Brøkforståing hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen

Jorunn Antun

Masteroppgåve i matematikkdidaktikk
MAUMAT 650

Matematisk institutt, Universitetet i Bergen

1. mai 2015

Forord

Etter mange år som lærar i grunnskulen og den vidaregåande skulen starta eg hausten 2011 på eit deltidsstudium ved UiB: «Erfaringsbasert master med fordjuping i matematikk». Eg har alltid hatt glede av å undervisa i matematikk, og eit ynskje om å studera meir matematikk utover det eg har hatt i fagkrinsen min.

I masteroppgåva mi har eg undersøkt brøkforståing hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen. Arbeidet har vore krevjande, men interessant og lærerikt. Det har vore verdifullt både med omsyn til eigenutvikling og refleksjonar kring matematikkundervisning generelt. Dette håpar eg skulen og framtidige elevar vil få nytte av.

Når eg no ser tilbake på desse fire åra, er det mange som fortener ein takk:

- Ein stor takk til rettleiaren min, Christoph Kirfel, for hjelp og konstruktive innspel undervegs gjennom heile prosessen.
- Takk til mine medstudentar, særleg kull-11: Jill, Tone, Elin, Tom og Torbjørn, for samarbeid, oppmuntring og støtte gjennom desse åra.
- Takk til arbeidsgjevar for oppmuntrande ord og god tilrettelegging av arbeidstid slik at det har vore mogleg for meg å gjennomføra dette studiet kombinert med jobb.
- Takk til elevane som deltok i denne undersøkinga, og særleg dei som lot seg intervjua.
- Takk til Sigrun som har lese korrektur på oppgåva og kome med gode råd.
- Og sist, men ikkje minst: Ein stor takk til Knut Rasmus for god hjelp, støtte og oppmuntring undervegs i arbeidet med masteroppgåva mi. Takk for tålmod, gode innspel og hjelp til å sortera tankar når dette var naudsynt.

Bergen, 01.05.2015

Jorunn Antun

Samandrag

Målet for denne oppgåva har vore å få større innsikt i kva brøkforståing elevar som startar i den vidaregåande skulen kan ha. To forskingsspørsmål har lagt til grunn for arbeidet mitt:

1. Kva forståing av og dugleikar i brøk og brøkrekning kan ein finna hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen?
2. Kva misoppfatningar rundt omgrepet brøk og brøkrekning kan ein finna hjå elevane?

Trettito elevar har delteke i undersøkinga. Dei har nett starta i den vidaregåande skulen, etter å ha gått på ulike ungdomsskular spreidd over heile landet. Ein skriftleg kartleggingstest gav informasjon om kva elevane meistra innan sentrale aspekt ved brøk og moglege misoppfatningar knytt til brøk og brøkrekning. Deretter vart om lag ein tredel av informantane intervjua for å få større innsikt i korleis dei tenkjer. Datamaterialet vart analysert ut frå eit konstruktivistisk syn på læring.

Undersøkinga mi viser eit stort spenn med omsyn til brøkforståing. Utfordringar kjem i særleg grad til synes i overgangane mellom kjennskap til prosedyrar, iverksetjing av prosedyrar og forståing for korleis desse faktisk verkar. Nokre elevar har berre fragmentarisk innsikt i prosedyrar. Andre elevar har eit isolert fokus på reglar; dei er kjend med ulike prosedyrar og nyttar algoritmar ved operasjonar på brøk. Feil som kjem fram er knytt til faktisk utføring av prosedyrane; ulike reglar vert blanda saman, eller det stoppar opp for elevar når ei prosedyre ikkje kan nyttast direkte. Ein ser vidare døme på elevar som evnar å sjå samanhengar, og som i praksis greier å setja saman ulike prosedyrar og nytta brøkomgrepet i ulike kontekstar. Mange greier likevel fortsatt ikkje forklara kva dei gjer og kvifor dei gjer det dei gjer. Mangel på forståing ser ut til å vera den gjennomgåande faktoren som set grenser for meistring på høgare nivå. Samla sett får ein her stadfesta at eit grunnlag bygd på dugleikar utan forståing er laust fundamentert; det skal lite til før elevane vert usikre eller at reknereglar vert gløymd.

Manglande forståing gjer at ulike misoppfatningar kjem til syne, både når brøkar skal ordnast og samanliknast, når ekvivalente brøkar skal lagast og ved operasjonar på brøk. Undersøkinga viser m.a. at fleire elevar overfører kunnskap om bruk av dei naturlege tala til brøk og brøkrekning, og at elevar strevar med å sjå og bruka ideen om ekvivalente brøkar i ein større samanheng. Dei avdekka misoppfatningane gjev samla eit vidare innsyn i grunnleggjande manglar knytt til brøkforståing hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen.

INNHALD

1. Innleiing

1.1. Bakgrunn og grunngjeving for val av tema

Eg har vore lærar i mange år – først i grunnskulen på dei fleste trinn, og seinare i den vidaregåande skulen. Faga eg har undervist i har vore matematikk, naturfag, musikk og kroppsøving. Gjennom desse åra har eg møtt mange flotte elevar. Nokre av dei har vore svært motivert for dei ulike skulefaga, for andre har motivasjon variert meir. Når det gjeld matematikkfaget, tykkjer eg det skil seg noko ut frå dei andre faga. Fleire elevar oppfattar matematikkfaget som særs krevjande, og viser lita evne til å halda ut når ein skal jobba med faget. Nokre av dei kan slita med manglande sjølvtillit og negative kjensler til faget. Stundom har eg tenkt at det er dårleg samsvar mellom dugleikar hjå elevar og dei krava som er definert i læreplanen. Nokre av desse observasjonane kan samsvara med m.a. det som har kome fram i fleire PISA-undersøkingar[1] (Kjærnsli & Olsen, 2013).

På den vidaregåande skulen der eg no arbeider, kjem det mange skuleflinke elevar frå heile landet. Dei aller fleste har gode karakterar i matematikk frå ungdomsskulen. Likevel opplever eg at fleire av dei er usikre når det gjeld brøk og brøkrekning. Nokre kan svara rett på oppgåver, men forstår ikkje kva dei gjer. Andre kan gje uttrykk for at brøk verkar ulogisk, forvirrande og er vanskeleg å forstå. Ved brøk i algebra, t.d. i ei likning eller at ein skal trekkja saman eit algebraisk uttrykk, stoppar det opp for mange elevar. Desse observasjonane stemmer overeins med det som har kome fram i fleire TIMSS-undersøkingar[2]. I 2003 skåra norske elevar dårlegast i emnet «Tal og Algebra» – godt under det skalerte gjennomsnittet (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turmo, 2004). Den same tendensen finn vi igjen, både i TIMSS 2007 og TIMSS 2011, sjølv om ein her kan spora fagleg framgang (Grønmo & Onstad, 2009; Grønmo, Onstad, Nilsen, Hole, Aslaksen & Borge, 2012). Men fortsatt er det svært få elevar på høgt nivå. Ein grunn til dette kan vera manglande dugleikar i formell talrekning og algebra (Grønmo et al., 2012).

---

[1] PISA (Program for International Student Assessment) er eit internasjonalt prosjekt i regi av OECD (Organisation for economic cooperation and development), der målet er å kartleggja 15-åringar sin kompetanse og dugleikar innan fagområda matematikk, naturfag, lesing og problemløysing. Denne undersøkinga vert gjennomført kvart tredje år (www.pisa.no).

[2] TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) er eit internasjonalt forskingsprosjekt der målet er å kartleggja elevar på 4. og 8. trinn i matematikk og naturfag. Denne læreplanbaserte undersøkinga vert gjennomført kvart fjerde år (www.timss.no).

For mange elevar er det eit stort steg å ta når talomgrepet skal utvidast frå naturlege tal til rasjonale tal (Birkeland, Breiteig & Venheim, 2011). Behr, Lesh, Post & Silver (1983) uttrykkjer fylgjande: «Rational-number concepts are among the most complex and important mathematical ideas children encounter during their presecondary school years» (Behr et al., 1983, s. 91). Mange undersøkingar har vist at brøk kan vera vanskeleg for elevar (Bjerke, Eriksen, Rodal & Ånestad, 2013; Brown, Küchemann & Hodgen, 2010; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Engström, 1997; Hart, Brown, Küchemann, Kerslake, Ruddock & McCartney, 1981; Heron, 2014; Indresæter, 1998; Kerslake, 1986; Lamon, 2005; McIntosh, 2007; Petit, Laird & Marsden, 2010; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Ånestad, Rodal & Eriksen, 2014). Nilsen (2008) har i si masteroppgåve undersøkt 10. klassingar si taloppfatning ved skulen der ho jobbar. Når det gjeld brøk, konkluderer ho med fylgjande: «Begrep om brøk, brøkoperasjoner og brøkregning er svært mangelfulle hos et stort flertall» (Nilsen, 2008, s.109). Elevane forstår m.a. ikkje likeverdige brøkar, greier ikkje avgjera kva brøk som er størst og dei viser misoppfatningar ved addisjon av brøkar med ulik nemnar (ibid.).

Mine eigne erfaringar, og det som har kome fram i undersøkingane nemnt ovanfor har gjort meg nysgjerrig. Ein del forsking er gjort på yngre elevar. Eg ynskjer difor å undersøkja meir systematisk brøkforståing hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen. Kva meistrar dei? Kva forstår dei? Kor ligg utfordringane? Då brøk og brøkrekning inngår i mange emne i matematikk, synest eg det er viktig å ha ein solid kunnskap om dette, slik at eg som lærar kan hjelpa elevane best mogleg så tidleg som mogleg. Dersom ein som lærar kjenner til korleis elevar forstår brøk og brøkrekning, samt dei vanlegaste misoppfatningane og feilstrategiar, vil ein kunna retta merksemda mot desse i undervisninga, og korrigera dei.

1.2 Mål for oppgåva

Målet for denne oppgåva er å få større innsikt i kva forståing elevar som startar i den vidaregåande skulen har om brøk og brøkrekning. Eg ynskjer å undersøkja korleis elevar tenkjer når dei løyser ulike oppgåver der brøk er involvert. Det vil eg m.a. gjera ved at elevane skal rekna gjennom ein kartleggingstest med oppgåver som dekkjer sentrale aspekt ved brøkomgrepet. Eg ynskjer å få eit heilskapleg inntrykk av brøkforståinga deira, og vil difor gå bredt ut i oppgåvesettet. Det vil kunna gje meg informasjon om kva elevane meistrar, og ein peikepinn på om nokre av dei har misoppfatningar knytt til brøk og brøkrekning. Ulike misoppfatningar i ulike brøkaspekt kan stundom sporast tilbake til samanliknbare tankerekkjer, og kan slik vera i slekt med kvarandre. For å få ei djupare forståing av korleis elevar tenkjer kring brøkomgrepet, vil eg intervjua nokre av dei om utvalde oppgåver frå testen. Gjennom samtalar med elevar vil eg kunna stilla oppfølgingsspørsmål, og på den måten få ei betre innsikt i og auka kunnskap om korleis dei tenkjer.

Å testa utfyllande alle sider ved ulike brøkaspekt vil ikkje vera mogleg av omsyn til omfanget på undersøkinga. Målet er likevel at eg med mitt oppgåvesett og intervju med elevar i etterkant skal ha eit grunnlag for refleksjonar kring generell forståing av brøkomgrepet hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen.

Brøkforståinga hjå elevane vert studert ut frå eit konstruktivistisk syn på læring, og det teoretiske grunnlaget er m.a. prosedyreforståing/ omgrepsforståing. Misoppfatningar vert brukt som eit verktøy for å skildra ei manglande omgrepsforståing. Den matematiske konteksten vert brukt for å strukturera testen og analysen, for slik å synleggjera ulike aspekt ved brøkomgrepet (t.d. brøk og illustrasjonar, ekvivalens, tettleik osb.).

1.3 Forskingsspørsmål

I arbeidet med denne oppgåva har fylgjande problemstillingar lagt til grunn:

- Kva forståing av og dugleikar i brøk og brøkrekning kan ein finna hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen?
- Kva misoppfatningar rundt omgrepet brøk og brøkrekning kan ein finna hjå elevane?

I arbeidet med å svara på forskingsspørsmåla er det naudsynt å diskutera funna mine opp mot relevant forskingslitteratur retta mot m.a. misoppfatningar. Slik kan eg søka ei djupare forståing av kvifor elevane tenkjer som dei gjer.

1.4 Avklaring av omgrep

1.4.1. Forståing

I matematikkdidaktikk har ein vore oppteken av å skilja mellom *å vita korleis* vs. *å vita kvifor*, og ulike namn har vorte nytta for å skildra denne dualiteten (Hallett, Nunes & Bryant, 2010). Hiebert & Lefevre (1986, s. 3-4) nyttar orda *procedural knowledge* - prosedyrekunnskap og *conceptual knowledge* - omgrepskunnskap. Prosedyrekunnskap kan vera kunnskap om symbolske representasjonar og formelt språk. Men det kan òg vera kunnskap om reglar og algoritmar for korleis oppgåver kan løysast, for på den måten verta i stand til å utføra definerte handlingar (ibid.). I denne oppgåva vil fokus i analysen liggja på det siste. Omgrepskunnskap er «… knowledge that is rich in relationships» (ibid.), i motsetnad til prosedyrekunnskap. I dette nettverket av kunnskap vert einskilddelar bunde saman med andre informasjonsbitar.

Matematikkdidaktikaren Rikard Skemp nyttar orda *instrumentell* og *relasjonell matematisk forståing* (Skemp, 1976). Ved instrumentell forståing nyttar ein «…rules without reasons» (ibid., s.89). Ein elev veit kva han skal gjera, men ikkje kvifor. Har ein elev relasjonell forståing veit han både kva han skal gjera og kvifor, og han kan difor forklara samanhengen mellom premissane i eit problem og den endelege løysinga på det (ibid.).

Den norske matematikkdidaktikaren Stieg Mellin-Olsen[3] nytta omgrepa *regeloppfatning* og *strukturoppfatning* (Mellin-Olsen, 1984). Ved ei regeloppfatning av eit omgrep har vi kunnskap om reglar og prinsipp, og korleis dei vert brukt i praksis. Denne kunnskapen vert sett på som statisk og isolert kunnskap. Har ein strukturoppfatning, forstår ein strukturen til eit omgrep, den matematiske samanhengen det er satt inn i og kvifor ein regel har vorte som han er (ibid.).

I denne oppgåva skil eg ikkje mellom prosedyrekunnskap, instrumentell forståing og regeloppfatning. Dette er ulike måtar å skildra kva *dugleikar* ein har; at ein veit korleis ein operasjon skal utførast og korleis eit resultat har vorte til. Eg skil heller ikkje mellom omgrepa omgrepskunnskap, relasjonell forståing og strukturoppfatning, som er ulike måtar å skildra kva *forståing* du har; t.d. å sjå samanhengar mellom kunnskap og å vita kvifor ei prosedyre fungerer. Når ordet forståing vert nytta vidare i oppgåva, meiner eg forståing knytt til strukturar i matematikk.

Forståing og dugleikar vart ovanfor definert m.o.t. kvalitet; rik eller fattig på relasjonar. Dette meiner Star (2005) er uheldig, då dei bør handsamast som uavhengige dimensjonar. Begge kan vera overflatisk (få samanhengar) eller djup (rik på relasjonar). Han er særleg oppteken av den djupe prosedyreforståinga med fleksibel bruk av prosedyrar og effektive strategival.

