $(n+1)(d-1)$

hjørner slik at $\dim X_G = n$. Vi velger én av kantene i E_G , $e' = \{e'_1, \dots, e'_{d-1}\}$, og lar H være gitt ved kantmengden

$$E_H = \{\{1, e_1 + n + 1, \dots, e_{d-1} + n + 1\} \mid \{e_1, \dots, e_{d-1}\} \in E_G\} \cup \\ \cup \{2, e'_1 + n + 1, \dots, e'_{d-1} + n + 1\} \cup \dots \cup \{n + 1, e'_1 + n + 1, \dots, e'_{d-1} + n + 1\}.$$

Da er 1-laget til H isomorft med G og de andre lagene består av ett punkt, slik at H er en kointervall d -graf på $(n + 1)d$ hjørner. Fasettene i X_H er enten på formen $\{1, \dots, n + 1\} \times \{e'_1\} \times \dots \times \{e'_{d-1}\}$ eller $\{1\} \times F$ der F tilsvarer fasetter i X_G etter at vi har trukket $n + 1$ fra alle hjørnemerkeene. Dermed har vi $\dim X_H = n$, og teoremet er bevist. \square

Kapittel 5

Oppløsninger konstruert av polytooper

I tidligere kapitler har vi hovedsaklig tatt for oss en bestemt type monomialideal, for deretter å finne komplekser som støtter oppløsninger av disse. I dette kapitlet skal vi istedet ta utgangspunkt i et kompleks, for deretter å finne et ideal som løses opp av komplekset. Resultatene er egenproduserte hvis ikke annet er spesifisert.

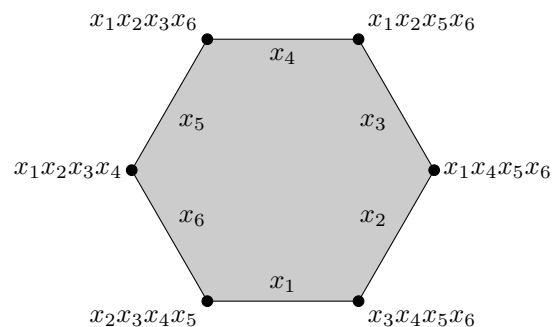
5.1 Oppløsninger støttet av polytooper

På s. 70 i [10] diskuteres en måte å merke simple polytooper på som gir opphav til en minimal oppløsning. Vi generaliserer dette resultatet for en vilkårlig polytop, men først definerer vi hva en simpel polytop er.

Definisjon 5.1. En d -polytop er *simpel* hvis hvert hjørne er inneholdt i d kanter.

Gitt en d -polytop P med hjørnemengde v_1, \dots, v_r og fasettene F_1, \dots, F_n . Vi tilegner en variabel til hver fasett, og merker hvert hjørne v_i med produktet av variablene som er tilegnet fasettene v_i *ikke* er inneholdt i. Hvert fjes merkes med minste felles multiplum av merkene til hjørnene i fjeset. Vi kaller denne merkingen *kontrafjesmerking*. Vi påstår at dette komplekset støtter en minimal cellulær oppløsning. La oss først se på noen eksempler.

Eksempel 5.2. Vi tar for oss en sekskant merket med kontrafjesmerkingen (for tydelighet merker vi hver fasett med sin tilegnede variabel):



Hvis den tidligere påstanden stemmer har vi at idealet

$$I = (x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_6, x_1x_2x_5x_6, x_1x_4x_5x_6, x_3x_4x_5x_6, x_2x_3x_4x_5)$$

har en oppløsning på formen

$$0 \leftarrow S \leftarrow S(-4)^6 \leftarrow S(-5)^6 \leftarrow S(-6) \leftarrow 0.$$

En utregning i Macaulay 2, et dataprogram for utregninger innenfor algebra og algebraisk geometri, viser oss at dette stemmer:

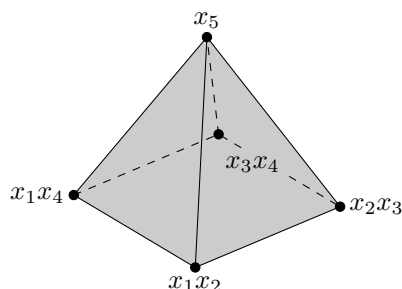
```

i1 : kk=ZZ/32749
o1 = kk
o1 : QuotientRing
i2 : S=kk[x_1..x_6]
o2 = S
o2 : PolynomialRing
i3 : I=ideal(x_1*x_2*x_3*x_4,x_1*x_2*x_3*x_6,x_1*x_2*x_5*x_6,x_1*x_4*x_5*x_6,
x_3*x_4*x_5*x_6,x_2*x_3*x_4*x_5)
o3 = ideal (x x x x , x x x x , x x x x , x x x x , x x x x , x x x x )
          1 2 3 4   1 2 3 6   1 2 5 6   1 4 5 6   3 4 5 6   2 3 4 5
o3 : Ideal of S
i4 : M=S^1/I
o4 = cokernel | x_1x_2x_3x_4 x_1x_2x_3x_6 x_1x_2x_5x_6 x_1x_4x_5x_6 x_3x_4x_5x_6
x_2x_3x_4x_5 |
          1
o4 : S-module, quotient of S
i5 : res M
          1      6      6      1
o5 = S <-- S <-- S <-- S <-- 0
          0      1      2      3      4
o5 : ChainComplex
i6 : betti res M
          0 1 2 3
o6 = total: 1 6 6 1
          0: 1 . . .
          1: . . . .
          2: . . . .
          3: . 6 6 1
o6 : BettiTally

```

Vi legger merke til at vi her har en 4-lineær oppløsning.

Eksempel 5.3. Vi ser denne gangen på en polytop som ikke er simpel, og der fasettene har forskjellig form, nemlig en pyramide med kvadratisk grunnflate. Vi tilegner variablene x_1, \dots, x_4 til sidene i pyramiden og x_5 til grunnflaten, og bruker kontrafjesmerking:



Dermed skal $I = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_1x_4, x_5)$ ha en oppløsning på formen

$$0 \leftarrow S \leftarrow S(-1) \oplus S(-2)^4 \leftarrow S(-3)^8 \leftarrow S(-4)^5 \leftarrow S(-6) \leftarrow 0$$

noe en utregning i Macaulay 2 bekrefter.

Vi formulerer nå det generelle resultatet, og beviser det.

Teorem 5.4. *En d -polytop P utstyrt med kontrafjesmerking vil som cellekompleks støtte en minimal fri oppløsning av idealet generert av merkene på hjørnene. Hvis polytopen er simpel vil oppløsningen være $(n - d)$ -lineær.*

Bevis. I beviset bruker vi noen resultater fra kap. 2.2 i [15].

Vi lar X være komplekset gitt ved P . Vi bruker proposisjon 1.20 for å sjekke at X støtter en cellulær oppløsning. Underkomplekset $X_{\leq b}$ vil være gitt ved et snitt av fasetter i P , dette snittet er et fjes i X , dermed er $X_{\leq b}$ asyklisk eller tomt.