Baroody, Feil & Johnson (2007) byggjer vidare på Star (2005) sine idear, og dei meiner at ei djup prosedyreforståing ikkje kan eksistera utan ei djup omgrepsforståing og omvendt, medan den overflatiske prosedyre- og omgrepsforståinga kan eksistera uavhengig av kvarandre. I

[3] Stieg Mellin-Olsen arbeidde ei tid saman med Richard R. Skemp.

oppgåva mi vil eg ikkje gå vidare inn på desse teoriane. Det er ikkje alltid like lett å avgjera kor vidt ein elev har prosedyreforståing eller omgrepsforståing. All kunnskap let seg heller ikkje kategoriserast på denne måten. Sjølv om dei er to ulike omgrep heng dei saman. Ein auka kompleksitet med fleire variablar involvert vil kunna gjera arbeidet med å kartleggja brøkforståinga hjå elevane vanskelegare. Skal ein kunna undersøkja nærare kor vidt elevar har både djup prosedyreforståing og djup strukturforståing, må ein analysera datamaterialet på elevnivå for å få danna elevprofilar. Dette er etter mi meining, formålstenleg om målet er å kartleggja einskildelevar for so å laga eit undervisningsopplegg for dei. Mitt hovudmål er å få eit heilskapleg bilete av brøkforståinga hjå elevane – hjå heile klassen eller deler av han. Gjennom mi erfaring som lærar kjenner eg meg igjen i teoriar knytt opp mot prosedyreforståing og strukturforståing hjå elevar, og ynskjer difor å studera brøkforståinga ut frå dette. Elevar kan t.d. koma med utsegn om at brøk er ulogisk og brøkoperasjonar består av meiningslause reglar. Ei meir systematisk undersøking av kva forståing og dugleikar ein kan finna hjå elevar står då fram som metodologisk mest relevant for meg.

Å skilja mellom prosedyrekunnskap og omgrepskunnskap kan vera nyttig, då det kan vera til hjelp for å forstå korleis ein elev lærer (Hiebert & Lefevre, 1986). Byrnes & Wasik (1991) viser til ulike hovudargument som òg talar for eit slikt skilje: Prosedyrekunnskap og omgrepskunnskap er sopass ulike at dei ikkje kan sjåast på som ein og same kunnskap. Dei har ulike funksjonar; omgrepskunnskap ordnar og organiserer erfaringar, medan prosedyrekunnskap er ei oppskrift på korleis ein skal nå eit mål. Dessutan har det vist seg at nokre elevar kan ha omgrepskunnskap, men mangla prosedyrekunnskap og omvendt (Byrnes & Wasik, 1991, s.777). Eg viser elles til Sfard (1991) sin teori om relasjon mellom omgreps- og prosedyreforståing skildra i punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning.

I denne oppgåva vert ein elev sine dugleikar undersøkt gjennom:

- oppgåver som kan løysast ved hjelp av ein algoritme eller innlært prosedyre

Ein elev si forståing vert undersøkt gjennom:

- oppgåver som manglar moglegheit for å nytta prosedyrar eller der slike prosedyrar ikkje er naudsynt for å løysa oppgåvene
- kor vidt eleven greier å forklara kvifor ei prosedyre fungerer

- oppgåver knytt til ulike kontekstar, stundom gjennom ulike tekstoppgåver, for å sjå om dei forstår omgrepa i ulike samanhengar og greier å bruka dei i ein meir kompleks samanheng

Ei fyldigare skildring av korleis testen har vorte utforma finn ein i punkt 3.3.1.

1.4.2. Misoppfatning

Når ein elev skal læra, hender det at misoppfatningar oppstår. Får dei festa seg, kan det hindra vidare læring. Ei misoppfatning er ufullstendige tankar knytt til eit omgrep, og er ein naturleg del av læreprosessen (Brekke, 2002, s.10). I møte med ny informasjon vil ein tolka og organisera dette ut frå det ein veit frå før. Har ein t.d. avgrensa erfaringar med eit omgrep kan dette føra til feilgeneraliseringar og misoppfatningar. Ei slik tenking høyrer heime i eit konstruktivistisk syn på læring (sjå punkt 2.2.2.1.), og kan forklara kvifor to elevar med same undervisning kan ha ulike oppfatningar av eit omgrep.

Misoppfatningar er altså eit omgrep i eit tidleg stadium (Swan, 2001). Desse alternative oppfatningane er satt i eit logisk system. Gunnar Gjone[4] kategoriserer misoppfatningane i ulike delar :

- Overgeneralisering. Ein elev vil lett kunna gjera nokre generaliseringar av tidlegare kunnskap som ikkje er rett. Det er slett ikkje alltid at idear og omgrep som gjeld i ein situasjon kan overførast til ein ny situasjon.
- Overspesialisering. Ved overspesialisering kan ein elev m.a. leggja restriksjonar til eit omgrep som ikkje er karakteristiske for heile området.
- Avgrensa omgrep. Dersom ein elev berre har erfaringar innanfor eit avgrensa felt av eit omgrep, vil han kunna ha ein for snever tankemodell for kva som ligg i omgrepet.
- Feiloversetjing. Dette er feil som kan koma når ein elev skal omsetja mellom t.d. ord, symbol eller formlar. Slike omsetjingar er vanskelege.

Det er viktig å vera merksam på at kategoriane nemnt ovanfor ikkje ekskluderer kvarandre. Misoppfatninga «multiplikasjon gjer større og divisjon gjer mindre» er både døme på overgeneralisering, overspesialisering og avgrensa omgrep (ibid.).

---

[4] Gunnar Gjone: Misoppfatninger, diagnostiske oppgaver og diagnostisk undervisning. Førelesing ved UIB, Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet. Bergen 07.03.14

Eit feilsvar kan oppstå av ulike grunnar. Swan (2001) seier fylgjande:

> Some may be simply due to lapses in concentration, hasty reasoning, memory overload or a failure to notice salient features of a situation. Others, however, may be symptoms of deeper misunderstandings or may not be mistakes at all – they may be the result of alternative interpretations of a situation (Swan, 2001, s.147).

Det ligg altså ei bestemt tenking bak ei misoppfatning. Denne tenkinga vert brukt nokså konsekvent; misoppfatningar er ikkje tilfeldige (Brekke, 2002).

I denne oppgåva vert ein elev sine eventuelle misoppfatningar undersøkt gjennom:

- oppgåver som er laga slik at misoppfatningar eller uferdige omgrep vert avdekka, også kalla diagnostiske oppgåver

For meir informasjon her, sjå punkt 2.4.1. – Diagnostisk undervisning og punkt 3.1.1. – Testen.

1.5. Oppbygging av oppgåva

I dette innleiingskapitlet har eg m.a. skrive litt om kvifor eg har vald å fordjupa meg i elevane si forståing av brøk og brøkrekning. Brøk inngår i mange emne i matematikk, og ved å ha kjennskap til korleis elevar kan forstå brøk, kva dei meistrar, kor utfordringane kan liggja og kva misoppfatningar dei kan ha, vil ein lettare kunna leggja til rette for ei undervisning der ein betre kan hjelpa elevar i prosessen med å konstruera ei solid brøkforståing. Vidare har forskingsspørsmåla som ligg til grunn for arbeidet med denne oppgåva vorte presentert, samt avklaring av omgrepa forståing og misoppfatning.

Kapittel 2 utgjer teoridelen i denne oppgåva. Første del handlar om brøk. For å få eit godt utvikla brøkomgrep, er det viktig å ha ei solid forståing for ulike aspekt ved brøk. Det vert so gjeve ei oversikt over brøken si historie. Brøk har vore ein del av matematikken i fleire tusen år, og er i dag eit gjennomgåande tema i heile grunnskulen. Vidare i oppgåva skriv eg om læring. Her vert det gjeve ein presentasjon av teori som er relevant for denne oppgåva, m.a. konstruktivistiske læringsteoriar og teoriar om korleis omgrep vert danna. Deretter omtalar eg nokre kjende vanskar og misoppfatningar elevar kan ha i møte med brøk. Det har vist seg at mange elevar har problem med å meistra brøkomgrepet (Hart et al., 1981; Brown et al., 2010). Til sist ser eg på eit par undervisningsmetodar som kan vera nyttig i arbeidet med å danna solide omgrep hjå elevar, med hovudvekt på diagnostisk undervisning.

Kapittel 3 omtalar kva forskingsmetode eg nyttar for å få informasjon om og svar på forskingsspørsmåla mine. Datainnsamlinga skjer ved hjelp av både kvantitativ og kvalitativ metode. Ved å nytta ulike metodar, vil ein kunna studera eit fenomen frå fleire sider, noko som kan gje ei fyldigare skildring av det eg forskar på. Vidare skriv eg litt om utvalet i studien, korleis testen og intervjua vert gjennomført og korleis eg vil analysera informasjonen som kjem fram. Til sist skriv eg litt om reliabilitet og validitet i undersøkinga mi, samt etiske refleksjonar knytt til forsking i klasserommet.

Kapittel 4 omtalar resultat og analyse av undersøkinga. Først vert nokre statistiske mål frå kartleggingstesten presentert, deretter vert resultat på einskildoppgåver kommentert og analysert og prøvd knytt opp mot anna forsking. Resultata og analysen er strukturert ut frå matematisk kontekst. Eg har vald ei open tilnærming til datamaterialet for å få eit heilskapleg bilete av brøkforståinga hjå elevane.

I kapittel 5 diskuterer eg først nokre av utfordringane og feil som går igjen i datamaterialet mitt. Dette vert prøvd knytt opp mot teori og anna forsking. Deretter diskuterer eg om metoden, oppgåvene i testen, intervjua og det teoretiske grunnlaget var eigna til å få svar på forskingsspørsmåla mine. Til sist gjev eg ein kort konklusjon på arbeidet, kjem med nokre tankar for undervisning og forslag til vidare forsking.

2. Teori

Dette kapitlet inneheld teori som er relevant for oppgåva mi. Først skriv eg litt om brøk og omgrepsstrukturen for brøk. Ei forståing for ulike aspekt ved brøk er m.a. naudsynt for å få eit solid brøkomgrep (Bjerke et al., 2013). Eg prøver deretter å gje ei oversikt over brøken si historie, for so å synleggjera kva kompetansemåla i «Læreplan i matematikk fellesfag» seier elevane skal kunna om brøk og brøkrekning i den norske grunnskulen i dag.

Vidare i dette kapitlet gjer eg greie for konstruktivistiske læringsteoriar og teoriar om korleis omgrep vert danna. Deretter gjer eg greie for nokre vanskar og misoppfatningar ein kan finna hjå elevar når det gjeld brøk og brøkrekning. Til sist ser eg på nokre arbeidsmåtar som kan avdekka omgrepsproblem hjå elevar, og som kan vera med på å byggja opp solide omgrep hjå dei. Hovudvekta her ligg på diagnostisk undervisning.

2.1. Brøk

2.1.1. Kva er ein brøk?

I Kunnskapsforlaget sitt matematikkleksikon finn ein fylgjande definisjon av brøk: «En brøk er et uttrykk på formen $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$. Streken kalles brøkstrek; a kalles teller og b nevner» (Thompson, 2006). Teljaren seier noko om kor mange brøkdelar vi har, og nemnaren gjev namn til brøken (ibid.). Både $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{2}$ er brøkar, den første er ein ekte brøk, medan den andre er ein uekte brøk. $1\frac{1}{2}$ er eit blanda tal som representerer brøken $\frac{3}{2}$. Ut frå definisjonen ovanfor er talet $\frac{\sqrt{2}}{3}$ òg ein brøk. Eit slikt tal er ikkje like kjent i grunnskulen. Eg vil difor i denne oppgåva avgrensa brøk til å gjelda dei brøkar som går inn under rasjonale tal. Eit rasjonalt tal er eit tal som kan skrivast på forma $\frac{a}{b}$, der a og b er heile tal og $b \neq 0$. Ordet 'rasjonal' stammar frå det latinske namnet *ratio*, som betyr forhold (ibid.).

Ein brøk kan representera ein operasjon eller eit objekt (Sfard, 1991). Bergsten, Häggström & Lindberg (1997) skriv fylgjande: «Uttrycket 24/3 t ex, kan representera dels en operation, dvs tjugofyra dividerat med tre, dels et objekt, nämligen bråket eller det rationella talet tjugofyra tredjedelar» (Bergsten et al., 1997, s.23). Dersom ein brøk representerer ein operasjon, vert brøkstreken tolka som eit divisjonsteikn; tjuefire delt på tre. Representerer ein brøk eit objekt, snakkar vi om det rasjonale talet «tjuefire tredelar». Dette krev at ein må kunna vera fleksibel i tenkinga og kunna veksla mellom desse to måtane å sjå brøk på, noko som har vist seg vera krevjande for mange elevar (Birkeland et al., 2011).

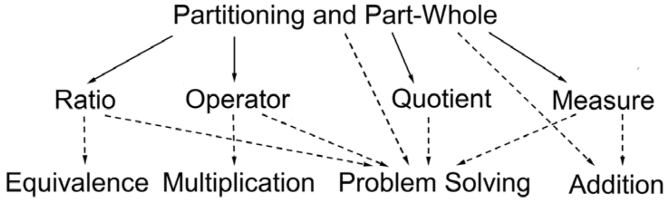
Det er fleire grunnar for å tileigna seg brøkomgrepet (ibid., s.186):

- Vi treng brøk for å kunna gje namn på ein storleik som er mindre enn eininga, og storleikar mellom dei heile tala.
- Vi treng i nokre høve brøk for å kunna gje eit eksakt svar ved divisjon. Ser ein på det enkle divisjonsstykket 1: 3, so kan ikkje det uttrykkjast nøyaktig som eit desimaltal utan at ein må ta i bruk den repeterande desimaldelen. Det eksakte svaret er $\frac{1}{3}$.
- Vi treng brøk for å kunna uttrykkja forhold mellom storleikar.

Brøk er ikkje eit isolert fenomen i matematikken. Det er knytt opp mot andre matematiske idear som t.d. prosent og sannsyn, og er naudsynt basiskunnskap når ein skal læra seg algebra, geometri og andre aspekt ved høgare matematikk.

2.1.2. Omgrepsstrukturen for brøk

I 1976 kom Thomas E. Kieren med ein teori om at brøk ikkje består av eit einskild omgrep, men inneheld ulike delomgrep (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Desse var: «brøk som målestorleik», «brøk som kvotient», «brøk som forhold» og «brøk som operator». Kieren identifiserte ikkje «brøk som del av eit heile» som den femte delkonstruksjonen, men meinte den gjennomsyra dei fire andre delkonstruksjonane (ibid.). Behr et al. (1983) vidareutvikla Kieren sine idear, og kom med ein teoretisk modell der desse fem aspekta ved brøk vart lenka opp mot operasjonar på brøk, ekvivalente brøkar og problemløysing (ibid.). Her er «brøk som del av eit heile» sjølve fundamentet for å utvikla dei andre aspekta i brøkforståinga. For å få ei full forståing av dei rasjonale tala, må ein ha forståing for kvart delomgrep for seg, og for ei integrering av desse.



Figur 1: Teoretisk modell der dei fem aspekta ved brøkomgrepet vert relatert til ulike operasjonar på brøk og problemløysing (Behr et al., 1983, Figur 4.1).

2.1.2.1. Brøk som del av eit heile

Dette aspektet ved brøk skildrar ein bestemt del av ein heilskap. Denne heilskapen kan vera kontinuerleg, som t.d. ein pizza som skal delast i fire like store delar. Kvar del vert då $\frac{1}{4}$. Delane må ha same storleik, men dei treng ikkje sjå like ut (McIntosh, 2007). Men heilskapen kan òg vera ei mengde av diskret objekt, som t.d. at det opp i ein boks ligg fem kvite og tre svarte kuler. Då er $\frac{3}{8}$ av kulene i boksen svarte (Behr et al., 1983). Brøken er her ei samanlikning mellom talet på delar ein har og det totale talet på delar som den heile er delt opp i, og sett frå dette perspektivet må teljaren i brøken vera mindre eller lik nemnaren (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

For å meistra brøk som del av eit heile må ein elev m.a. forstå at vi snakkar om ei inndeling i like storleikar, men delane treng ikkje ha same form, og han må forstå at alle delane til saman skal utgjera heila. Dess fleire delar heila vert delt inn i, dess mindre er kvar del (ibid.). Ein må òg kunna rekonstruera eit heile når ein del er gjeve (Boulet, 1998, referert i Pantziara & Philippou, 2012).