For å vise at oppløsningen er minimal viser vi at gitt fjes $F \subset G$ der F er en fasett i G så vil F og G ha forskjellig merking. Vi skiller mellom to tilfeller.

Hvis G er lik hele polytopen P vil den være merket med $x_1 \cdots x_n$. F er en fasett med en tilegnet variabel x_i , slik at x_i ikke er med i merkingen til F . Dermed er merkene forskjellige.

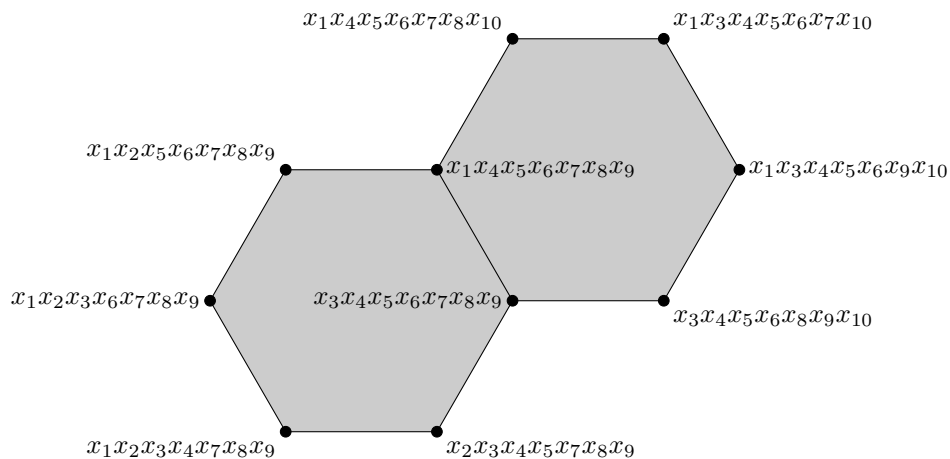
Hvis G ikke er lik P , det vil si at G ikke er det maksimale elementet i fjesgitteret til P , så vil det finnes et fjes $H \neq G$ slik at F er en fasett i H . Siden fjesgitteret er koatomisk vil alle elementer kunne skrives som et møtested mellom koatomer, i dette tilfellet et snitt av fasetter. Siden H og G er forskjellige så vil H være inneholdt i minst en fasett som G ikke er inneholdt i, vi antar at denne fasetten har x_i som tilegnet variabel. Da er x_i med i merkingen av G , men ikke i merkingen av F siden $F \subseteq G \cap H$. Dermed er merkene forskjellige, og oppløsningen er minimal.

Hvis P er simpel gir proposisjon 2.16 i [15] oss at hvert hjørne er inneholdt i d fasetter. Dermed har hvert hjørnermerke graden $n - d$, og oppløsningens minimalitet gir oss at den er $(n - d)$ -lineær siden fjesgitteret har lengden $\dim(P) + 1$. \square

5.2 Sammenliming av polygoner

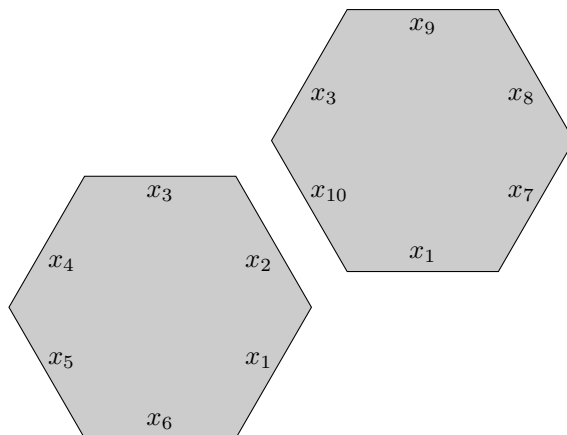
Vi skal i dette delkapittelet se nærmere på hvordan vi kan konstruere komplekser som støtter minimale cellulære oppløsninger ved å lime sammen polygoner, det vil si todimensjonale polytooper. Vi begynner med å se på et par eksempler som var viktige for å komme frem til resultatet.

Eksempel 5.5. På s. 72-73 i [9] finner vi en konstruksjon for å lime sammen to n -kanter, og et eksempel med to sekskanter:



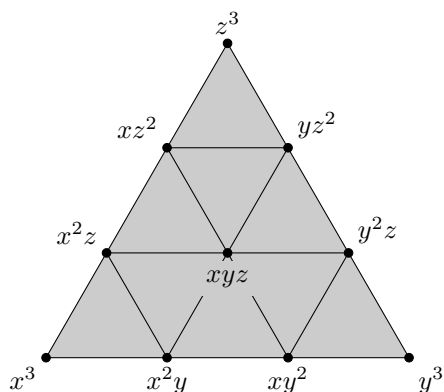
Dette komplekset støtter en minimal cellulær oppløsning.

Hvis vi splitter de to sekskantene og deler på fellesfaktoren til hjørnemerkenene i hver sekskant, $x_7x_8x_9$ for den til venstre og $x_4x_5x_6$ for den til høyre, så ser vi at merkingen til sekskantene minner om kontrafjesmerkingen:

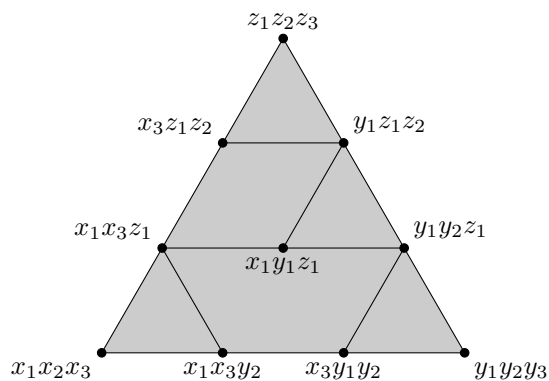


Vi ser at kantene som havner ved siden av hverandre etter sammenlimingen har samme tilegnede variabel.

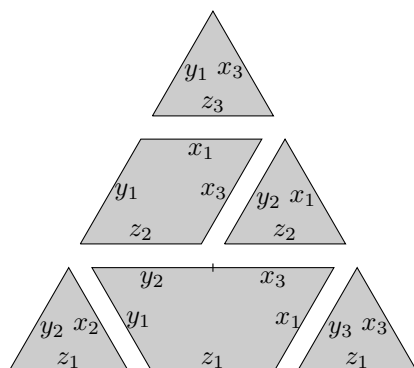
Eksempel 5.6. På s. 74-75 i [10] finner vi at innhylningskomplekset til $I = (x, y, z)^3$ er



og at dette komplekset støtter en minimal oppløsning hvis vi fjerner en av kantene i hver «ned»-trekant. Vi gjør dette, samt polariserer hjørnemerkeene på en bestemt måte:



Diskusjonen på s. 44 i [10] gir oss grunn til å håpe at dette cellekomplekset støtter en minimal oppløsning, noe vi lett kan verifisere at det gjør (bruk proposisjon 1.20, og skriv deretter opp oppløsningen for å sjekke minimalitet). Hvis vi splitter komplekset opp i polygonene det er bygd opp av og deler hjørnemerkeene på eventuelle felles faktorer ser vi igjen at merkingen minner om kontrafjesmerkingen:



Vi beskriver nå en måte å merke et kompleks X som er bygget opp ved å lime sammen polygoner. Vi begrenser oss til at to polygoner kun er limt sammen

langs én kant. La E være mengden av kanter i X , og la P være mengden av polygoner i X . La \mathbf{x} være mengden av variabler i polynomringen $S = \mathbb{k}[\mathbf{x}]$. Vi definerer en funksjon $l : E \times P \rightarrow \mathbf{x} \cup \{0\}$ på følgende måte:

1. $l(e, p) = 0$ hvis og bare hvis e ikke er inneholdt i p .
2. $l(e_1, p_1) = l(e_2, p_2)$ hvis e_1 og e_2 deler nøyaktig ett hjørne, at dette hjørnet er inneholdt i kanten som limer sammen p_1 og p_2 og at hverken e_1 eller e_2 er denne limekanten.
3. $l(e_1, p_1) \neq l(e_2, p_2)$ med mindre kravet over krever at de er like.

Vi merker komplekset X ved å velge en tilfeldig kant e i et polygon p , og tilegne denne kanten variabelen $l(e, p)$. Tilegn deretter denne variabelen til alle kanter som også sendes til $l(e, p)$ av funksjonen l . Velg deretter en kant som ikke har fått tilegnet en variabel (eller en delt kant som kun har én variabel) og fortsett prosedyren til alle kanter har en variabel, og alle kanter som er delt mellom to polygoner har to variabler.

Hver variabel $l(e, p)$ vil nå danne en «sti» gjennom X som deler komplekset i to, en del som inneholder polygonet p og en som ikke gjør det. Vi lar $l(e, p)$ være med i merket til alle hjørnene som ligger i halvdelen som inneholder p , men ikke ligger på stien. Se figur 5.1 for en illustrasjon på denne merkingen.

Hvis vi bruker denne merkingen på et enkelt polygon stemmer den overens med kontrafjesmerkingen. Vi kaller derfor også denne merkingen for kontrafjesmerking.

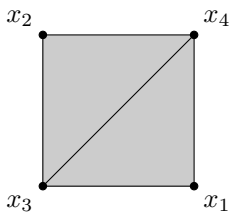
Merknad 5.7. For enkelte komplekser som inneholder lange kjeder av kvadrater og/eller trekanter kan stiene beskrevet over danne lukkede kurver og/eller vi kan få to kanter i samme polygon p der $l(e_1, p) = l(e_2, p)$. Figur 5.2 gir et eksempel på et slikt kompleks. Merkingen av hjørnene beskrevet over gir ikke mening i disse tilfellene, men det finnes en naturlig måte å merke disse på ved å først ta for seg hvert enkelt polygon og merke hjørnene v i dette polygonet p med

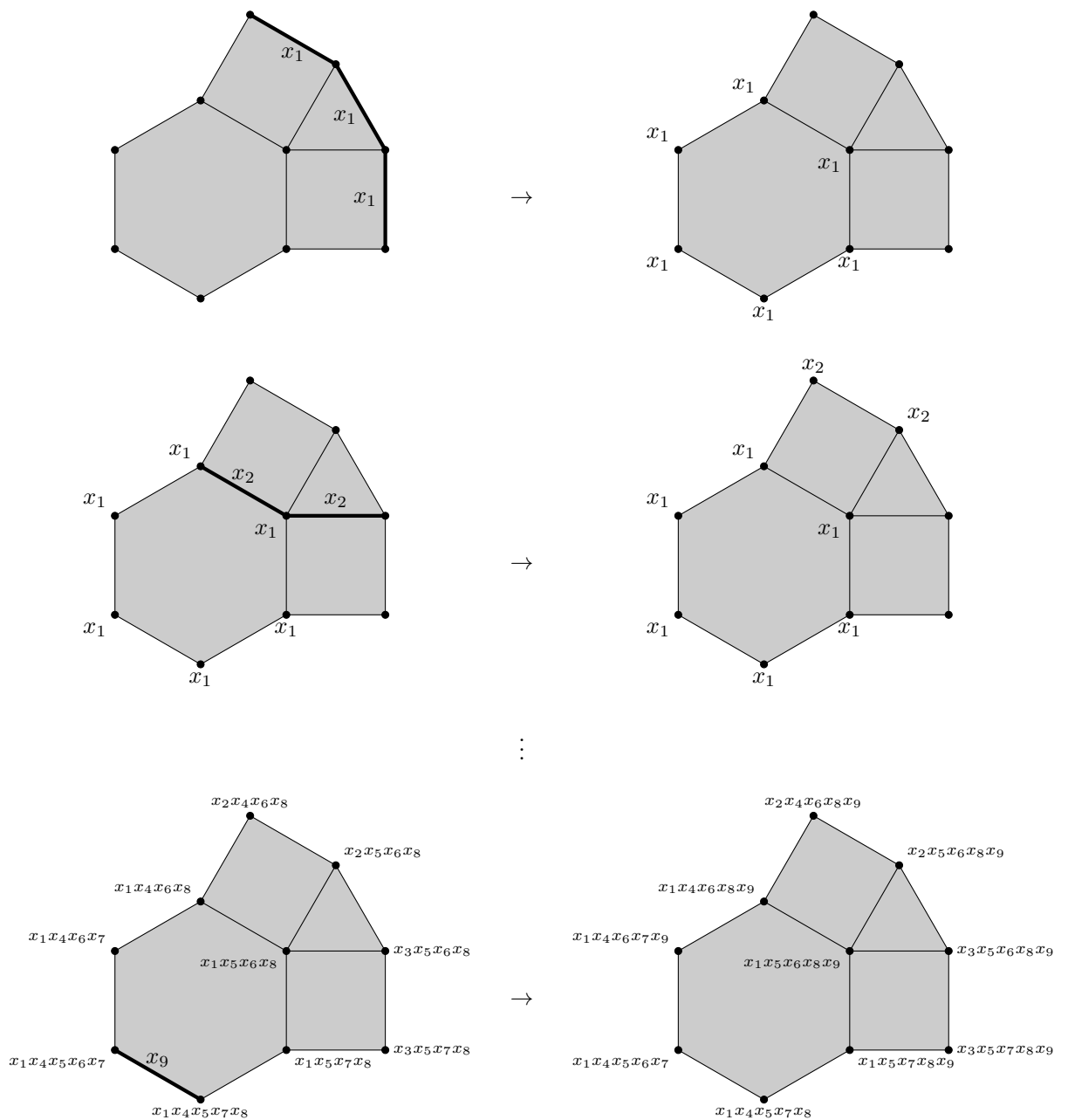
$$\prod_{e \in p, v \notin e} l(e, p),$$

for deretter å lime sammen polygonene ved å multiplisere hjørnemerkeene med monomer slik at hjørner som er med i flere polygoner får samme merke i alle disse polygonene.