2.1.2.2. Brøk som forhold

Dette aspektet ved brøk gjev ei samanlikning mellom to mengder. Forholdet mellom ein del og eit heile kan uttrykkjast direkte som ein brøk, medan forholdet mellom to delar av eit heile kan ikkje uttrykkjast på denne måten (Brekke & Tinnes, 2001). Messing er ei legering som består av ein del sink og fire delar kopar. Dette forholdet skriv vi som 1:4, men den samla mengda er fem. I begge desse typane av forhold handlar det om storleikar av same slaget (ibid.). Snakkar ein om forhold som bind saman storleikar av ulike slag, som t.d. 7 kr. per kilo potet, kallar vi dette ei rate. Ei rate er eit tal med ei samansett eining; t.d. kr/kg eller m/s.

For å synleggjera ulike tilnærmingar til å løysa eit problem, kan ein sjå på fylgjande døme (henta frå Brekke & Tinnes, 2001, s.34-35): Ein ynskjer å finna ut kva 6 liter bær vil vega dersom 15 liter av dei same bæra veg 10 kg. Samanliknar ein forholdet mellom 15 liter og 10 kilo, nyttar ein seg av rate-tenking. Her skjer samanlikninga på tvers av måla. Samanliknar ein forholdet mellom 15 liter og 6 liter, snakkar ein om forhold. Her skjer samanlikninga innanfor målet liter. Eit forholdstal på tvers av måla vert kalla ein funksjonsoperator, medan eit forholdstal innanfor eit mål vert kalla skalarfaktor (ibid.). Forhold og ratar er ordna par, og dette er viktig å vera merksam på, særleg om ein ynskjer å samanlikna ulike forhold (Lamon, 2005).

For å meistra brøk som forhold, må ein elev m.a. forstå kva det vil seia at det er ein relasjon mellom to mengder, og at to storleikar i eit forhold kan endra seg i lag utan at forholdet mellom dei vert endra (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ein må òg sjå at når to storleikar i eit forhold vert multiplisert med same tal, vil forholdet fortsatt vera uendra. Dette er naudsynt kunnskap for m.a. å kunna forstå likeverdige brøkar.

2.1.2.3. Brøk som operator

Brøk som operator kan sjåast på som ein funksjon som verkar på ein storleik, eit objekt eller ei mengde (Behr, Harel, Lesh & Post, 1993, s.19). Ein operator kan altså endra ei mengde til ein brøkdel av den opphavlege mengda. Dette kan gjerast på ulikt vis; $\frac{2}{3}$ av 6 kan t.d. visast som multiplikasjon av ein divisjon av ei mengde (2 kopiar av 6:3) eller som divisjon av ein multiplikasjon av ei mengde (2 kopiar av 6 skal delast på 3). Når brøk vert brukt som operator, skjer både krymping og strekking (Lamon, 2005).

Dersom ein operasjon vert gjort på resultatet av ein annan operasjon, kallar vi det for samansetning. Desse to operasjonane kan ein slå saman til ein enkel operasjon. Kieren (1980) illustrerer brøk som operator på fylgjande måte: « $\frac{1}{8}$ – operator» kan vera ein matematisk modell for ei maskin som pakkar åtte tyggegummi i ei pakke. Dersom vi har 400 tyggegummi, vil dei pakkast i $400 \cdot \frac{1}{8} = 50$ pakker. Fortset vi med dømet og nyttar « $\frac{1}{10}$ – operator» som pakkar 10 pakker med tyggegummi i ein kartong, kan vi seia at « $\frac{1}{80}$ $(= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10})$ – operator» pakkar tyggegummi i kartongar.

Brøk som operator kan vera med på å auka forståinga for multiplikasjon av brøk. Mange elevar er kjend med ein modell for multiplikasjon som «gjenteken addisjon». Den kan gje meining når ein arbeider med dei naturlege tala, men er ikkje god nok for ei solid forståing av operasjonar på brøk (Lamon, 2005). Ved operasjonar som $3 \cdot \frac{1}{5}$ kan dette sjåast på som gjenteken addisjon; $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, men ved operasjonen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ gjev det ikkje meining å addera $\frac{4}{5}$ to tredels gongar. Multiplikasjonsteiknet må tolkast som «av». Vi skal altså ha $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$. Vi må sjå på kor mykje $\frac{4}{5}$ er av ein heil, for so å ta $\frac{2}{3}$ av dette. Å tolka multiplikasjonsteiknet som «av» kan føra til at operasjonar som i utgangspunktet kan vera vanskeleg å forstå, gjev meir meining (Bjørnestad, 2011). Men denne overgangen frå å tolka multiplikasjonsteiknet som «gjenteken addisjon» til «av» må presiserast for elevane.

For å forstå brøk som operator, må ein elev m.a. kunna tolka brøken på ulike måtar (Lamon, 2005). $\frac{3}{4}$ kan sjåast på som 3 · [$\frac{1}{4}$ av ei eining], eller som $\frac{1}{4}$ av [3 einingar]. Ein elev må vita at å dela ei eining på 4 og multiplisera resultatet med 3, er det same som å multiplisera eininga med $\frac{3}{4}$. For å visa god forståing må ein elev óg vera i stand til å namngje ein enkel brøk for å beskriva ein samansett operasjon der to multiplikative operasjonar vert nytta, den eine på resultatet av den andre.

2.1.2.4. Brøk som kvotient

Brøk kan sjåast på som eit resultat av ein divisjonssituasjon (Behr et al.,1983). Svaret på divisjonen a:b = $\frac{a}{b}$. Her er a dividend, b divisor og $\frac{a}{b}$ kvotient. Når vi deler 3 på 5, får vi brøken $\frac{3}{5}$. Dette er ein numerisk verdi.

For å meistra brøk som kvotient, må ein elev m.a. forstå at ein snakkar om lik/rettferdig deling, og han må vita at det ikkje fins avgrensingar på storleiken til brøken. Teljaren kan vera mindre, lik eller større enn nemnaren, og storleiken på svaret kan vera mindre, lik eller større enn storleiken vi starta med (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ein må òg kunna kjenna igjen brøk ved divisjon, og ein må ha ei forståing for dei to modellane for divisjon: delingsdivisjon og målingsdivisjon. Delingsdivisjon gjev svar på kor mykje kvar får av det vi hadde i utgangspunktet. Eit døme her kan vera tre pizzaer skal delast likt mellom fire personar. Kvar person får då $\frac{3}{4}$ pizza. Vi ser her at nemninga i svaret er lik nemninga vi hadde i utgangspunktet (Martinussen & Smestad, 2010). Målingsdivisjon gjev svar på kor mange det blir. Eit døme her kan vera seks liter saft skal fordelast på flasker som tek $\frac{2}{3}$ liter. Til saman får ein ni flasker med saft. Vi ser her at nemninga på dividend og divisor er lik, mens nemninga i svaret er ulik nemninga i utgangspunktet (ibid.). Birkeland et al. (2011) meiner at ved konkretisering av divisjon vil det kanskje vera mest naturleg å nytta delingsdivisjon når divisor er eit heilt tal, medan målingsdivisjon kan vera meir aktuelt når divisor er ein brøk.

2.1.2.5. Brøk som målestorleik

Dette aspektet ved brøk skildrar ein talstorleik, som t.d. $\frac{3}{5}$, eller noko ein vil måla, som t.d. $\frac{3}{5}$ liter. Brøk som målestorleik er relatert til ei eining. Denne eininga kan vera ein fysisk storleik, som t.d. eit avgrensa område. Ynskjer ein å måla arealet av eit område, må ein velja ei passande eining, dekka området med ho for so å telja opp talet på einingar. Om ikkje heile området vert dekka, må ein nytta delar av eininga for å dekka resten (Kieren, 1980).

Men eininga kan òg vera eit linjestykke, som t.d. tallinja (Birkeland et al., 2011). Ein brøk kan sjåast på som ein brøkdel av ei linje og som eit punkt på ei linje. Ei tallinje kan ofte innehalda meir enn eit heile, og skil seg frå andre brøkmodellar m.a. ved at einingane er kontinuerlege, dvs. at det ikkje er noko visuell skilnad mellom dei (Petit et al., 2010). Dette bør ein elev vera merksam på. Bruk av tallinja kan vera til hjelp for å utvikla ei solid forståing av tal generelt, og for brøk som talstorleik. Her kan ein m.a. få fram verdien til ein brøk, og vi kan sjå ulike brøkar si plassering i forhold til kvarandre (Dahl & Nohr, 2010). Dessutan kan den vera med på å hjelpa oss til å sjå at vi kan ha mange symbol for same talverdi.

For å meistra brøk som målestorleik, må ein elev m.a. kunna plassera tal på tallinja, både der sjølve linja utgjer den heile, og der tallinja inneheldt fleire heile. Ein elev må forstå tettleiken i dei rasjonale tala, dvs. at det er uendeleg mange tal mellom to gjevne brøkar, han må kunna samanlikna to brøkar (Lamon, 2005), og han må kunna dela eit heile i meir enn halveringar.

2.1.2.6. Ekvivalente brøkar

Dersom to brøkar er uttrykk for same storleik, er dei likeverdige (McIntosh, 2007). Talparet $\frac{2}{3}$ og $\frac{6}{9}$ er døme på to likeverdige brøkar – også kalla ekvivalente brøkar. Ekvivalens betyr ein klasse av tal, der alle tal er representantar for same talstorleik (Indresæter, 1998). Vi får altså mange ulike namn på same talstorleik når talomgrepet vert utvida frå naturlege tal til brøk. Dette må brukast tid på. Det er slett ikkje sikkert at ein elev forstår kva ein likeverdig brøk er eller poenget med å finna likeverdige brøkar, sjølv om han reint mekanisk greier å rekna dette ut (McIntosh, 2007). Det er difor viktig at dette vert presisert for elevane. Å forstå likeverdige brøkar er ein føresetnad for å kunna rekna med brøk, og er ein sentral del av talforståinga (ibid., s. 29). Ein elev må m.a. forstå at forholdet mellom teljar og nemnar er uendra, sjølv om tala i teljar og nemnar aukar eller minkar.

2.1.3. Brøken si historie

Vi finn former for brøkrekning heilt tilbake til det gamle Egypt og Mesopotamia. Framstillinga skissert under byggjer i hovudsak på Holme (2008), Holme (2004) og Johansson (2004).

Babylonarane hadde ein høgt utvikla matematikk, og vår kunnskap om den babylonske matematikken skuldast i stor grad den tyske forskaren Otto Neugebauer, som tyda mange leirtavler som var funne i ruinane i Babylon. Det er frå den gamalbabylonske epoken (ca. 3000-1600 f.Kr.) at vi har dei fleste matematiske leirtavlene. Babylonarane hadde eit posisjonssystem med 60 som grunntal, men med eit element av titalsystem. Tala vart skrive med kileskrift på leirtavler. Dei hadde berre to symbol; ein kile for 1 og eit «hjørne» for 10, og tala vart skrive additivt med desse teikna. Frå 60 av starta dei på nytt. Ein ny posisjon vart innført som gav talet på 60-arar osb. Dei brukte same system for tal mindre enn 1, og hadde ikkje teikn for komma. Eit problem med eit slikt system var at eit tal kunne tolkast på fleire måtar. Ein kile kunne vera symbol for 1, 60, 60^2 eller 60^3, men det kunne òg bety $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$ osb. Kva tal det var, måtte tolkast ut frå samanhengen, av den forklarande teksten som fylgde med. Babylonarane brukte òg mange tabellar til løysing av rekneoppgåver og andre matematiske problem, som t.d. multiplikasjon, kvadrattal, kubikktal og resiproktabellar (brøkar med 1 i teljar).

Det babylonske talsystemet har store fordelar ved utarbeiding av resiproktabellar. $\frac{1}{2}$ = (30), $\frac{1}{3}$ = (20), $\frac{1}{4}$ = (15), $\frac{1}{5}$ = (12), $\frac{1}{6}$ = (10), $\frac{1}{8}$ = (7)(30), $\frac{1}{9}$ = (6)(40). $\frac{1}{9}$ er altså lik $\frac{6}{60} + \frac{40}{60^2}$. Vi ser her at t.d. mål og vekt kunne uttrykkjast med stor presisjon i 60-talsystemet. $\frac{1}{7}$ er den første stambrøken[5] som ikkje let seg framstilla som ein endeleg desimalbrøk i 60-talsystemet (jfr. vårt 10-talsystem; her er det $\frac{1}{3}$).

Kunnskap om egyptisk rekning og matematikk har vi m.a. fått frå Rhind-papyrusen. Den har av mange forskarar vorte datert til 1650 f.Kr. Dette er ein kopi av ein tidlegare tekst som skrivaren Ahmes har kopiert, og han fortel at papyrusen stammar frå «Midtriket» - i perioden frå 2000-1800 f. Kr. Rhind-papyrusen er truleg ei matematisk lærebok, forma som ei oppgåvesamling med løysingar – brukt av skriftlærde. Teksten inneheld 85 matematiske problem knytt opp mot praktiske situasjonar. Han inneheld forklaringar til og døme på brøkrekning, multiplikasjon og divisjon, areal- og volumutrekningar og problem som i dag ville vorte løyst med lineære likningar.

Egyptarane sitt talsystem var eit additivt titalsystem (inga posisjonsystem). Dei hadde symbol

[5]Ein stambrøk er ein brøk på forma $\frac{1}{n}$.

for 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 og 1000000. Når dei skulle skriva eit tal, skreiv dei symbola og kor mange det var av kvart symbol ved sidan av kvarandre. Ved hjelp av desse teikna kunne egyptarane addera, subtrahera, multiplisera og dividera heiltal. Dei hadde ingen teikn for desse operasjonane, ein skildra det med ord kva som skulle gjerast. Brøken $\frac{1}{n}$ vart skrive med eit elliptisk teikn over symbolet for talet n.

Rhind-papyrusen startar med ein tabell over brøkar på forma $\frac{2}{n}$ for odde n mellom 5 og 101, uttrykt som sum av stambrøkar. At det ikkje er jamne tal i denne tabellen, skuldast nok at vi då kan forkorta brøken med to. Dette må egyptarane ha visst. Egyptarane skreiv alle brøkar som stambrøkar bortsett frå brøken $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{5}$ vart skrive som $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Dei skreiv aldri ein brøk som ein sum av to like stambrøkar. Grunnen til det veit vi ikkje.

Ein brøk på forma $\frac{2}{n}$ kan oppløysast på mange vis. Kva reglar egyptarane har nytta i tilnærminga når dei skulle velja kva oppløysing dei ville bruka, er usikkert. Men Frandsen (1996) nemner m.a. at fylgjande reglar kan ha vore nytta:

- små nemnarar er å føretrekkja
- inga oppløysing har meir enn fire stambrøkar
- dess færre stambrøkar oppløysinga har, dess betre
- jamne nemnarar er å føretrekkja framføre odde nemnarar, sjølv om ein då kan få større nemnarar

Matematikken i det gamle Hellas var under påverknad frå matematikken både i Egypt og Babylon. Greske filosofar og matematikarar tok gjerne reiser dit. Dei vart på den måten kjend med stambrøkar og brøkar i 60-talsystemet. Dei kjende òg til vanlege brøkar. Pytagorearane såg på tal som noko som er samansett av einingar, men sjølve eininga «1» vart ikkje sett på som tal. Aristoteles skilde mellom tal og storleikar. Eit tal vart generert ut frå ei udeleleg eininga, medan ein storleik kunne delast opp i mindre delar. Euklid delte same synet. Forhold mellom to heiltal vart difor sett på som ein måleprosess, og ikkje som eit tal. Ein snakka ikkje om $\frac{A}{2}$, men om $\frac{1}{2} \cdot A$ (Thompson,1991, referert i Engström, 1997).

Ni bøker om matematikkens kunst er ei av kjeldene for kjennskap til matematikken i Kina, og her finn ein ei oppsummering av matematikken som var kjend fram til ca. år 100 f.Kr. Den inneheld 246 problem frå dagleglivet med generelle løysingsmetodar. Brøkrekning var velutvikla hjå kinesarane, og dei sette m.a. brøkar på samnemnar. Desimalbrøk med grunntal 10 vart òg nytta.

På 800-talet e.Kr. skreiv den arabiske matematikaren al-Khwarizmis ned store delar av matematikken som til då var kjent. Eit kapittel i boka *Dixit algorizmi* handlar om brøk. Brøkane vart kalla for brotne tal (Engström, 1997). Al-Khwarizmis skildrar m.a. korleis «ein» kan delast i mindre delar og han viser ein metode for multiplikasjon av stambrøkar og vanlege brøkar (ibid.). Det desimale posisjonssystemet vart òg handsama i denne boka.

Brøk har altså vore ein del av matematikken i fleire tusen år, men symbolbruken har endra og utvikla seg med tida. Det var på 1600-talet, då den moderne algebraen oppstod, at dei meir abstrakte symbola vart teke i bruk i staden for ord og setningar. No hadde òg skiljet mellom tal og storleikar gradvis vorte brote ned i Europa. Simon Stevin (1548-1620) var den som fyrst formulerte at eit tal representerer ein kvantitet og ikkje berre ei samling av einingar (Gjone, 1998). I starten av *l'Arithmétique* skriv han at eininga er eit tal (talet 1), og denne eininga kan delast inn i mindre delar om ein ynskjer det.

Det var òg Stevin som introduserte desimaltala i Europa. I læreboka *De Thiende* innfører han desimaltala og ein notasjon for å rekna med dei. Ein eigen skrivemåte for desimaltala er omtalt i første del av boka, og han poengterer her at desimaltal berre er enkle siffer til venstre for eit *teikn* (talsiffer i ein sirkel). Siste del av boka omtalar rekneoperasjonar på desimaltal. Her viser han at ein kan rekna på same måte med dei heile tala som med desimaltal. Ein må berre ta omsyn til *teikna* (ibid.). Han anbefalte at desimaltalsystemet burde innførast for lengder og vekt, men dette vart ikkje gjort før vel 200 år seinare, då det metriske systemet vart innført i Frankrike (Engström, 1997).

Desimaltal kan sjåast på som spesialtilfelle av brøk, der nemnaren er potensar av 10. Difor kan ein kalla desimaltala for desimalbrøkar. Er talet på desimalar endeleg, har vi ein endeleg desimalbrøk. Er desimaltala periodiske, har vi ein periodisk uendeleg desimalbrøk. I dag vert desimaltalsystemet nytta i dei fleste land for å uttrykkja storleikar, som t.d. mynt-, mål- og vekteiningar. Det gjer oss i stand til å skriva so små tal ein vil, og det gjev reknetekniske fordelar samanlikna med brøk (Birkeland et al., 2011). Men vi treng brøk m.a. for å kunna gje eit eksakt svar ved divisjon, for å uttrykkja forhold mellom storleikar og det har nær samanheng med algebraiske uttrykk (McIntosh, 2007). Brøk er basis for fleire emneområde i ulike fag i skulen. I matematikk er brøk m.a. basis for forståing av sannsynsrekning, trigonometri og algebra. Ein må forstå brøk for å forstå forhold i geometrien, og det er ein fordel å forstå brøk når ein skal læra om prosent. Ein må forstå utviding av brøkar for å kunna forstå og handtera algebraiske omskrivingar. I fysikk er brøk basis for m.a. forståing av tettleik, trykk og legeringar, og i kjemi for forståing av konsentrasjon.

Utviklinga av tallinja skjedde parallelt med talutviklinga i Europa frå 1600-talet. I 1637 innførte René Descartes koordinatsystemet i *La Geometrie*. Her fikserer han to linjer, og skildrar geometriske figurar med likningar som avstandar til dei to faste linjene. I 1685 nytta John Wallis ei tallinje for å illustrera addisjon og subtraksjon med negative tal i boka *Algebra*. Tala vart då sett på som punkt på ei linje. Det var først på 1800-talet at tallinja vart akseptert av dei fleste matematikarar. I 1872 kom Richard Dedekind med ideen om dei reelle tala i *Stetigkeit und Irrationalzahlen*. Han definerte irrasjonale tal ved hjelp av det dedekindske snitt, og presiserte at dei reelle tala måtte ha same kontinuitet som den rette linja. Tala på tallinja vart no sett på som eit kontinuerleg heile.

2.1.4. Brøk i den norske skulen

Kompetansemåla i «Læreplan i matematikk fellesfag», gjeve i Kunnskapsløftet av 2006 (K 06), viser at brøk er eit gjennomgåande tema i grunnskulen (Utdanningsdirektoratet, u.å.).

- Etter 2. trinn skal elevane kunna dobla og halvera.
- Etter 4. trinn skal elevane kunna bruka enkle brøkar som ein halv, ein kvart og ein tredel i praktiske samanhengar.
- Etter 7. trinn skal elevane kunna rekna med brøkar; finna samnemnar og utføra addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av brøkar. Dei skal kunna sjå samanheng mellom brøk, prosent og desimaltal, og dei skal kunna plassera brøk på ei tallinje.
- Etter 10. trinn skal elevane kunna rekna med brøk, utføra divisjon av brøkar og forenkla brøkuttrykk, samt rekna med brøk i likningar og formlar der variablar kan inngå. Dei skal òg kunna rekna om mellom heile tal, desimaltal, brøk, prosent og promille, uttrykkja slike tal på varierte måtar og vurdera i kva for situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege.

2.2. Læring

2.2.1. Kva er læring?

I skulen har vi dei seinare åra retta merksemda vår meir mot læring i staden for undervisning. Ein snakkar no mykje om å leggja til rette for god læring, og ein snakkar om læreprosessane (Dysthe, 2001a). Læring er ein kompleks prosess som kan skje i eit samspel mellom menneske, mellom eit menneske og symbolsk materiale (t.d. tekst, bileter, film) eller mellom eit menneske og ulike ting, materiale eller naturen (Imsen, 2005). Det er vanskeleg å gje ein eintydig definisjon av læring då det finst mange ulike syn på kva læring er. Dette kan illustrerast ved å sjå på to nokså ulike definisjonar på læring:

> Læring er en relativt permanent atferdsforandring som oppstår på grunnlag av erfaring (Hilgard og Atkinson, 1967, sitert i Imsen 2005, s.168).
>
> Læring omfatter alle forandringer i menneskets personlighetsliv som ikke direkte eller indirekte kan føres tilbake til visse arvelig bestemte faktorer (Harbo og Myre, 1963, sitert i Imsen, 2005, s.168).

I begge definisjonane vert læring sett på som eit resultat av erfaringar. Men i den første definisjonen ser ein på læring som det å kunna gjera noko ein ikkje greidde før, og det ein har lært, kan observerast. Læring i følgje den andre definisjonen er ein indre prosess og kan ikkje observerast direkte. Det er ein vidtfemnande prosess der ein skal kunna tileigna seg både kunnskapar, dugleikar og haldningar (Imsen, 2005).

Dei ulike oppfatningane om kva læring er, har m.a. ulikt syn på kunnskap. Nokre ser på kunnskap som ferdig ytre kunnskap som skal overførast til ein elev, medan andre ser på kunnskap som noko eleven sjølv må konstruera når han lærer (ibid.).

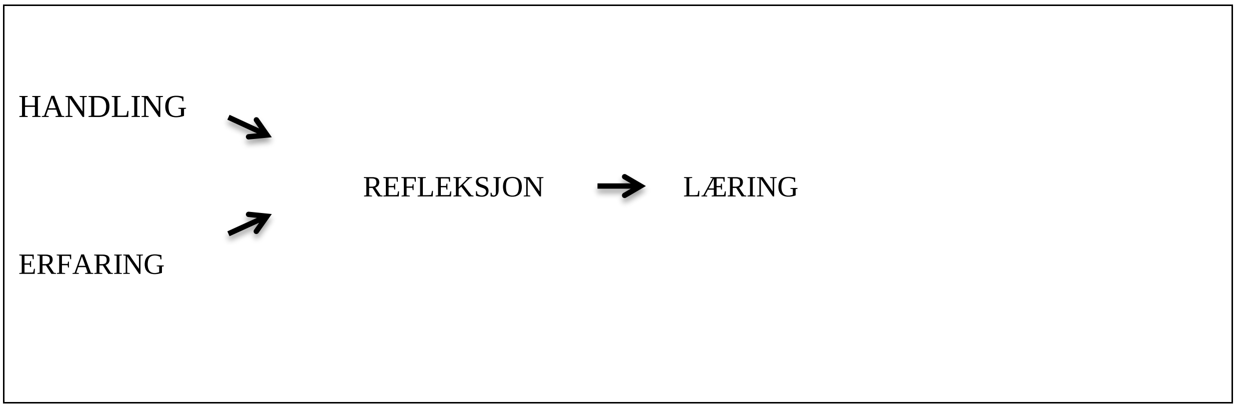
2.2.2. Læringsteoriar

Ulike læringsteoriar omtalar ulike delar av læreprosessen. I eit behavioristisk syn på læring skjer læring ved at ein byggjer opp sambindingar mellom stimulus (det som påverkar) og respons (det som vert resultatet) i medvitet (Birkeland et al., 2011). Læring vert styrt utanfrå, mål og innhald for læringa er klart definert og verkemiddel for å nå måla er ulike former for påskjøning og straff. Læraren er den som formidlar kunnskap til ein elev. Eleven lærer ved å ta imot og ta etter det han høyrer eller ser. Når ein elev greier å gjera noko (synleg) han ikkje greidde før, har læring skjedd (Imsen, 2005). Det er dette synet på læring som ligg til grunn for den «tradisjonelle undervisninga», der ein gradvis går gjennom nytt stoff, repeterer og har individuelle prøvar med tilbakemelding (Dysthe, 2001b). Mi erfaring som lærar både i grunnskulen og den vidaregåande skulen seier meg at det truleg er fleire av elevane som deltek i undersøkinga mi som er vane med denne type undervisning. Kritikken mot dette læringssynet har m.a. vore at det er for snevert; læring består av fleire samansette prosessar. Tankar og kjensler eit menneske har, og at språk har ein viktig funksjon i kommunikasjon, er aspekt som òg må takast omsyn til (Säljö, 2001). Når ein elev lærer, hender det at misoppfatningar vert danna. Å forstå og forklara kvifor dette skjer, vil òg vera vanskeleg ut frå eit behavioristisk syn på læring.

Dei kognitive læringsteoriane har fokus på indre tankeprosessar hjå den som lærer (Imsen, 2005). Informasjonen eit menneske møter skal oppfattast, tolkast og organiserast. Ulike modellar har vorte utvikla for å forklara korleis ytre stimuli kan endrast og lagrast i minnet. Arbeidet i denne oppgåva byggjer på eit konstruktivistisk læringssyn, som er den viktigaste læringsforståinga innan dei kognitive teoriane (Dysthe, 2001a). I konstruktivismen ser ein på kunnskap som noko som fins i medvitet hjå eit individ, og som det sjølv må byggja opp gjennom ein kontinuerleg konstruksjons- og rekonstruksjonsprosess (Imsen, 2005). *Den kognitive konstruktivismen* legg vekt på at konstruksjon av kunnskap skjer mellom menneske si individuelle utforsking i høve til den fysiske omverda, medan *den sosiale konstruktivismen* legg vekt på at denne konstruksjonen skjer gjennom samhandling mellom menneske (ibid.).

2.2.2.1. Den kognitive konstruktivismen

Læring er altså, i følgje konstruktivismen, ein prosess som skjer i medvitet hjå eit menneske. Kunnskap vert tolka og organisert ut frå eigne erfaringar. Ein lærar kan ikkje overføra kunnskap til ein elev, men må leggja til rette for aktivitetar som kan stimulera til læring. Læring skjer gjennom utforsking av og erfaring med den fysiske omverda, samt refleksjonar kring erfaringane og organisering av dei i etterkant.



Figur 2: Konstruktivisme (Brekke, 2002, Figur 1)

Drivkrafta i læringa er ein indre motivasjon for å prøva å forstå og forklara omverda (Imsen, 2005). Eleven er aktiv. Dysthe (2001b, s.38) skriv m.a. fylgjande:

> … læring er altså ein aktiv konstruksjonsprosess der elevane tar imot informasjon, tolkar den, knyter denne saman med det dei alt veit og reorganiserer dei mentale strukturane om det er nødvendig for å passe inn ny forståing. Evne til å tenkje og forme omgrep veks ut av situasjonar der den lærande sjølv prøver seg fram og er aktiv, heller enn ved å absorbere det andre seier.

Når ein møter noko nytt, vil ein altså prøva å forklara det ut frå erfaringar ein har. Dersom ein har avgrensa erfaringar med eit omgrep kan dette føra til at ein gjer nokre generaliseringar som ikkje er rett. Misoppfatningar vert danna. Dette er sentral teori i oppgåva mi og kan forklara kvifor t.d. to elevar kan oppfatta eit omgrep på ulike måtar.

Ein viktig målberar for det kognitivt-konstruktivistiske perspektivet på læring er den sveitsiske filosofen og psykologen Jean Piaget (Imsen, 2005). Han prøvde å skildra kva som skjer i læreprosessen, og var oppteken av dei mentale strukturane. Han meinte at ytre forhold erfart gjennom handling vert representert på det indre planet som eit aktivt handlingsmønster. Desse indre representasjonane kalla han for skjema. Skjema som har med tenking å gjera, kalla han for kognitive skjema. Dette er skjema som kan hentast fram og nyttast i nye situasjonar – uavhengig av tid og stad. Fleire skjema kan operera saman. Dei kan vera organisert i mønstre, og vert då kalla kognitive strukturar. Når eit skjema vert endra grunna nye erfaringar med omgjevnadene, skjer det ei kognitiv utvikling (ibid.).

Piaget hevdar vidare at samspelet vårt med omverda vert regulert av to prosessar samstundes; assimilasjon og akkomodasjon (Säljø, 2001). Når vi møter noko nytt, vil ein prøva å forklara det ved å ta i bruk det ein kan frå før. Den nye informasjonen vert tilpassa dei allereie eksisterande skjemaa ein har utan at ein treng å endra sjølve strukturen. Dette vert kalla assimilasjon. Ved assimilasjon vil nye fenomen oppføra seg som forventa, og ein elev vil prøva å tilpassa omgjevnadene til seg sjølv.

Dersom det nye vi møter ikkje kan forklarast ut frå det ein kan frå før, vil det ikkje passa inn i dei eksisterande skjemaa våre. Eigne oppfatningar må reviderast eller eksisterande skjema må endrast ved å utdjupa eller utvida strukturane. Dette vert kalla akkomodasjon, og utgjer sjølve læreprosessen. Drivkrafta i denne læreprosessen er trongen til indre likevekt. Når ny informasjon ikkje stemmer med det ein veit frå før, får vi ein mental konflikt. Denne ubalansen kan koma som eit resultat av biologisk mogning, eller som eit resultat av nye erfaringar (Imsen, 2005). Når ein elev har fått denne «kognitive konflikten», vil han prøva å finna ut korleis ting verkeleg heng saman. Den sjølvregulerte prosessen med å omstrukturera dei eksisterande skjemaa startar for å skapa balanse igjen (ibid.).

I undervisninga vert det då viktig at ein som lærar planlegg slik at balansen mellom assimilasjon og akkomodasjon vert passe stor når eit problem skal løysast. Assimilasjon kan stadfesta og gje ei kjensle av meistring, og akkomodasjon kan føra til utvikling. Slik kan elevane oppleva læring som ei utfordring, og som motivasjon for å løysa ei oppgåve. Vert den mentale konflikten for stor, kan det opplevast negativt og føra til manglande interesse for faget.