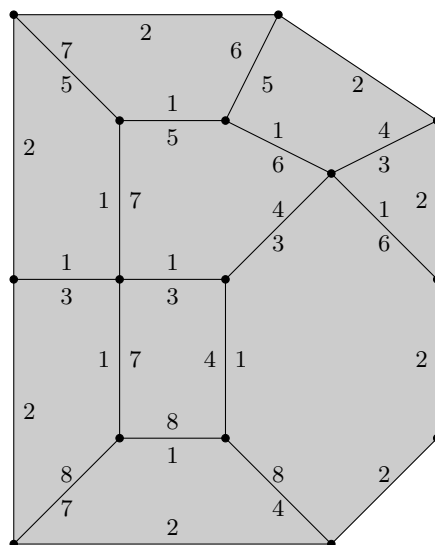
Utstyrt med en slik merking synes det som at slike komplekser ikke støtter cellulære oppløsninger, selv om vi ikke har klart å bevise dette. Vi ser derfor bort fra disse tilfellene.

Ikke alle komplekser merket med kontrafjesmerkingen støtter cellulære oppløsninger, et enkelt eksempel er følgende kompleks X





Figur 5.1: Eksempel på kontrafjesmerking av et kompleks av sammenlimte polygoner.



Figur 5.2: Et kompleks som inneholder lukkede stier og der kanter i samme polygon får tilegnet samme variabel (her representert ved siffer for plasshensyn).

der $X_{\leq(0,0,1,1)}$ består av to adskilte punkter, men hvis et slikt kompleks støtter en cellulær oppløsning har oppløsningen fine egenskaper.

Teorem 5.8. *Hvis et kompleks X av sammenlimte polygoner utstyrt med kontrajfesmerkingen støtter en cellulær oppløsning så vil denne oppløsningen være minimal og d -lineær, der d er graden til hjørnemerkenene. Vi ser bort fra kompleksene beskrevet i merknad 5.7.*

Bevis. Vi begynner med å argumentere for at alle hjørnemerker har samme grad. Vi kan anta at kantene i hvert enkelt polygon alle har forskjellige tilegnede variabler.

Hvis polygonet har n kanter så vil vært hjørne ligge i to kanter i polygonet, dermed vil stiene merket med $l(e, p)$ der p er polygonet bidrar med $n - 2$ variabler til hvert hjørnemerke i polygonet. I tillegg kommer stier som ikke inneholder hjørner fra polygonet, men disse vil også bidra med like mange variabler per hjørne. Altså er alle hjørnene i polygonet merket med like mange variabler. Siden polygonet deler hjørner med andre polygoner, og komplekset er sammenhengende, så vil alle hjørnene i komplekset være merket med kvadratfrie monomer av samme grad d .

Kanter er merket med minste felles multiplum til hjørnene det inneholder. $d - n + 2$ av variablene i hjørnemerkenene vil være like siden de kommer fra stier som ikke inneholder hjørner fra polygonet. I tillegg vil $n - 3$ av de resterende variablene være like siden hjørnene til sammen er inkludert i tre kanter, og dermed ikke er inkludert i de samme $n - 3$ kantene. Dermed vil $d - n + 2 + n - 3 = d - 1$ av variablene være like, slik at graden til merket til kanten blir $d + 1$.

Hvis vi ser på merket til et helt polygon vil $d - n + 2$ av variablene til hjørnemerkenene i polygonet være like siden de kommer fra stier som ikke inneholder hjørner fra polygonet, i tillegg får vi de n variablene som kommer fra kantene

i polygonet. Dermed har merket til polygonet graden $d - n + 2 + n = d + 2$.

Av dette følger både linearitet og minimalitet (fjes i forskjellig dimensjon har merker av forskjellig grad). \square

Ved hjelp av dette kan vi nå vise en rekke resultater.

5.2.1 Sammenliming av to polygoner

Proposisjon 5.9. *Et kompleks X som består av to sammenlimte polygoner, ett med n kanter og ett med m kanter, støtter en minimal $(m + n - 5)$ -lineær oppløsning bortsett fra hvis $m = n = 3$.*

Bevis. Teorem 5.8 gir oss at hvis komplekset støtter en oppløsning så er den minimal og lineær. Siden merkene til hjørnene er kvadratfrie monomer kan vi bruke proposisjon 1.20 med kvadratfrie vektorer \mathbf{b} for å sjekke om komplekset støtter en oppløsning. Vektorene \mathbf{b} vil ha $m + n - 2$ koordinater siden vi har to par kanter som tilegnes samme variabel.

Hjørnemerke vil ha grad $m+n-5$. Vi ser på ett av hjørnene i limekanten for å vise dette. Dette hjørnet merkes med $m-2$ variabler fra det ene polygonet (vi trekker fra de to variablene som er tilegnet kantene hjørnet er med i) og $n-2$ variabler fra det andre. De to polygonene har to kanter med felles merking, hjørnet vi ser på er med i ett av disse parene, dermed har vi brukt samme variabel to ganger. Hjørnemerket får graden $m-2+n-2-1 = m+n-5$. Dermed får vi følgende:

Hvis $|\mathbf{b}| = m + n - 2$ så er $X_{\leq \mathbf{b}} = X$.

Hvis $|\mathbf{b}| = m + n - 3$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ komplekset som består av alle hjørnene som ikke inneholder en av variablene. Vi har da tre muligheter: hvis variabelen er tilegnet en limekant sitter vi igjen med et av polygonene, hvis variabelen er tilegnet mer enn en kant sitter vi igjen med to sammenhengende kanter, eller sitter vi igjen med en kant. Alle disse delkompleksene er kontraktible og dermed asykliske.

Hvis $|\mathbf{b}| = m + n - 4$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ et snitt av to komplekser av typen beskrevet over. Vi har følgende muligheter:

- $\text{polygon} \cap \text{polygon} = \text{kant}$;
- $\text{polygon} \cap \text{to sammenhengende kanter} = \text{kant}$ (de to kantene er i hvert sitt polygon);
- $\text{polygon} \cap \text{kant} = \text{kant eller tomt}$;
- $\text{to sammenhengende kanter} \cap \text{to sammenhengende kanter} = \text{et punkt, tomt eller to punkter}$ (siste delkompleks er ikke asyklisk, men vi ser lett at dette kun skjer hvis $m = n = 3$);
- $\text{to sammenhengende kanter} \cap \text{kant} = \text{et punkt eller tomt}$;
- $\text{kant} \cap \text{kant} = \text{et punkt eller tomt}$.

Hvis $|\mathbf{b}| \leq m + n - 5$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ enten et punkt eller tomt på grunn av graden til hjørnemerke.

Alle de overnevnte kompleksene er asykliske, dermed støtter X en cellulær oppløsning. \square

Komplekset i eksempel 5.5 er et eksempel på et slikt kompleks.