I følgje Piaget er det to typar kunnskap som kan utviklast hjå ein elev: *Figurativ* og *operativ kunnskap*. Den figurative kunnskapen er statisk, basert på hukommelse og vert lagra i minnet som isolerte fakta og detaljar. Solvang (1992, s.90) skriv fylgjande: «At en elev har utviklet figurativ kunnskap betyr at han har utviklet et skjema der bare kunnskapens ytre trekk er med». Døme på figurativ kunnskap kan vera pugging av formlar og reglar i matematikken utan forståing. Denne type kunnskap kan minna om prosedyrekunnskap/ instrumentell forståing/ regeloppfatning nemnt i punkt 1.4.1., og er ein del av det eg vil undersøkja i oppgåva mi.

Ein operativ kunnskap er kunnskap og forståing av prosessane som vert nytta når ein løyser ei oppgåve[6]. Han kan òg kallast logisk tenking. Når ein har utvikla skjema for ei tankeskapt handling, har ein operativ kunnskap. Denne tankeskapte handlinga må vera reversibel, ho må kunna setjast saman med andre handlingar, ho må vera ein del av ei heilskapsforståing og ho må kunna internaliserast, dvs. tenkjast utan å gjennomføra ho (Solvang, 1992). Reversibel tenking er å kunna «snu» ei handling i omvendt rekkefølgje. Addisjon og subtraksjon er motsette rekneoperasjonar. Dersom vi har $\frac{1}{3}$ og legg til $\frac{1}{3}$ får vi $\frac{2}{3}$. Men vi kan koma tilbake til utgangspunktet ved å ta bort $\frac{1}{3}$ frå $\frac{2}{3}$. Multiplikasjon og divisjon er òg motsette rekneoperasjonar. $3 \cdot 4 = 12$. Men då er $\frac{12}{4} = 3$. Døme på operativ kunnskap kan vera forståing av ein algoritme som vert brukt for å løysa ei matematikkoppgåve. Denne type kunnskap kan minna om omgrepskunnskap/ relasjonell forståing/ strukturoppfatning nemnt i punkt 1.4.1. Også dette er ein del av det eg vil undersøkja i mi oppgåve.

---

[6] Ein bør vera merksam på at hjå Piaget står omgrepet *operativ kunnskap* for strukturforståing, medan Sfard nyttar omgrepet *operasjonell forståing* i betydninga prosedyreforståing (sjå s.27).

Kritikken mot Piaget sin teori har m.a. vore at han fokuserer for einsidig på den mentale sida ved læring og tek ikkje omsyn til språket eller den sosiale samhandlinga mellom menneske. Språket vert sett på som viktig i den grad det støttar opp om læringa til den einskilde (Dysthe, 2001b), og det er først etter at ein har etablert ein viss kvalitet i tenkinga, at det vert uttrykt i ord. Denne kritikken førte m.a. til at ein fekk utvikla ein meir generell teori med fokus på det sosiale fellesskapet mellom menneske som fundament for læring (Imsen, 2005).

Mi tolking av elevsvara baserer seg i all hovudsak på den kognitive konstruktivismen. Men eg har sett at intervjua kan stimulera til læring gjennom samhandling. Eg vel difor å gje ein kort omtale av den sosiale konstruktivismen.

2.2.2.2. Den sosiale konstruktivismen

Dei sosialkonstruktivistiske teoriane flyttar fokuset bort frå læring som ein individuell prosess, til læring som ein sosial prosess der kunnskap vert konstruert i eit fellesskap (Dysthe, 2001b). Eit menneske utviklar seg i ei samhandling med eit sosialt fellesskap prega av kultur og språk. Kommunikasjon og språkbruk er eit sentralt bindeledd i desse mentale prosessane (Dysthe, 2001a). Drivkrafta i læringa er å vera eit sosialt vesen, og det å delta i eit fellesskap er kjenneteiknet på å kunna noko (Imsen, 2005; Dysthe, 2001b). Kunnskap vert altså sett på som noko som både er knytt til eit menneske sitt kognitive system og mennesket som ein del av kulturen (Imsen, 2005).

Ein viktig målberar for det sosial-konstruktivistiske perspektivet var Lev Vygotsky (1896-1934). For han var læring og tenking noko som skjer i eit sosialt samspel mellom eit individ og andre menneske, og ikkje berre i medvitet hjå eit individ. Den sosiale aktiviteten er utgangspunkt for intellektuell utvikling, og språket er eit viktig hjelpemiddel her. Mediering er eit omgrep Vygotsky nyttar om ein kognitiv reiskap mellom stimulering og handling. Dysthe (2001b s. 46) skriv m.a.: «Omgrepet mediering eller formidling blir brukt om alle typar støtte eller hjelp i læreprosessen, anten det er av personar eller reiskapar i vid forstand». Språket vert dermed ein viktig medierande hjelpar i læringa (Imsen, 2005; Dysthe, 2001b). Det ein tenkjer kan uttrykkjast gjennom språket, samstundes som språket kan endra korleis ein tenkjer. På den måten kan språk og tenking utvikla kvarandre (Swan, 2001). Her skil m.a. Vygotsky seg frå Piaget, som meinte at språket kjem først etter at eit omgrep har vorte danna. Dette kan vera relevant for mi oppgåve, særleg i intervjusituasjonane der elevar skal forklara korleis dei tenkjer når dei løyser ei oppgåve. Å setja ord på eigne tankar i ein dialog mellom lærar og elev, kan føra til at læring skjer.

For Vygotsky er læring ein overgang mellom to utviklingsnivå. Ein elev kan gjera ein ting saman med andre før han kan gjera det åleine (Imsen, 2005). Skilnaden mellom det eleven kan klara å gjera åleine og det han kan klara med hjelp frå andre, kalla han for den proksimale utviklingssona eller den næraste utviklingssona (ibid.). Her signaliserer Vygotsky m.a. at alle har eit utviklingspotensial. Undervisninga bør difor leggjast opp slik at ein elev får noko å strekkja seg etter, med fokus på kva eleven kan klara ved hjelp av andre. Det er i denne sona den kognitive utviklinga skjer. Ein som kan meir enn barnet vil kunna fungera som ein medierande hjelpar. Målet er at barnet til slutt skal kunna klara å løysa problema på eiga hand (ibid.). Også her skil Vygotsky seg frå Piaget, då Piaget meinte at vi ikkje skal krevja meir enn det ein elev er moden for.

2.2.3. Omgrepsdanning

Eit omgrep er ikkje ein einsleg persepsjon, men «a convenient capsule of thought that embraces thousands of distinct experiences and that is ready to take in thousands more» (Sapir, 1970, sitert i Swan 2001, s.152). Eit omgrep er organisk, og kan endrast og utviklast for å gje meining (Swan, 2001). Matematikk er bygd opp av ei mengde omgrep. Brekke (2002, s.5) seier m.a. fylgjande: «Et karakteristisk trekk ved matematiske begreper er at de ikke har vokst fram isolert, men eksisterer i et nettverk av enkelte idéer. Vi kaller slike nettverk av idéer for begrepsstrukturer». Ein omgrepsstruktur, også kalla eit mentalt skjema, utgjer stabile strukturar i minnet. Desse kan gjera matematikken meir meiningsfull enn isolerte omgrep og faktakunnskapar, dei kan lettare tilpassast nye situasjonar og dei er lettare å reparera om vi har hugsa noko feil (Birkeland et al., 2011).

Piaget meinte, som nemnt i punkt 2.2.2.1., at læring skjer i eit komplisert samspel mellom gamalt og nytt. Omgrep kan verta danna ved at dei vert assimilert i den eksisterande strukturen. Eit døme her kan vera når elevane skal læra multiplikasjon av naturlege tal. Dette vert ofte lært som gjenteken addisjon. $2 \cdot 3 = 3 + 3$. Ein elev har tidlegare erfaringar med addisjon, og difor kan multiplikasjonsomgrepet assimilerast i omgrepsstrukturen som allereie fins. Men eit omgrep kan òg verta danna ved at skjema vert akkomodert. Når ein elev får nye erfaringar som ikkje stemmer overeins med tidlegare tankar og røynsler, oppstår ein kognitiv konflikt som eleven då vil prøva å løysa for å skapa balanse igjen. Eit døme her kan vera når talomgrepet skal utvidast frå naturlege tal til rasjonale tal. Skjema ein har om kva eit tal er må då utvidast slik at dei stemmer med reglar og definisjonar som gjeld for dei rasjonale tala. Ser ein t.d. på operasjonen $\frac{1}{2} \cdot 3$, gjev det ikkje meining å addera tre ein halv gong. Her må skjema for multiplikasjon endrast, slik at ny kunnskap kan assimilerast (ibid.). I læring av omgrep skjer det heile tida ein assimilasjon og akkomodasjon, og eit omgrep vert utvikla so lenge ein gjer nye erfaringar med det.

Skemp (1971) skil mellom to ulike omgrep. Dei *primære omgrepa* får vi danna gjennom erfaringar med omverda (t.d. raud) og dei *sekundære omgrepa* er abstrahert frå andre omgrep (t.d. farge). Raud er eit døme på ein farge. Omgrepet «farge» er då av *høgare orden* enn omgrepet «raud». Det er eit abstrakt omgrep, meir fjernt frå erfaringane frå omverda. Dersom A er eit døme på B, og B er eit døme på C, kan vi seia at B er av høgare orden enn A, og C er av høgare orden enn både A og B (ibid.). Slik kan vi få ei kjede av omgrep som byggjer på kvarandre. Dersom ein elev berre har forståing for omgrep av lågare orden, kan dette føra til at ein gjer nokre generaliseringar som ikkje stemmer om ein skal operera på omgrep av høgare orden. Dette kan igjen føra til at misoppfatningar vert danna.

Når matematiske omgrep skal lærast, må ein i følgje Skemp (1971) merka seg to viktige prinsipp:

> 1. Concepts of a higher order than those which a person already has cannot be communicated to him by a definition, but only by arranging for him to encounter a suitable collection of examples (Skemp, 1971, s.32).

Eit tal er ein abstraksjon og eit omgrep av høgare orden. Skal ein elev forstå innhaldet i omgrepet må ein arbeida med mange ulike døme. Ein brøk kan i starten visast som ein del av eit heile; ein halv kan vera ein halv pizza, ein halv meter, ein halv liter, ei mengde brikker lagt i to like store haugar etc. Ein halv kan samanliknast med storleikar som både er større og mindre. Men seinare kan brøken òg visast som resultat av ein divisjon (1:2= $\frac{1}{2}$) eller som eit forholdstal (1:2). Med gode døme kan det vera lettare for ein elev å overføra denne kunnskapen til nye situasjonar, og på den måten danna eit overordna omgrep (Birkeland et al., 2011).

> 2. Since in mathematics these examples are almost invariably other concepts, it must first be ensured that these are already formed in the mind of the learner (Skemp, 1971, s.32).

Ein elev må altså vera kjent med omgrep av lågare orden før desse kan abstraherast til omgrep av høgare orden. Skal ein elev forstå brøk og operasjonar på brøk, må han forstå dei underliggjande omgrepa for at det heile skal gje meining. Brøk er igjen basis for fleire emneområder i ulike fag i skulen, og ei manglande forståing for brøkomgrepet vil få fylgjer for forståinga i dei emneområda.

Når ein elev skal læra eit omgrep av høgare orden, må dei altså ha ei forståing for dei underliggjande omgrepa. I ein læresituasjon må desse underliggjande omgrepa vera tilgjengelege i medvitet hjå ein elev (ibid.). Her kan ein lærar hjelpa til. Den amerikanske psykologen David Ausubel brukar omgrepet «advance organizers», ei «kognitiv bru», om eit hjelpemiddel som skal vera med på å danna eit bindeledd mellom kunnskapsstrukturane ein elev har og nytt lærestoff (Imsen, 2005). Når eit omgrep skal lærast, må dei kognitive strukturane hjå ein elev vera klar for å ta imot det nye. Ein lærar kan byggja ei kognitiv bru ved å friska opp att relevant fagstoff og visa samanhengen omgrepet høyrer heime i, før detaljert undervisning tek til (ibid.). Dette kan bidra til at ein elev lettare ser samanhengen mellom omgrepet og resten av matematikken. Slik vert det forma ein indre heilskapsstruktur som gjev grunnlag for meiningsfull læring (ibid.).

Eit omgrep høyrer altså til tankesystemet vårt og vert bygd opp gjennom erfaringar som kan klassifiserast saman. Omgrepet får eit namn eller eit symbol, og kan slik nyttast i kommunikasjon med andre. Men ein må her vera klar over at det er slett ikkje sikkert at ein elev har forstått innhaldet og meininga i eit omgrep, sjølv om han brukar symbola rett. Birkeland et al. (2011) påpeikar at det er ein viktig forskjell mellom eit omgrep og namnet eller symbolet på omgrepet:

> Uten erfaringer med hva et symbol står for, blir symbolet bare et merke på ei tavle, på et papir eller en skjerm. I matematikkundervisningen er det så alt for lett å operere med navn og symboler, der begrepene – ideene de står for – ikke har fått bygge seg opp hos eleven. Symbolene blir da uten mening. Skal elevene løse oppgaver med slike symboler, må de lage seg regler som går på symbolene, ikke på meningen (Birkeland et al., 2011, s.33).

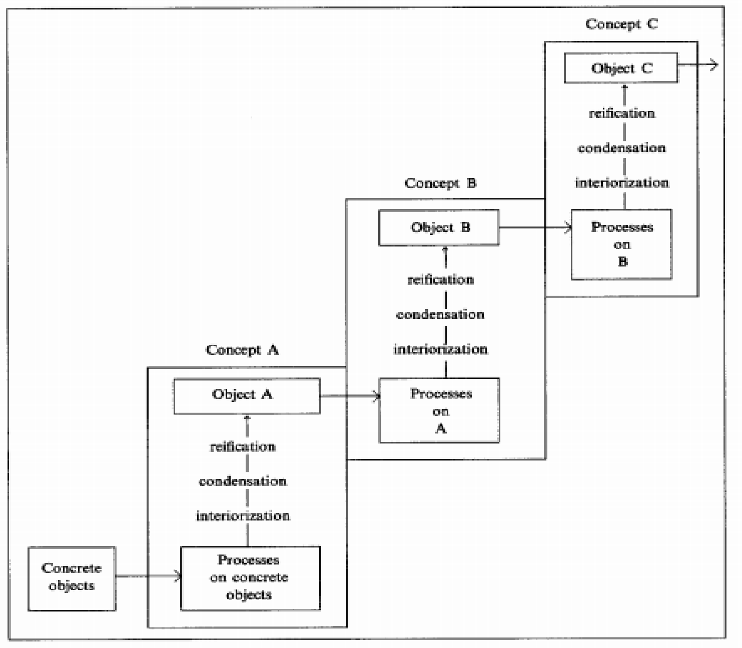
Slike sjølvlaga reglar kan igjen avdekka om eleven har feiloppfatningar eller uferdige omgrep, og på den måten gje informasjon om ei manglande strukturoppfatning. Å avdekka omgrepsproblem hjå ein elev vert omtala seinare, sjå punkt 2.4.1. – Diagnostisk undervisning.

Psykologen Jerome Bruner var m.a. oppteken av at språket er viktig i læringa for å kunna sjå samanhengar, og på 1960-talet utvikla han ein teori om at vi tek i bruk tre ulike representasjonsformer i den intellektuelle utviklinga vår (Imsen, 2005). Det *einaktive systemet* inneheld dugleikar og handlingar, og er det første eit barn tek i bruk. Det *ikoniske systemet* er eit visuelt minne, det inneheld førestellingar og er det neste eit barn tek i bruk. Det *symbolske systemet* inneheld m.a. ord og språk, og er det siste eit barn tek i bruk. Handlingar i samvirke med andre menneske og visuelle stimuli vert difor viktige når omgrep skal lærast (ibid.). I matematikkundervisninga kan bruk av konkretar føra til at ein elev dannar indre førestellingar, og desse kan igjen koplast opp til matematiske symbol. Symbola vil kunna setja ein elev i stand til å forstå dei formelle og abstrakte eigenskapane ved omgrepet (ibid.).