5.2.2 Sammenliming av tre polygoner

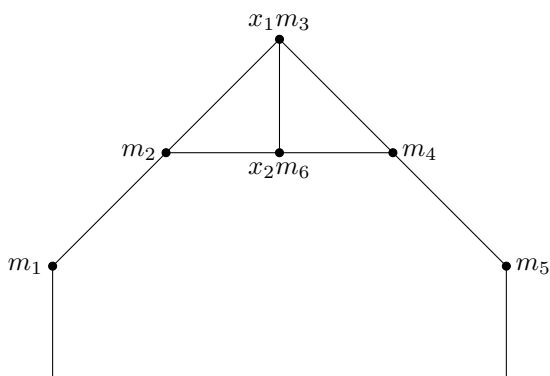
Proposisjon 5.10. *Et kompleks X består av tre sammenlimte polygoner slik at hvert polygon har én felles kant med hvert av polygonene samt ett felles hjørne med begge. La $m \leq n \leq o$ være antallet hjørner i de tre polygonene. Hvis vi merker X med kontrafjesmerkingen vil komplekset støtte en minimal d -lineær oppløsning med mindre $m = n = 3$ eller $m = 3$ og $n = o = 4$.*

Bevis. Vi ser først på unntakene.

Anta at $m = n = 3$. Kantene i trekantene som er felles med det siste polygonet vil ha samme tilegnede variabel, vi lar denne være x_1 . Kantene i trekantene som ikke er felles med andre polygoner vil også ha samme variabel, vi lar denne være x_2 . Vi skiller nå mellom to tilfeller.

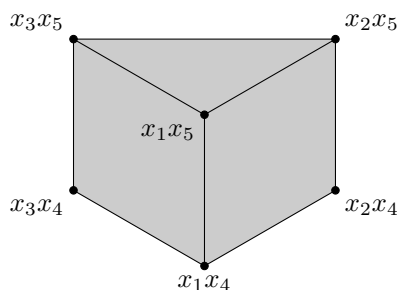
Hvis $o = 3$ så vil alle kantene i komplekset som kun er inneholdt i ett polygon ha tilegnet variabel x_2 . Da vil kun hjørnet i midten av komplekset være merket med x_2 slik at $X_{\leq(1,0,1,\dots)}$ vil ha et hull i midten og ikke være asyklisk.

Hvis $o > 3$ så vil det siste polygonet inneholde to kanter med x_2 som tilegnet variabel, slik at merkingen blir



der m_i er monomer som ikke inneholder x_1 eller x_2 , og alle hjørnene som ikke er med har merker som inneholder x_2 . Dermed blir $X_{\leq(0,0,1,1,\dots)}$ bestående av kanten mellom hjørnene merket m_1 og m_2 og kanten mellom hjørnene merket m_4 og m_5 , et ikke-sammenhengende og dermed ikke-asyklisk kompleks.

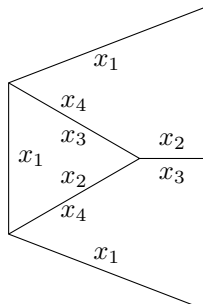
Hvis $m = 3$ og $q = r = 4$ får vi følgende kompleks:



Vi ser lett at $X_{\leq(0,1,1,1,0)}$ består av to punkter og ikke er asyklisk.

Vi bruker nå proposisjon 1.20 for å vise at alle andre komplekser av denne typen støtter cellulære oppløsninger. Resultatet følger da fra teorem 5.8

Anta først at $m = 3$. Da vil de kantene som er involvert i sammenlimingen tilegnes variabler på følgende måte:



De resterende kantene vil alle tilegnes forskjellige variabler, dermed får vi ved å telle antall kanter og trekke fra de som merkes med like variable at vi har $m + n + o - 5 = n + o - 2$ forskjellige variabler. Hjørnet som er felles for alle polygonene vil få hjørnemerket $x_1 x_5 \cdots x_{n+o-2}$, slik at hjørnemerkeene har grad $n + o - 5$. Vi ser på $X_{\leq \mathbf{b}}$ for kvadratfrie vektorer \mathbf{b} .

Hvis $|\mathbf{b}| = n + o - 2$ så er $X_{\leq \mathbf{b}} = X$.

Hvis $|\mathbf{b}| = n + o - 3$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ enten en kant, et polygon eller tre sammenhengende kanter.

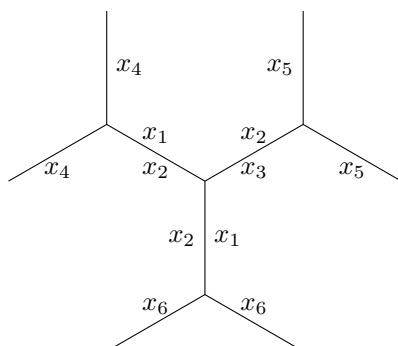
Hvis $|\mathbf{b}| = n + o - 4$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ et snitt av to komplekser av typen beskrevet over. Vi får følgende muligheter:

- kant \cap kant = et punkt eller tomt;
- kant \cap polygon = en kant, et punkt eller tomt;
- kant \cap tre sammenhengende kanter = et punkt eller tomt;
- polygon \cap polygon = en kant;
- polygon \cap tre sammenhengende kanter = en kant;
- tre sammenhengende kanter \cap tre sammenhengende kanter er umulig da vi bare har ett slikt delkompleks ($X_{\leq (0,1,1,\dots)}$).

Hvis $|\mathbf{b}| \leq n + o - 5$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ enten et punkt eller tomt.

Alle de overnevnte kompleksene er asykliske eller tomme, slik at X støtter en cellulær oppløsning.

Anta nå at $m > 3$. Da vil kantene som er involvert i sammenlimingen tilegnes variabler på følgende måte:



De resterende kantene vil alle tilegnes forskjellige variabler, slik at vi får totalt $m + n + o - 6$ variabler. Hjørnet som er felles for alle polygonene får merket $x_4 x_5 \cdots x_{m+n+o-6}$ slik at hjørnemerkenene har grad $m + n + o - 9$. Vi ser på $X_{\leq \mathbf{b}}$ for kvadratfrie vektorer \mathbf{b} .

Hvis $|\mathbf{b}| = m + n + o - 6$ så er $X_{\leq \mathbf{b}} = X$.

Hvis $|\mathbf{b}| = m + n + o - 7$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ enten en kant, et polygon eller to sammenhengende kanter.

Hvis $|\mathbf{b}| = m + n + o - 8$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ et snitt av to kompleks av typen beskrevet over. Vi får følgende muligheter:

- kant \cap kant = et punkt eller tomt;
- kant \cap polygon = en kant eller tomt;
- kant \cap to sammenhengende kanter = et punkt eller tomt;
- polygon \cap polygon = en kant;
- polygon \cap to sammenhengende kanter = en kant eller tomt;
- to sammenhengende kanter \cap to sammenhengende kanter = tomt, siden $m > 4$.

Hvis $|\mathbf{b}| \leq m + n + o - 9$ så er $X_{\leq \mathbf{b}}$ et punkt eller tomt.

Alle de overnevnte kompleksene er asykliske eller tomme, slik at X støtter en cellulær oppløsning. \square

Eksempel 5.11. Komplekset i figur 5.3 gir oss at idealet I generert av hjørnemerkenene til komplekset har en fri minimal 8-lineær oppløsning på formen

$$0 \leftarrow I \leftarrow S(-8)^{12} \leftarrow S(-9)^{14} \leftarrow S(-10)^3 \leftarrow 0.$$

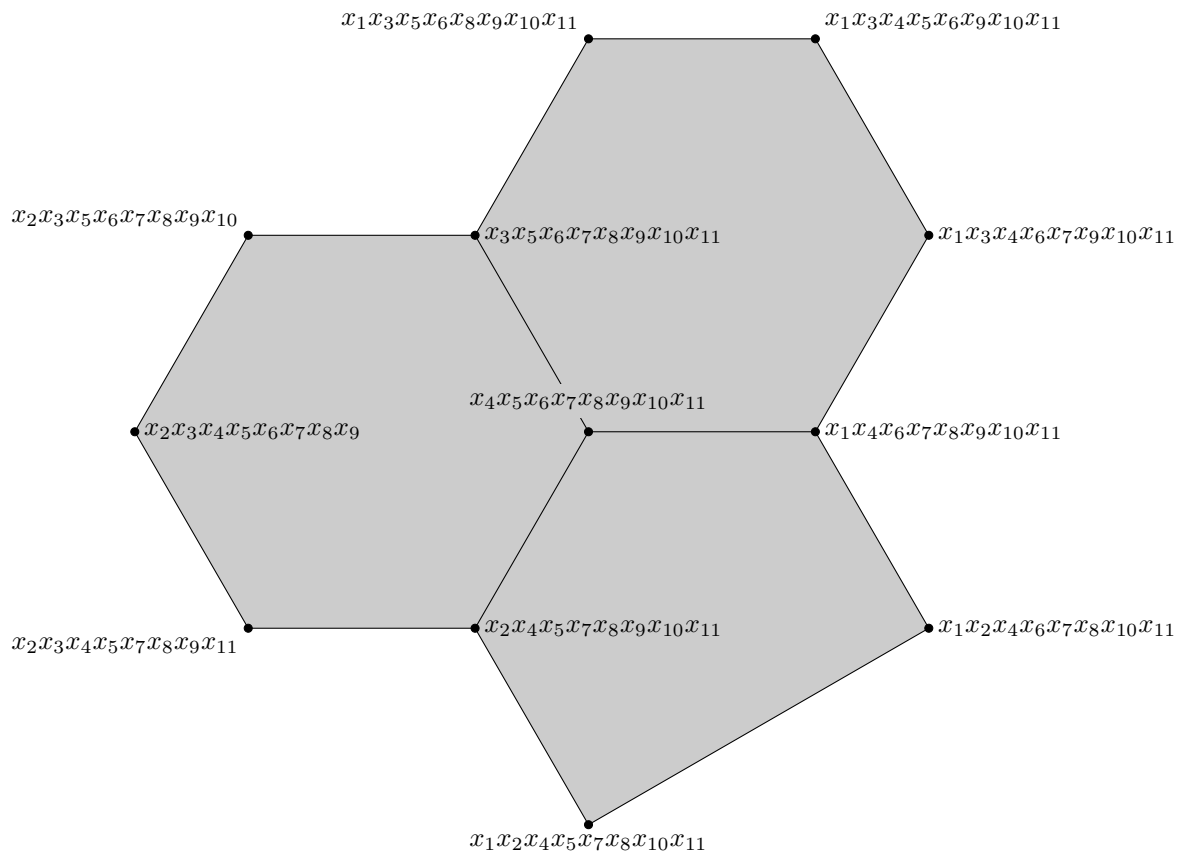
5.2.3 Trådkomplekser

Konstruer et kompleks på følgende måte: Begynn med et polygon, lim på et nytt polygon langs nøyaktig én kant. Gjenta så denne prosedyren så mange ganger som ønsket. Merk komplekset med kontrafjesmerkingen. Vi kaller et slikt kompleks et *trådkompleks*.

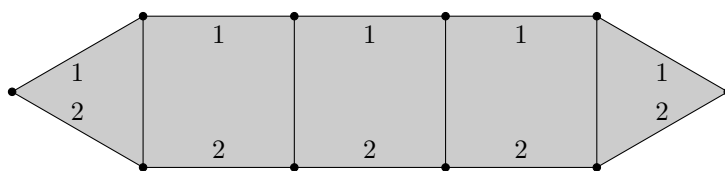
Et eksempel på et slikt kompleks som *ikke* støtter en cellulær oppløsning konstruerer vi på følgende måte: Begynn med en trekant, lim deretter på så mange firkanter som ønsket ved å hele tiden la limekantene være motstående sider i firkantene, avslutt med en trekant (antallet firkanter kan godt være null, da får vi to sammenlimte trekanter). Se figur 5.4 for et eksempel. Vi ser at $X_{\leq (0,0,1,1,\dots)}$ vil bestå av to punkter og dermed være asyklisk.

Vi påstår at inklusjonen av et slikt kompleks er det eneste som kan gå galt i den overnevnte konstruksjonen og får følgende resultat:

Proposisjon 5.12. *Et trådkompleks støtter en minimal d -lineær oppløsning så lenge det ikke inneholder et delkompleks av typen illustrert i figur 5.4.*



Figur 5.3: Et kompleks av tre sammenlimte polygoner med kontrafjesmerking.



Figur 5.4: Et trådkompleks som ikke støtter en cellulær oppløsning. Kun tilegningen av de to første variablene er tatt med.

Bevis. Vi lar n være antall polygoner i komplekset og bruker induksjon på n .

For $n = 2$ har vi allerede vist resultatet i proposisjon 5.9. Anta $n > 2$.

Vi konstruerer trådkomplekset X ved å lime et polygon på et trådkompleks Y bestående av $n - 1$ polygoner. To av kantene i polygonet blir merket med variabler som allerede er tildelt andre kanter, la oss kalle disse x_1 og x_2 . De andre kantene i polygonet tildeles nye variabler.

Vi lar d_X og d_Y være antall variable involvert i merkingen av henholdsvis X og Y , og merker oss at $d_X > d_Y$. Vi lar vektorene \mathbf{b}_i og \mathbf{a}_i være vektorene med henholdsvis d_X og d_Y koordinater der alle koordinatene er 1 bortsett fra den i -nde, som er 0. Da får vi delkompleksene $X_{\leq \mathbf{b}_i}$ og $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ ved å fjerne alle hjørner som har merker som inneholder x_i fra henholdsvis X og Y .

Delkompleksene $X_{\leq \mathbf{b}_i}$ kan klassifiseres som følger:

- Hvis $i = d_Y + 1, \dots, d_X$ så er $X_{\leq \mathbf{b}_i}$ enten lik trådkomplekset Y eller en av kantene i det pålimte polygonet som ikke snitter Y .
- Hvis $i = 3, \dots, d_Y$ så er $X_{\leq \mathbf{b}_i}$ enten lik $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ eller lik $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ pålimt polygonet vi limer på Y .
- Hvis $i = 1, 2$ så er $X_{\leq \mathbf{b}_i}$ lik $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ pålimt en kant fra polygonet vi limer på Y .