Den israelske matematikkdidaktikaren Anna Sfard diskuterer i artikkelen «On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin», strukturell og operasjonell forståing av matematiske omgrep. Ho meiner ein må kunna sjå eit omgrep, som t.d. eit tal, både operasjonelt som prosess og strukturelt som objekt. Har ein ei operasjonell forståing av eit omgrep, meistrar ein prosessar og algoritmar. Ein brøk kan då t.d. verta sett på som resultatet av ein divisjon med heiltal. Har ein ei strukturell forståing, ser ein på omgrepet som eit abstrakt objekt, som ein reell ting eller ein statisk struktur. Ein brøk kan då t.d. sjåast på som eit tal på ei tallinje. Desse to ulike tilnærmingane til eit omgrep er komplementære, det er naudsynt å ha både operasjonell og strukturell forståing for å kunna skildra eit matematisk omgrep fullt ut (ibid.). Sfard snakkar om ein dualitet meir enn at dei gjensidig ekskluderer kvarandre, og går nok her lenger enn det Piaget gjer med figurativ og operativ kunnskap (sjå punkt 2.2.2.1. – Den kognitive konstruktivismen) og med Mellin-Olsen si regelforståing og strukturoppfatning/ Skemp si instrumentell og relasjonell forståing/ Hiebert & Lefevre si prosedyreforståing og omgrepsforståing (sjå punkt 1.4.1. – Forståing). Ho meiner at den operasjonelle forståinga kjem før den strukturelle forståinga, som er ei forståing på eit høgare nivå. Desse tankane er grunnleggjande hypotesar for læring, og fell intuitivt inn under mi erfaring som lærar gjennom mange år. Skal elevar ha ei fullgod brøkforståing, må dei ha både operasjonell og strukturell forståing. Dette kan difor vera eit viktig underlag i arbeidet mitt med å tolka resultata.

Sfard (1991, s.18) meiner vidare at utviklinga av eit omgrep frå prosess til abstrakt objekt er ein lang og vanskeleg prosess som går gjennom 3 nivå: *interiorization – condensation – reification*. Eg vil nytta dei «norske» orda internalisering, kondensasjon og reifikasjon vidare i oppgåva. På internaliseringsnivået vert ein elev fortruleg med prosessar utført på enklare matematiske objekt, som igjen kan gje opphav til nye omgrep. På kondensasjonsnivået får ein eit betre heilskapsinntrykk. Ein greier lengre sekvensar av operasjonar med fleire element utan å måtta gå i detalj, ein greier å veksla mellom ulike representasjonar av omgrepet, kombinera prosessar, samanlikna og generalisera. So lenge eit omgrep er forbunde med ein prosess, er ein på kondensasjonsnivået. Internalisering og kondensasjon representerer gradvise endringar i utviklinga. Når ein har nådd reifikasjonsnivået, ser ein på omgrepet i eit totalt nytt lys, som eit ferdig utvikla objekt lausrive frå prosessar. Ein forstår hovudeigenskapane til omgrepet og relasjonen mellom ulike representasjonar. Reifikasjon (tingleggjering) er det mest avanserte nivået i læreprosessen, og er vanskeleg å nå. Det er eit sprang i omgrepsutviklinga, og kan stundom opplevast som eit plutseleg lys som går opp for ein. Her går ein frå operasjonell til strukturell forståing.

Sfard påpeikar at desse tre nivå står i eit hierarktisk forhold til kvarandre, ein kan ikkje nå eit nivå før dei underliggjande nivåa er nådd. Dessutan meiner ho at reifikasjon av ein prosess kan skje samstundes med internalisering av ein prosess på eit høgare nivå (sjå figur 3).



Figur 3: Generell modell for omgrepsdanning (Sfard, 1991, s.22, Figur 4)

Reifikasjon er altså naudsynt for å gje meining til prosessar på eit høgare nivå, samstundes som prosessar på eit høgare nivå er naudsynt for at reifikasjon på eit lågare nivå skal skje. Dette kan sjåast på som ein vond sirkel i læresamanheng (Sfard, 1991); ein må både vera i stand til å utføra algoritmar for å forstå eit omgrep, samstundes som ein må forstå for å meistra oppgåvene teknisk. Innan ulike emne i matematikk har kondensasjonsnivået ein tendens til å vara lenge, og ein del elevar vil ha problem med å nå reifikasjonsnivået. Det er ein lang og hard veg før eit omgrep vert reifisert hjå ein elev, ein må ha ei god forståing i matematikk for å koma på dette nivået. Elevar kan oppleva at det vert gjeve for lita tid på skulen til kvart emne, og matematikk kan då lett opplevast meiningslaust. Sfard (1991, s.33) skriv fylgjande:

> The main problem with this delay in reification and with the resulting periods of doubts about meaning is that they may bring a permanent harm – a life-long apprehension of mathematics and conviction that it cannot be learned. Some people may be unable to recover from the

> shock caused already by the first encounter with the problematic situation. Those who are not prepared to actively struggle for meaning (for reification) would soon resign themselves to never understanding mathematics.

Den greske psykologen Stella Vosniadou har utvikla ein forklaringsmodell for korleis barn lærer nye omgrep, og misoppfatningar som kan oppstå i den samanheng (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Når talomgrepet skal utvidast til rasjonale tal, vil ein elev byggja på kunnskapen han har om dei naturlege tala. Dette skjer ved hjelp av assimilasjon og akkomodasjon. Prosessen med å reorganisera kunnskapsstrukturane er vanskeleg og tidkrevjande, fragmentert og motstridande i starten, og eigna til å danna syntetiske omgrep. Syntetiske omgrep «… represent an intermediate state of knowledge that creates a bridge between the student's initial perspective of number and the intended scientific perspective, which is not yet available to the student» (ibid., s.187). Mange misoppfatningar er syntetiske modellar der elevane prøver å assimilera ny informasjon i den eksisterande kunnskapen.

2.3. Elevar og brøkomgrepet. Vanskar og misoppfatningar.

Kor vidt det er prosedyrekunnskap eller omgrepskunnskap som kjem først i utviklinga av brøkomgrepet hjå ein elev, er det ulike meiningar om. Gray & Tall (2007) har gjort undersøkingar som støttar synet på at prosedyrekunnskap kjem før omgrepskunnskap. Brøkforståinga kan starta på eit prosedyrenivå. Når ein elev t.d. ser at ulike delingssituasjonar kan enda opp med same mengde, kan merksemda skifta frå ein delingsprosess til resultatet som eit objekt. Dette er i tråd med Sfard sitt syn på omgrepsdanning. Byrnes & Wasik (1991) har gjort undersøkingar som støttar synet på at omgrepskunnskap kjem før prosedyrekunnskap. Dei meiner m.a. at det å kunna kjenna igjen ekvivalente brøkar og ordna dei ligg til grunn for prosedyreforståing av t.d. addisjon av brøkar med ulik nemnar. Hallett et al. (2010) har gjort undersøkingar som m.a. viser at elevar kan ha både prosedyrekunnskap og omgrepskunnskap, men som to separate kunnskapar utan at det eine leier til det andre. Samstundes viste det seg at elevar som hadde begge delar, gjorde det betre enn dei som ikkje hadde det. Dette siste er i tråd med Sfard sitt syn om at eit omgrep ikkje er forstått før ein greier å sjå det både operasjonelt og strukturelt.

Når talomgrepet skal utvidast til å gjelda brøk kan elevar oppleva dette som vanskeleg. (Birkeland et al., 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; McIntosh, 2007; Indresæter, 1998; Nilsen, 2008; Bjerke et al., 2013; Lamon, 2005). Nokre grunnar til dette og misoppfatningar som kan oppstå vert omtala under.

2.3.1. Kompleksiteten i brøkomgrepet

Ein brøk kan ha ulike tydingar i ulike samanhengar (sjå punkt 2.1.2. – Omgrepsstrukturen for brøk), og denne kompleksiteten kan bidra til å gjera det vanskelegare for ein elev å læra brøk (Lamon, 2005; Pantziara & Philippou, 2012). Ser ein på brøken $\frac{3}{4}$, kan den tolkast som:

- ein del av eit heile; tre av fire like delar
- ein kvotient; svaret på divisjonsstykket 3 : 4
- ein operator; tre firedelar av ei mengde/storleik
- eit forhold; tre delar til fire delar, her vert det samla talet på delar sju
- ein målestorleik; eit punkt på ei tallinje (Pantziara & Philippou, 2012, s.63)

Skal ein elev ha eit godt utvikla brøkomgrep, må han meistra ulike aspekt ved brøk (Bjerke et al., 2013). Ein for snever tankemodell av brøk vil ikkje kunna gje ei fullgod forståing. I ein modell av brøk som «del av eit heile» er t.d. brøken ei samanlikning mellom talet på delar ein har og det totale talet på delar som den heile er delt opp i. I eit slikt perspektivet må teljaren i brøken vera mindre enn nemnaren (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ein brøk som $\frac{5}{4}$ vil då ikkje gjeva meining. Vi kan ikkje ha fem av fire.

Har ein berre erfaringane knytt opp mot brøk som del av eit heile, vil denne kunnskapen kunna verta overført til t.d. tallinja (Heron, 2014). Ei tallinje inneheld ofte meir enn ein heil og desse gjentakande einingane er kontinuerlege, dvs. at det er ingen visuell skilnad mellom dei. Det kan då vera lett å blanda saman det å måla ein brøkdel av ei linje og brøk som punkt på ei linje (Petit et al., 2010). Dette er noko ein finn igjen hjå Kerslake (1986). I denne undersøkinga vart elevar i alderen 12-14 år intervjua for å undersøkja kva kunnskapar dei har om m.a. brøk. Berre ein av 15 elevar greidde å plassera $\frac{2}{3}$ rett på ei linje. 13 av dei såg ikkje på inndelinga av linja, men plasserte brøken på to, som var $\frac{2}{3}$ av heile linja. Dei tolka avstanden frå null til tre som den heile i staden for å sjå at tallinja innehaldt tre heile. Ein snever tankemodell for brøk som «del av eit heile» kan føra til at det vert vanskeleg å justera den mentale konstruksjonen slik at den passar med brøk som tal (ibid.).

Eit anna døme på at ein for snever tankemodell for brøk vil kunna gje ei mangelfull brøkforståing kan vera dersom ein berre ser på brøk som ein talstorleik (Bjerke et al., 2013). Alle brøkar er avhengig av ei eining (Lamon, 2005). Ein brøk er ein relativ storleik der eininga/ den heile varierer frå situasjon til situasjon. Ein halv er større enn ein firedel når brøkane er relatert til same heile. Men ein halv treng slett ikkje alltid vera større enn ein firedel dersom dei er relatert til ulike heile. Dette er det viktig at elevar får erfaringar med.

2.3.2. Nytt notasjonssystem

Med brøk skal to tal symbolisera ein talstorleik. Dette er nytt. Ein elev må ta omsyn til forholdet mellom begge tala samstundes. Korkje teljar eller nemnar gjev meining i seg sjølv. Vert ein av dei endra, vil verdien av brøken òg verta det (Petit et al., 2010). For ein elev kan dette vera lett å gløyma. Teljar og nemnar vil då kunna operera som to uavhengige tal og ikkje som ein verdi (ibid.).

Notasjonen av blanda tal kan òg føra til forvirring hjå ein elev. $3\frac{1}{2}$ er det same som tre heile og ein halv. I algebra har elevar lært at 3x er det same som $3 \cdot x$, vi har her eit «usynleg» gangeteikn. $3\frac{1}{2}$ skal ikkje tolkast som $3 \cdot \frac{1}{2}$, men som $3 + \frac{1}{2}$, her har vi eit «usynleg» addisjonsteikn. Denne forskjellen er det viktig at elevar vert gjort merksam på (Birkeland et al., 2011).

Brøk og divisjon er nært knytt saman, og brøkstreken kan i mange tilfelle tolkast som divisjonsteikn (McIntosh, 2007). Brøken $\frac{3}{7}$ kan då representera rekneprosessen tre delt på sju. Det er viktig at ein elev vert medviten om dette. Samstundes skal han vera i stand til å sjå på $\frac{3}{7}$ som eit tal. Skal ein elev få eit godt utvikla brøkomgrep, må han kunna veksla mellom desse to måtane å sjå brøk på (Birkeland et al., 2011).

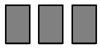
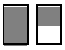
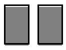
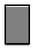
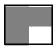
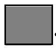
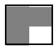
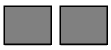
2.3.3. Terminologi

Eit omgrep som t.d. «å forkorta noko», er brukt både i kvardagen og i matematikkundervisninga. I kvardagsspråket betyr det å gjera noko kortare/mindre (i tid, i lengde etc.), medan det i matematikken betyr t.d. at når ein forkortar ein brøk, får vi ein annan skrivemåte for same tal. Talet har ikkje mindre verdi. Når ein i undervisninga nyttar omgrep som både vert brukt i kvardagen og i matematikken, er det viktig å synleggjera korleis desse omgrepa vert definert i dei ulike kontekstane. Elles kan det føra til ei misoppfatning om at t.d. $\frac{2}{5}$ er mindre enn $\frac{4}{10}$.

I kvardagen vert heller ikkje alltid brøkspråket brukt like presist. Ein kan t.d. snakka om «den største halvdelen» eller «berre brøkdelen av». Dette kan føra til misoppfatninga om at brøk ikkje nødvendigvis betyr deling i like store delar (McIntosh, 2007).

Erfaringar med ordenstala tredje, fjerde, femte etc. kan òg forvirra elevar når ein byrjar å snakka om ein tredjedel, fjerdedel etc. i brøk. I staden bør ein nytta orda tredel, firedel etc. (ibid.).

2.3.4. Nye einingar

Ein brøk er ein relativ storleik og kan fortelja kor mykje ein har i høve til ei eining (Lamon, 2005). I dei naturlege tala vert eininga «ein» alltid referert til eit einskildobjekt. I brøk kan eininga òg vera ei mengde som består av fleire objekt. Dersom  representerer ei eining, vil  vera $\frac{1}{2}$. Dersom  representerer ei eining, vil  vera $\frac{1}{2}$. Dessutan kan det som ser ut som same mengde, ikkje alltid ha same namn.  er $\frac{3}{4}$ dersom eininga er .  er $\frac{3}{8}$ dersom eininga er  (ibid., s.16). Dette kan skapa forvirring hjå ein elev, og det er difor viktig at han vert medviten om at ein brøk må tolkast i forhold til eit forstått heile. Ein lærar må bruka tid på å gje elevar varierte erfaringar med ulike einingar, for på den måten prøva å danna eit godt grunnlag for ei solid brøkforståing.

Ei eining kan delast opp uendeleg mange gongar. Her snakkar vi om ei lik/rettferdig deling der delane må ha same storleik, men treng ikkje ha same form. Dersom ein elev ikkje er merksam på dette, kan han då ha fokus på talet på delar i staden for storleiken på delane. Dette kan igjen føra til ei misoppfatning om at brøkdelane ikkje treng ha same storleik (McIntosh, 2007).

I følgje Petit et al. (2010) er det å kunna dela opp eit heile eller ei mengde grunnleggjande i brøkforståinga. Manglande erfaringar med oppdeling av brøkar kan føra til at elevar ikkje ser i kva samanhengar (når og kvifor) ein tek dette i bruk (ibid.).

2.3.5. Ekvivalente brøkar og tettleiken i dei rasjonale tala

Når talomgrepet vert utvida til å gjelda brøk, får vi mange ulike namn på den same storleiken. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ og $\frac{9}{18}$ refererer til same tal. Ofte kan elevar reint mekanisk finna ekvivalente brøkar, men det er slett ikkje sikkert at dei forstår kva ekvivalente brøkar er eller poenget med å finna slike brøkar (McIntosh, 2007). Det er difor viktig at dette vert presisert for elevane. Det kan takast i bruk både når brøkar skal samanliknast og rangerast, ved operasjonar med brøk, og det er ein sentral del av talforståinga (ibid.).