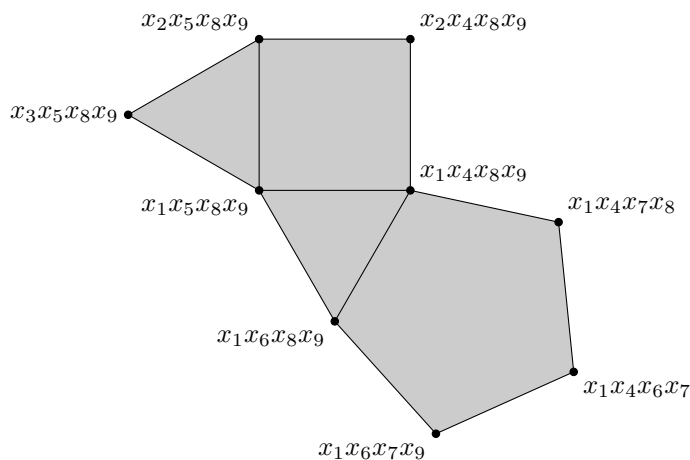
Induksjonshypotesen gir at $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ er asyklisk eller tomt, dermed er alle delkompleksene beskrevet over også asykliske eller tomme. Det gjenstår å vise at et endelig snitt av slike også er asyklisk eller tomt, da følger resultatet av proposisjon 1.20 og teorem 5.8.

Vi innfører følgende nummerering av forskjellige typer delkomplekser.

1. Trådkomplekset Y ;
2. kant i det pålimte polygonet som ikke snitter Y ;
3. vilkårlig delkompleks $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$;
4. vilkårlig delkompleks $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ pålimt polygonet vi limer på Y ;
5. vilkårlig delkompleks $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ pålimt en kant fra polygonet vi limer på Y ;
6. et punkt;
7. det tomme komplekset;
8. vilkårlig delkompleks $Y_{\leq \mathbf{a}_i}$ samt et punkt.

Vi ser at delkompleksene $X_{\leq \mathbf{b}_i}$ alle er av denne typen, og får følgende tabell over hvordan de snitter:

\cap	1	2	3	4	5
1	1	7	3	3	3
2	-	6 el. 7	7	2	6 el. 7
3	-	-	3	3	3
4	-	-	-	4	5
5	-	-	-	-	3 el. 8



Figur 5.5: Eksempel på trådkompleks.

Hvis vi ser bort fra $5 \cap 5$ så vil alle endelig snitt av komplekser av typen 1-5 alltid være en typene 1-7 som alle er asykliske eller tomme. Når skaper snittet $5 \cap 5$ et problem? Når vi får et snitt av type 8 der $Y_{\leq a}$ ikke er tomt.

Før at dette skal kunne skje må to kriterier være oppfylt: kantene i det pålimte polygonet som har fått tilegnet variablene x_1 og x_2 må ha et felles hjørne, det vil si at det pålimte polygonet må være en trekant, og $Y_{\leq a_1} \cap Y_{\leq a_2}$ kan ikke være tomt, det vil si at stiene som kantene tilegnet variablene x_1 og x_2 danner gjennom Y må møtes. Hvis vi limer trekanten på noe annet enn en firkant eller en trekant blir dette med en gang umulig, da stiene forsvinner i forskjellige retninger og ikke kan forenes igjen på grunn av måten komplekset konstrueres. Hvis vi limer den på en trekant får vi at X inneholder et kompleks som i figur 5.4. Hvis vi limer den på en firkant kan vi igjen bare lime firkanter og trekanten på den motstående siden av denne firkanten av samme grunn som før. Før eller siden må vi dessuten bruke en trekant for å få stiene til å møtes. Dermed oppstår problemet kun hvis X inneholder et delkompleks som i figur 5.4, og resultatet er bevist. \square

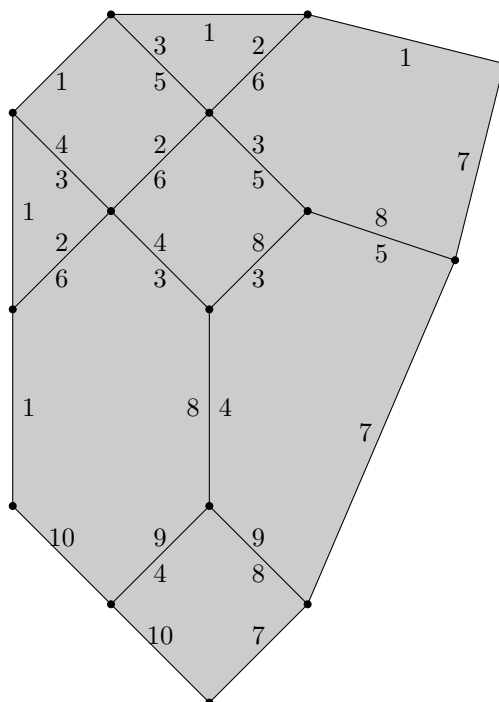
Merk at et hvilket som helst kompleks merket med kontrafjesmerking som inneholder et delkompleks som i figur 5.4 aldri vil støtte en cellulær oppløsning.

Eksempel 5.13. Trådkomplekset i figur 5.5 gir oss at

$$I = (x_1x_4x_6x_7, x_1x_4x_7x_8, x_1x_4x_8x_9, x_1x_5x_8x_9, x_1x_6x_7x_9, \\ x_1x_6x_8x_9, x_2x_4x_8x_9, x_2x_5x_8x_9, x_3x_5x_8x_9)$$

har en oppløsning på formen

$$0 \leftarrow I \leftarrow S(-4)^9 \leftarrow S(-5)^{12} \leftarrow S(-6)^4 \leftarrow 0.$$



Figur 5.6: Eksempel på kompleks som ikke støtter en cellulær oppløsning.

5.3 Veier videre

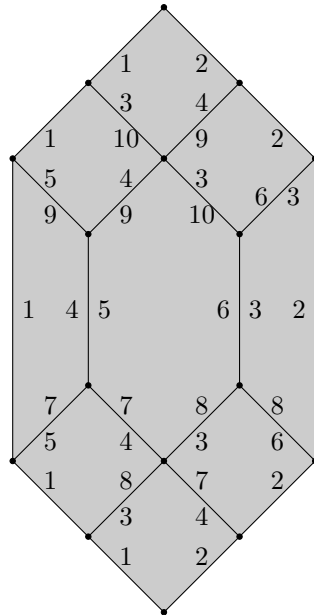
Dette delkapittelet inneholder noen ideer til områder innenfor dette emnet som kunne vært verdt å forfølge videre.

Vi begynner med å se at kontrafjesmerkingen kan brukes til å merke komplekser som består av mer enn tre polygoner og som ikke er trådkomplekser. Det er forholdsvis lett å sjekke om slike komplekser støtter en cellulær oppløsning eller ikke. Komplekset i figur 5.6 inneholder et underkompleks som i figur 5.4 og støtter dermed ikke en cellulær oppløsning siden $X_{\leq(0,0,1,\dots)}$ ikke er asyklisk.

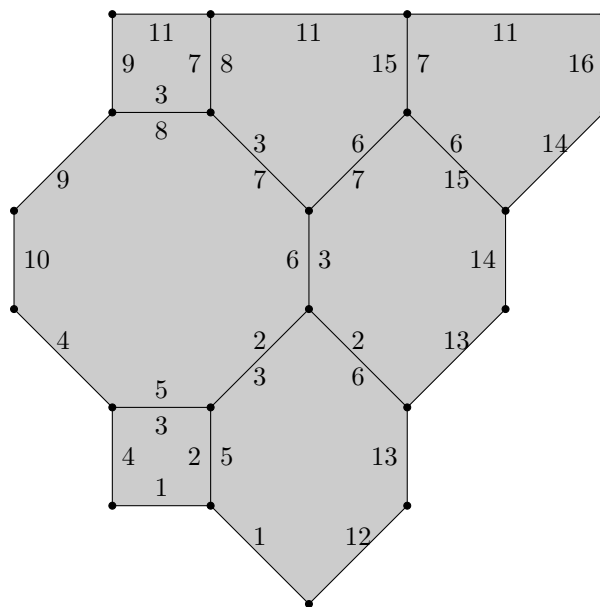
Komplekset i figur 5.7 inneholder ikke et slikt underkompleks, men støtter allikevel ikke en cellulær oppløsning. Vi ser at stiene til kantene merket 1 og 2 vil møtes i begge ender, slik at $X_{\leq(0,0,1,\dots)}$ består av to punkter og dermed ikke er asyklisk.

At komplekset i figur 5.8 faktisk støtter en cellulær oppløsning krever noe inspeksjon, men kan undersøkes relativt raskt. Vi ser at dette komplekset ikke inneholder lange sammenhengende delkomplekser av tre- og firkanter som har skapt problemer tidligere. Videre undersøkelser i denne retning kan kanskje gi et endelig kriterium på når et generelt kompleks bygget opp av polygoner støtter en cellulær oppløsning.

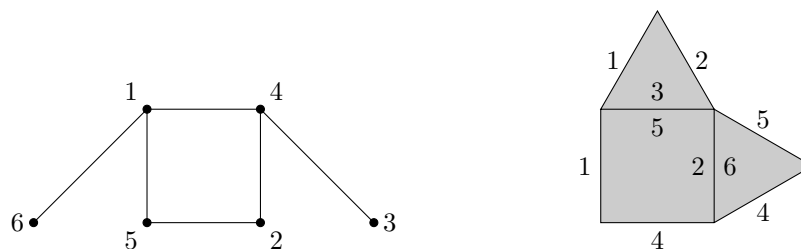
Et annet spørsmål er på hvilke måter vi kan spesialisere merkene til komplekser utstyrt med kontrafjesmerkingen. Her kan vi bruke komplekser som støtter kantidealene til kointervallgrafer som et eksempel. I figur 5.9 har vi en kointervallgraf samt komplekset som støtter oppløsningen til kantidealet til grafen.



Figur 5.7: Eksempel på kompleks som ikke støtter en cellulær oppløsning.



Figur 5.8: Eksempel på kompleks som støtter en cellulær oppløsning.



Figur 5.9: En kointervallgraf med kompleks der merkingen sammenfaller med kontrafjesmerkingen.

Vi ser at dette komplekset er utstyrt med kontrafjesmerking. Flere andre kointervallgrafer har tilhørende komplekser som er satt sammen av de samme polygonene, men utstyrt med en annen merking. Denne merkingen kan vi få ved å spesialisere kontrafjesmerkingen, det vil si ved å «slå sammen» noen av variablene.

Eksempler på dette er kompleksene 14, 16 og 17 i figur 4.2. Disse kompleksene er alle spesialiseringer av komplekset i figur 5.9, de to første får vi ved å la kanten tilegnet 6 istedet tilegnes henholdsvis 3 og 2, det siste får vi ved å la kanten tilegnet 6 istedet tilegnes 2 og kanten tilegnet 5 istedet tilegnes 3.

En måte å endre kontrafjesmerkingen på er å la $l(e, p_1) = l(e, p_2)$ når e er kanten som limer sammen p_1 og p_2 . Vi ser at det er dette som har blitt gjort, enten delvis eller fullstendig, i spesialiseringene diskutert over. Empiriske undersøkelser på noen eksempler indikerer at proposisjon 5.12 holder for en slik merking.

En siste ting som kan være interessant å se på er hvordan man kan lime sammen polytofer utstyrt med kontrafjesmerking når disse polytopene ikke er polygoner, eventuelt når vi har polytofer i forskjellige dimensjoner. Ser vi nærmere på merkingen av kompleksene i figur 2.3 og figur 3.1 ser vi at hver enkel polytop er merket med kontrafjesmerking i tillegg til en eventuell felles faktor i alle merkene, og at sammenliming ser ut til å fungere som tidligere, at fjes som blir «naboer» etter sammenlimingen merkes likt.

Det er verdt å merke seg at alle kompleksene vi har diskutert i oppgaven ser ut til å ha en forbindelse til kontrafjesmerking. Et generelt resultat om sammenliming av polytofer utstyrt med slik merking, samt spesialisering av slike komplekser, kan derfor potensielt generalisere alle resultatene vi har diskutert.

Bibliografi

- [1] G. Agnarsson & R. Greenlaw, *Graph Theory: Modeling, Applications and Algorithms*, Pearson International Edition, Prentice Hall, 2007.
- [2] M. Brun & G. Fløystad, The Auslander-Reiten translate on monomial quotient rings (2008). Hentet fra <http://arxiv.org/abs/0802.2772>
- [3] A. Corso & U. Nagel, Monomial and Toric Ideals Associated to Ferrers Graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 1371-1395.
- [4] A. Corso & U. Nagel, Specializations of Ferrers Ideals, *J. Algebr. Comb.* **28** (2008), 425-437.
- [5] A. Dochtermann & A. Engström, Cellular resolutions of cointerval ideals, *Math. Z. Online First* DOI 10.1007/s00209-010-0789-z (2010), 1-19.
- [6] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1995.
- [7] H. N. de Ridder et al., Graphclass: threshold, Information System on Graph Classes and their Inclusions. Hentet fra http://www.graphclasses.org/classes/gc_328.html (2011-05-20).
- [8] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [9] K. Loe, Stanley-Reisner ringer med sykliske gruppevirkninger [masteravhandling], Universitetet i Bergen, 2009, 77 s.
- [10] E. Miller & B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **227**, Springer, 2005.
- [11] J. R. Munkres, *Topology*, 2. utgave, Prentice Hall, 2000.
- [12] U. Nagel & V. Reiner, Betti Numbers of Monomial Ideals and Shifted Skew Shapes, *The Electronic Journal of Combinatorics* **16 (2)** (2009), #R3
- [13] M. S. Osborne, *Basic Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **196**, Springer, 2000.
- [14] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Pure and Applied Mathematics **85**, Academic Press, 1979.
- [15] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer, 1995.