Ei vanleg misoppfatning når det gjeld å forstå likeverdige brøkar, er at ein elev kan tru at t.d. $\frac{4}{10}$ er dobbelt så stor som $\frac{2}{5}$ sidan ein har multiplisert teljar og nemnar med to (ibid.). Å multiplisera med $\frac{2}{2}$ vert då det same som å multiplisera med to i staden for ein. Multiplikasjon inngår i prosedyren, og då kan det ikkje vera same tal (Petit et al., 2010). Eleven ser då ikkje at han har både multiplisert og dividert med to, altså må talet vera uendra. Ei slik misoppfatning kom fram i undersøkinga til Kerslake (1986). 13 av 59 elevar i alderen 12-14 år svara at $\frac{4}{12}$ var fire gongar så stor som $\frac{2}{3}$, samstundes som dei meinte at desse to brøkane var like; dei har same verdi.

Erfaringar med og forståing for ekvivalente brøkar er naudsynt for å forstå tettleiken i dei rasjonale tala (McIntosh, 2007). At det er uendeleg mange tal mellom to brøkar har vist seg vera svært vanskeleg for mange elevar å forstå. Ei misoppfatning om at det t.d. ikkje fins brøkar mellom $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$ eller mellom $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{4}$ kan då koma fram. Vamvakoussi & Vosniadou (2010) har undersøkt kva forståing elevar på 7., 9. og 11. trinn har av tettleiken i dei rasjonale tala. Elevane skulle svara på kor mange tal og kva type tal det var i nokre oppgjevne intervall. Resultatet viste at ideen om at brøk har påfylgjande tal var robust i alle aldersgruppene. Det var ei oppfatning av at dei mellomliggjande tala i eit intervall må vera av same sort som endepunkta (brøk mellom brøkar og desimaltal mellom desimaltal), og kva type tal som var endepunkt påverka elevsvara. Fleire elevar har forstått at det er uendeleg mange tal i eit intervall der endepunkta er oppgjeve som desimaltal enn når endepunkta er oppgjeve som brøkar. Brøk og desimaltal vert då sett på som om dei er ulike slags tal i staden for ulike representasjonar for same tal (ibid.). Dette er eit døme på eit syntetisk omgrep (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning) der elevar prøver å assimilera ny informasjon i dei eksisterande skjemaa.

2.3.6. Interferens med dei naturlege tala

Når noko nytt skal lærast, vil ein byggja på det ein veit frå før. Dette skjer, i følgje Piaget, ved hjelp av assimilasjon og akkomodasjon (sjå punkt 2.2.2.1. – Den kognitive konstruktivismen). Ved utviding av talomgrepet frå naturlege tal til brøk, får vi ein forskjell i kva som ligg i omgrepet tal – både med omsyn til notasjon, ordning og aritmetiske operasjonar. Mange eigenskapar som naturlege tal har, gjeld ikkje for andre tal, som t.d. brøkar. Manglande forståing for og erfaringar med dette kan føra til at ein elev vil tolka brøk innanfor ramma for dei naturlege tala. På denne måten kan ein elev sin kunnskap om dei naturlege tala vera ei hindring i møte med brøk og brøkrekning. Lindegren, Welin & Sönnerhed (2012) snakkar om N-distraksjonar.

Dersom ein elev ser på teljar og nemnar kvar for seg og ikkje som eitt tal, kan det m.a. føra til misoppfatningar når brøkar skal samanliknast. Døme her kan vera at ein stor nemnar indikerer ein stor brøk. $\frac{1}{5}$ er større enn $\frac{1}{4}$ sidan fem er større enn fire. I følgje McIntosh (2007) er dette ei vanleg misoppfatning. Eit anna døme på misoppfatningar når brøkar skal samanliknast kan vera at ein elev ser på skilnaden mellom teljar og nemnar (Pearn & Stephens, 2004). Dess mindre differanse, dess større brøk. $\frac{2}{3}$ er større enn $\frac{5}{7}$, fordi differansen mellom tre og to er ein, medan differansen mellom sju og fem er to.

Ein annan type tenking kan vera å samanlikna brøken med ein heil; $\frac{5}{7}$ manglar to delar for å vera ein heil, medan $\frac{2}{3}$ manglar ein del for å vera ein heil. Difor må $\frac{2}{3}$ vera størst (ibid.). Ein variant av same type tenking kan vera at ein liten nemnar indikerer ein stor brøk fordi brøkdelane er større (ibid.). $\frac{3}{4}$ er større enn $\frac{4}{5}$ fordi $\frac{3}{4}$ har dei største delane. Her greier ein å tenkja på ein invers relasjon mellom nemnar og storleiken på brøken, men er ikkje medviten forholdet mellom teljar og nemnar. Teljar og nemnar vert sett på som to uavhengige talstorleikar.

Dersom ein elev ser på teljar og nemnar som to heile tal som opererer uavhengig av kvarandre, kan det òg føra til misoppfatningar ved operasjonar på brøk. Ved addisjon (eller subtraksjon) av to brøkar kan ein elev då addera (eller subtrahera) teljar med teljar og nemnar med nemnar (McIntosh, 2007). Manglande erfaringar med operasjonar på brøk kan òg føra til ei misoppfatning om at multiplikasjon alltid gjer svaret større og divisjon alltid gjer svaret mindre (Brekke, 2002). Det går då t.d. ikkje an å dela eit lite tal med eit stort tal. Dette kan igjen føra til at elevar med eller utan hensikt byter ein operasjon med ein annan. So lenge ein elev ikkje er trygg på brøkomgrepet, vil han altså kunna ta i bruk reknereglar som gjeld for dei naturlege tala (Lindegren et al., 2012)

2.3.7. Omgjering mellom brøk, desimaltal og prosent

Brøk, desimaltal og prosent er tett knytt saman. Dei er ulike former for same forholdstal (McIntosh, 2007). Brøk og desimaltal må sjåast i forhold til eininga 1, medan prosent må sjåast i forhold til eininga 100 (ibid.). $\frac{1}{2}$ og 0,5 er ein halv samanlikna med ein, medan 50% er 50 av 100. Å kunna sjå på dei rasjonale tala som eit heilskapleg system, har vist seg vera vanskeleg for mange elevar (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Brøk og desimaltal kan lett verta handsama som om dei var ulike tal, i staden for ulike representasjonar av same tal (ibid.).

Det kan oppstå forvirring i forbindelse med omgjering mellom brøk og desimaltal. Kjende misoppfatningar her kan t.d. vera at brøkstreken vert sett på som komma; $\frac{2}{5}$ = 2,5 eller $\frac{1}{9}$ = 0,9. Andre misoppfatningar kan vera tolkingsfeil av nokre prosentar; 0,01% = $\frac{1}{100}$.

2.3.8. Multiplikativ tenking

Når to storleikar skal samanliknast, kan dette gjerast både additivt og multiplikativt. Ved ei additiv samanlikning av a og b, ser ein på differansen mellom a og b (a er r meir/mindre enn b). Ved ei multiplikativ samanlikning ser ein på relasjonen mellom a og b (a er r gongar større/mindre enn b) (Brown et al,. 2010, s. 49). Den multiplikative samanlikninga kan vera mellom storleikar av same sort (forhold), og ho kan vera mellom storleikar av ulikt slag, også kalla rate (sjå punkt 2.1.2.2. – Brøk som forhold). Det er viktig at ein elev forstår og ser forskjell på desse ulike måtane å sjå endringar på (Lamon, 2005). Han må kunna finna eit forhold ut frå to korresponderande verdiar, og vita at relasjonen mellom desse ikkje endrar seg.
Eit forhold kan brukast for å finna ein ukjend variabel (Brown et al., 2010), noko som krev operasjonar med multiplikasjon og divisjon. Manglande forståing for og erfaringar med dette kan føra til at ein elev nyttar seg av additiv tenking når t.d. ein figur skal forstørrast opp. Å forstørra noko vert knytt til addisjon, og å forminska noko vert knytt til subtraksjon. Men slike endringar er knytt til multiplikasjon og divisjon, og ei additiv tenking i slike situasjonar viser at ein elev manglar erfaringar med at når ein adderer eit fast tal til sidene i ein figur, vil figuren endra form (Brekke & Tinnes, 2001).

Eit matematisk omgrep høyrer til i ein omgrepsstruktur; eit nettverk av idear (Brekke & Tinnes, 2001, s.33). Brøk vert fagleg plassert i multiplikative strukturar. Før elevar lærer om brøk, har dei erfaringar med additive situasjonar, dvs. situasjonar som kan løysast ved addisjon eller subtraksjon (Tvete, 2006). Erfaringar med multiplikative situasjonar er ofte avgrensa. Som nemnt i punkt 2.1.2.3. – Brøk som operator, vil ein elev kunna få problem med å forstå operasjonar på brøk dersom han berre har erfaringar med multiplikasjon som «gjenteken addisjon» (Lamon, 2005). $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ kan tolkast som $\frac{2}{3}$ av $\frac{4}{5}$. Her vert multiplikasjon knytt til relasjonen mellom to mengder; den eine er ein brøkdel av den andre (Birkeland et al., 2011).

Har ein avgrensa erfaringar med divisjon, vil ein kunna få problem med å forstå divisjon av brøk. Dersom ein berre har erfaringar med delingsdivisjon, kan det vera vanskeleg å finna eit praktisk døme til divisjonsstykket $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$. Her kan målingsdivisjon hjelpa oss til ei betre forståing. Har ein $\frac{1}{2}$ liter brus som skal hellast i glas som tek $\frac{1}{4}$ liter, vil vi få to fulle glas (Martinussen & Smestad, 2010). Når divisor er ein brøk, kan det vera lettast å finna konkrete døme når ein tek i bruk målingsdivisjon (Birkeland et al., 2011).

Multiplikative forhold har vist seg vera vanskeleg for mange elevar (McIntosh, 2007). Brown et al. (2010) har m.a. undersøkt den multiplikative tenkinga hjå 11-14 år gamle elevar i England og samanlikna resultata med resultata frå ei liknande undersøking på slutten av 70-talet. Konklusjonen deira er at elevar generelt er svak i multiplikativ tenking – noko elevane òg var på slutten av 70-talet. Dei meiner ei årsak til at elevane ikkje gjer det betre no kan liggja i undervisninga ved at den kanskje ikkje har vorte relatert til ein elev si tidlegare forståing, eller at undervisninga ikkje har vara lenge nok til at ein får ei vedvarande endring i måten å tenkja på.

2.3.9. Undervisning

Vanskar med brøkrekning kan ha sitt grunnlag i undervisninga elevane har fått. Brøk kan ha ulike tydingar (sjå punkt 2.1.2 – Omgrepsstrukturen for brøk), og eit einsidig fokus på berre eitt av aspekta ved brøk kan gje mangelfull forståing (Bjerke et al., 2012). Å ha liten variasjon i representasjonsformene, eller å innføra algoritmar utan at ein elev har forstått kva ein gjer, kan skapa problem. McIntosh (2007, s.27) uttrykkjer fylgjande:

> I tradisjonelt skolearbeid med brøk har vi ofte brukt lite tid på å hjelpe elevene til å forstå hva brøk er. Vi har vært mer interessert i å lære bort reglene for de fire regneoperasjonene. Disse reglene er vanskelige nok i seg selv, og enda verre når man ikke forstår tallene en skal gjøre operasjonene med.

Det kan vera fleire grunnar til dette. Det kan t.d. vera lettare for ein lærar å gå rett til reglar for å nå raske og kortsiktige resultat – særleg med tanke på tidspress i høve til fagplan og eksamen. Det kan òg vera at ein lærar manglar kunnskap til å undervisa elevane slik at dei får ei relasjonell forståing (Skemp, 1976). Samstundes kan ein ikkje sjå bort frå at ein lærar har eit ynskje om at elevar skal få ei relasjonell forståing, medan eleven er oppteken av å få ei oppskrift på korleis ei oppgåve skal løysast, då dette raskare kan føra fram til rett svar sidan mindre kunnskap er involvert (ibid.).

Dersom ein elev berre har ei prosedyreforståing for brøkoperasjonane, skal det lite til før det stoppar opp for han. Eleven vil vera avhengig av å hugsa dei ulike reglane til ei kvar tid. Men reknereglar ein ikkje forstår, vert lett gløymd (McIntosh, 2007). Kunnskap lagra i minnet som isolerte fakta og detaljar inngår ikkje i kognitive strukturar. Det kan difor vera lett for at ein elev blandar saman ulike reglar. Eit døme her kan t.d. vera når to brøkar skal multipliserast, vert nemnaren ståande uendra; $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Her er det ein bit av addisjonsalgoritmen som vert blanda inn. Det kan òg vera lett for at ein elev lagar seg sine eigne reglar. Eit døme her kan vera at han snur den første brøken når to brøkar skal dividerast.

Mellin-Olsen (1984) er oppteken av konteksten som lærestoffet må setjast inn i. Vert brøk innført som ein storleik i kontekstar som eple, sirklar, rektangel osb., vil addisjon og subtraksjon kunna gje meining. Men å forklara multiplikasjon og divisjon innanfor denne konteksten, kan opplevast som vanskeleg og forvirrande. Konteksten bør difor endrast. Men når ein endrar ein kontekst, må dette presiserast for elevane. Refvik (2013) gjev uttrykk for at det ikkje alltid vert gjort. Ho har i si masteroppgåve undersøkt lærarar si oppfatning om deira undervisningskunnskap knytt til ulike representasjonar av brøk[7]. Ho har sett på lærarar sine oppfatningar kring bruk av algoritmar, kva representasjonar av brøk dei helst nyttar, og korleis dei illustrerer dette for elevane. Studien syner at lærarane ynskjer å leggja til rette for ei undervisning der forståing er det viktigaste. Dei gjev uttrykk for at det er viktig å kunna arbeida med ulike representasjonar av brøk og at det er viktig å illustrera brøkar for elevane, for på den måten å byggja opp ei betre forståing. Samstundes kjem det fram at lærarane sjølv er usikre på ulike representasjonar av brøk. Det vil då vera lett å støtta seg til lærebøkene. Ho skriv vidare:

[7] Dette er ein kvalitativ studie av empirisk data frå eit større prosjekt ved Universitetet i Stavanger, der ein fokuserer på lærarar sin undervisningskunnskap i matematikk (UKM).

> Måten lærebøkene syner representasjon av brøk, korleis dei introduserer gonge – og seinare multiplikasjon – kan tyde på at mange elevar kan falle av undervegs og ikkje forstå brøkomgrepet og rekneoperasjonane. I tillegg kan måten lærebøkene arbeider med delings- og målingsdivisjon gjere det vanskeleg å hjelpe elevane i den vanskelege overgangen frå gjentatt subtraksjon til å kunne forstå bakgrunnen for algoritmar kring divisjon med brøk (Refvik, 2013, s.49).

2.4. Å arbeida med omgrepsdanning i skulen

Misoppfatningar er, som nemnt i punkt 1.4.2., eit resultat av ei alternativ tolking av ein situasjon (Swan, 2001). Får dei festa seg, kan det hindra vidare læring. Det er difor viktig at ein lærar kjenner til korleis elevar tenkjer og kva misoppfatningar dei kan ha, for å kunna leggja til rette for ei undervisning med mål om å danna solide omgrep hjå elevane. Brekke (2002, s.21) seier fylgjande:

> Det har vist seg gjennom en rekke studier at bare å forklare ikke er en effektiv metode i dannelsen av begreper. Derimot har konfliktdiskusjoner vist seg å ha denne effektiviteten. Dette er trolig slik fordi en får satt søkelys på misoppfatningen, og en inviterer elevene til selv å innse det utilstrekkelige i egen tenkning.

Diagnostisk undervisning er eit direkte svar på desse utfordringane (ibid.), og er dermed ein høgst relevant arbeidsmåte. Saman med undervisning retta mot god talforståing, kan ein byggja solide brøkomgrep hjå elevane (Indresæter, 1998). Slike arbeidsmåtar vil dermed òg vera aktuelle dersom funn frå arbeidet mitt viser seg å få praktiske konsekvensar.

2.4.1. Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning er ein arbeidsmåte i matematikkundervisninga som har som mål å byggja opp solide omgrep hjå ein elev (Brekke, 2002). Grunnlaget er eit konstruktivistisk læringssyn.

Elevane får her oppgåver som er laga slik at eventuelle misoppfatningar eller uferdige omgrep kan avdekkast, også kalla diagnostiske oppgåver (Birkeland et al., 2011). Desse oppgåvene har ikkje som mål å gje elevane tilbakemelding om nivå eller at læraren skal vurdera elevane med tanke på karakterar eller anna form for rangering. Dei er meint å vera til hjelp for læraren slik at han vert kjend med kva tankar elevane har om ulike omgrep, og kva vanskar som er knytt til dei. Med dette som utgangspunkt vil læraren planleggja undervisninga vidare og leggja til rette for ulike aktivitetar som elevane kan byggja ny kunnskap på. Målet er å skapa ein konflikt mellom misoppfatningane og den nye kunnskapen som veks fram. I diagnostisk undervisning legg ein vekt på å løysa denne konflikten ved hjelp av refleksjon undervegs i prosessen, slik at eleven sjølv vert sett i stand til å korrigera det eksisterande omgrepet. Desse konfliktdiskusjonane har vist seg vera meir effektive i omgrepsdanninga enn når ein lærar forklarar den korrekte ideen (Brekke, 2002).

I diagnostisk undervisning kan ein altså finna fylgjande fire fasar (ibid., s.19):

1. Identifisera misoppfatningar og uferdige omgrep hjå elevane. Her vil m.a. diagnostiske oppgåver vera eit viktig hjelpemiddel.
2. Leggja til rette for undervisning slik at eventuelle misoppfatningar eller uferdige omgrep vert framheva. Ein kallar dette å skapa ein kognitiv konflikt.
3. Løysa den kognitive konflikten gjennom diskusjonar og refleksjonar i undervisninga.
4. Bruka det utvida (eller nye) omgrepet i andre samanhengar.

I dette opplegget skal elevane få moglegheit til å forklara korleis dei tenkjer, og samanlikna det med dei andre i klassen og læraren. Det sentrale i den «destruktive» fasen med kognitiv konflikt er at eleven skal innsjå at eigne idear er utilstrekkelege. Det sentrale i «løysingsfasen» er diskusjon og refleksjon kring det ein har kome fram til. Og dette skal altså skje i ein klassekultur der misoppfatningar vert sett på som ein del av læringa i oppbygging av matematisk forståing.

Birkeland et al., (2011) poengterer at når misoppfatningar skal avdekkast, må dette skje i trygge omgjevnader. Dei foreslår at elevane først svarar på dei diagnostiske oppgåvene kvar for seg, for so å drøfta svara i mindre grupper. På den måten kan misoppfatningane først verta eksponert i ei tryggare ramme. Deretter skal gruppene leggja fram konklusjonane for resten av klassen. Vidare skriv dei: «Når elevene forklarer sin tenkemåte, sammenligner og diskuterer, kan misoppfatninger gjøres bevisste og begrepene korrigeres. Det er avgjørende at den sosiale interaksjonen gjennom diskusjon og argumentasjon vektlegges» (ibid., s.34).

Godt planlagde og gjennomarbeidde oppgåver er ein føresetnad om denne metoden skal nyttast. KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen) vart utført frå 1995-2002 av Telemarksforsking – Notodden og Institutt for lærerutdanning og skoletjeneste ved Universitetet i Oslo (Johnsbråten, 2013). Her vart det utvikla kartleggingsprøvar innan ulike delar av matematikken, der målet var å få fram kva tankar elevane har, og i kva grad dei har misoppfatningar i lærestoffet. Dei fleste oppgåvene var diagnostiske. I 2006 starta Telemarksforsking – Notodden arbeidet med å laga ein nettbasert versjon av desse oppgåvene, på oppdrag frå Utdanningsdirektoratet. Dette vart kalla KIM – programmet. Desse oppgåvene er no lagt inn i Utdanningsdirektoratet sitt prøveadministrasjonssystem (PAS), og går under namnet «Læringsstøttande prøvar» (ibid.). Nokre av oppgåvene i undersøkinga mi er henta frå dette prosjektet.

2.4.2. Undervisning om talforståing – «Number sense»

I tillegg til solide omgrep, treng ein elev god talforståing. I måldokumentet Standards (NCTM, 1989) vert omgrep som *Number sense*, *Operation sense* og *Intuitive understanding of number* nytta for å skildra ein kvalitet som er vanskeleg å definera, men som elevar som gjer det bra i matematikk har (Reys & Reys, 1995a, s.28). «Number sense» er eit omgrep som har påverka m.a. læreplanane i dei skandinaviske landa (Nilsen, 2008, s.33). I Læreplanverket for Kunnskapsløftet (LK06) er tal og algebra eit gjennomgåande hovudområde. Det handlar om å utvikla talforståing og innsikt i korleis tal og talhandsaming inngår i system og mønster, og at tal kan kvantifiserast i mengder og storleikar. Området tal omfattar både heile tal, brøk, desimaltal og prosent. I kompetansemåla finn vi m.a. at elevane skal kunna visa talstorleikar på tallinja, uttrykkja talstorleikar på variert vis og vurdera i kva situasjonar ulike representasjonar er formålstenlege. Dei skal òg kunna samanlikna tal, bruka og samtala om ulike reknemetodar, analysera samansette problemstillingar og vurdera og diskutera svar (Utdanningsdirektoratet, u.å.).

Eit av kjenneteikna på ei god talforståing eller «Number sense» er ei intuitiv kjensle for tal og operasjonar, og korleis dei vert tolka og brukt (Reys & Reys, 1995a). Dette er ein eigenskap som vert utvikla over tid, og er ikkje eit avgrensa kunnskapsområde (ibid.). Ein greier å setja matematiske idear inn i ein samanheng, og tal vert meiningsfulle heilskapar. Ny kunnskap vert bygd på tidlegare forståing. Dei presiserer vidare at dette ikkje er noko nytt i matematikken, men det eit viktig perspektiv å sjå kunnskap og læring frå.

Reys & Reys (1995a, s.28-29) prøver å forklara «Number sense» ved å sjå eigenskapar hjå dei som nyttar omgrepet:

> En elev med Number sense
>
> - tittar på ett problem i sin helhet, innan han går in på detaljer...
>   Eksempel: Vid beräkning av $1\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3}$, kan man i huvudet tänka sig termerna i ordning $1\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ för att direkt lägga i hop $1\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ ...
> - letar efter samband mellan tal och operationer och tar hänsyn till ett problems sammanhang ...
> - väljer eller hittar på en metod som stämmer med den egna förståelsen av sambandet mellan tal, eller mellan tal och omvärld och strävar efter den mest effektiva representationen eller tolkningen av den givna uppgiften ...
> - använder hållpunkter, «benchmarks», för att bedømma tals storlek ...

Eksempel: $\frac{2}{5}$ av 49 är mindre än hälften av 49...

- känner igjen orimliga resultat på uträkningar när man på vanligt sätt reflekterar över svar.

Ein elev som raskt ser at $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ er mindre enn ein kan ha talforståing eller «Number sense». Han vil kunna samanlikna kvar talstorleik med ein halv, og dermed konkludera at summen av to brøkar mindre enn ein halv ikkje kan verta større enn 1. Dersom eleven ved utrekning får eit svar større enn ein, veit han at han har rekna feil. Eg vil vidare i oppgåva nytta omgrepet talforståing i staden for «Number sense».

Læraren har ei viktig rolle for at elevane skal kunna forstå, sjå samanhengar og skapa meining i det dei gjer. Eit klassemiljø der «kvifor» (meininga) er like viktig som «kva» (svaret) eller «korleis» (metoden) er difor naudsynt (Reys & Reys,1995a). Dette kan gjerast ved å stilla spørsmål som stimulerer til diskusjon og refleksjon over samanheng mellom svar og prosess. Det er òg viktig å hjelpa ein elev til å finna nokre haldepunkt som gjer han i stand til å avgjera om eit svar er rimeleg. Å ha erfaringar med brøkar nær 0, $\frac{1}{2}$ og 1 kan m.a. vera til hjelp for å få ei betre forståing for tal i brøkform.

Den australske professoren Alistair McIntosh har forska på talforståing hjå elevar i mange år, både i Australia, USA og England. Han har utvikla eit materiell som kan vera til hjelp for å kartleggja talforståing hjå elevar, og ei handbok med m.a. forklaringar på type forståing og vanlege misoppfatningar hjå elevar (McIntosh, 2007). Nokre av oppgåvene i undersøkinga mi er henta frå dette kartleggingsmateriellet.

3. Metode

I dette kapittelet vil eg gjera greie for korleis eg vil gå fram for å få informasjon om og svar på forskingsspørsmåla mine. Fyrst presenterer og argumenterer eg for metodane eg har nytta før eg skriv litt om korleis både testen og intervjua har vorte til. Deretter omtalar eg utvalet i studien og korleis datainnsamlinga vart gjennomført og analysert. Til sist gjer eg greie for reliabilitet og validitet i undersøkinga mi, og kjem m.a. med nokre tankar knytt til forsking på elevar i skulen.

3.1. Datainnsamlingsmetode

Målet med denne studien er å få meir kunnskap om og forståing av korleis elevar tenkjer om brøk og brøkrekning når dei startar i den vidaregåande skulen. For å undersøkja dette meir systematisk, vil eg nytta både kvantitativ og kvalitativ metode. Når ein nyttar fleire metodar for å undersøkja eit fenomen, kallar vi det metodetriangulering eller «mixed methods» (Danielsen, 2013, s.139). Ein vil då kunna studera fenomenet frå fleire sider, noko som kan gje eit meir samansett bilete av det eg forskar på. Kvantitative metodar vert ofte nytta når ein vil ha svar på *kor mykje av ein slags* (Kvale & Brinkman, 2009, s.132), og det vil då m.a. vera mogleg å finna ut kor utbredt eit fenomen er. Dei kvantitative metodane har ei stram definert ramme, noko som kan vera ein fordel om ein skal samanlikna svar i t.d. eit spørjeskjema på tvers av deltakarar (Christoffersen & Johannessen, 2012). Samstundes krev dette god kunnskap om kva spørsmål ein bør stilla for å henta fram den informasjonen ein søkjer (ibid.).

Kvalitative metodar handlar om *kva slags* (Kvale & Brinkman, 2009, s.132), og vert m.a. nytta om ein ynskjer å gå meir i djupna og studera eit fenomen i sin kontekst for på den måten få større innsikt. Dei kvalitative metodane kan gje mykje informasjon frå få informantar, er meir fleksible, har opnare spørsmålsstilling, samspelet mellom forskar og deltakar kan tilpassast og deltakaren kan svara på spørsmåla med eigne ord (Christoffersen & Johannessen, 2012). Samstundes krev dette at t.d. ein intervjuar er i stand til å tolka eit svar og respondera på dette før han stiller neste spørsmål, og svara frå ulike individ kan ikkje utan vidare samanliknast (ibid.).

Som kvantitativ metode vil eg nytta ein skriftleg kartleggingstest, og som kvalitativ metode vil eg gjera bruk av intervju. Ein kartleggingstest vart vald fordi han vil kunna gje meg informasjon om kva elevane meistrar innan ulike aspekt ved brøkomgrepet, og han vil kunna gje meg ein peikepinn på om nokre av elevane har misoppfatningar knytt til brøk og brøkrekning. Dessutan vil tida det tek å gjennomføra testen på elevane vera avgrensa. Men ein må vera klar over at ein kartleggingstest åleine ikkje nødvendigvis vil gje informasjon om kvifor ein elev svarar feil på ei oppgåve (McIntosh, 2007). For å få ei djupare innsikt i korleis elevar tenkjer, vil eg intervjua nokre av dei. I intervjua ynskjer eg at elevane skal grunngjeva val av løysingar på nokre førehandsbestemte oppgåver frå den skriftlege testen, då det slett ikkje er sikkert at mi tolking av desse elevsvara er rett. Ein samtale med ein elev gjev moglegheit for å stilla oppfølgingsspørsmål, og på den måten vil ein kunna få betre innsikt i og auka kunnskap om korleis eleven tenkjer. Men dette krev m.a. fleksibilitet hjå intervjuaren, at han er i stand til å lytta til det som vert sagt og korleis det vert sagt, at han har kunnskap om emnet og at han veit kva han skal spørja om (Kvale & Brinkmann, 2009).

Informasjonen som kjem fram i denne undersøkinga, både frå testen og frå intervjua, vert studert ut frå eit konstruktivistisk syn på læring (sjå punkt 2.2.2.1. – Den kognitive konstruktivismen). Grunnlaget for arbeidet mitt er å vurdera korleis operasjonell og strukturell forståing bidreg til innsikt i brøkomgrepet og meistring av brøkrekning. Misoppfatningar illustrerer avsporingar. Desse kan gje ei innsikt i manglande strukturforståing.

3.1.1. Testen

Målet for utviklinga av testen har vore å finna oppgåver som kan gje svar på problemstillinga. Mi faglege tilnærming har dels vore å lesa grunnleggjande faglitteratur, dels å leita fram meir spesifikk kunnskap. Litteraturen fann eg i bøker, tidsskrift, rapportar, avhandlingar og masteroppgåver. Eg søkte i Bibsys (ein felles bibliotekkatalog for norske universitet og høgskular), Ebrary (e-bøker), på Google Scholar (artiklar frå akademiske forlag og databasar), MathEduc (internasjonal database over matematikkdidaktikk), Eric (fagdatabase for m.a. pedagogikk), og eg nytta litteraturlistene bak i bøkene og tidsskrifta eg las.

For å måla kva dugleikar i og forståing av brøk og brøkrekning ein kan finna hjå elevar som startar i den vidaregåande skulen, må ein prøva å laga prosedyreoppgåver og omgrepsoppgåver for so å studera kor vidt elevane lukkast med desse oppgåvene. I mitt oppgåvesett vert ein elev sine *dugleikar* (operasjonell forståing) undersøkt gjennom oppgåver som kan løysast vha. ein algoritme eller prosedyre som er lært, t.d. reine rekneoppgåver med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon (Hallett et al., 2010; Byrnes & Wasik, 1991). Dersom ein elev skal løysa oppgåva $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, kan han t.d. finna lågaste samnemnar, utvida $\frac{1}{2}$ til $\frac{2}{4}$

for so å addera teljarane i brøken. Eleven nyttar då ein algoritme for addisjon av brøkar med ulike nemnarar, og tek på den måten i bruk prosedyrekunnskap (Hallett et al., 2010, s.395).

Ein elev si *forståing* (strukturell forståing) vert undersøkt gjennom oppgåver som manglar moglegheit for å nytta prosedyrar, eller der slike prosedyrar ikkje er naudsynt for å løysa oppgåvene, som t.d. ekvivalente brøkar og samanlikning av brøkar (Hallett et al., 2010; Byrnes & Wasik, 1991). Dersom ein elev skal avgjera kva brøk som er størst av $\frac{89}{90}$ og $\frac{90}{91}$, vil det vera vanskeleg å nytta prosedyren der ein finn samnemnar og utvidar brøkane utan bruk av kalkulator (Ånestad et al., 2014). Samanliknar ein restbrøkane, også kalla residual tenking (Clarke & Roche, 2009), kan ein sjå at $\frac{1}{90}$ er større enn $\frac{1}{91}$. Difor må $\frac{90}{91}$ vera størst. Eleven tek då i bruk strukturforståing. Ein elev si forståing vert òg undersøkt gjennom kor vidt eleven kan forklara kvifor ei prosedyre som vert brukt på ei oppgåve fungerer, og forståinga vert undersøkt gjennom oppgåver knytt til ulike kontekstar (stundom gjennom tekstoppgåver) for å sjå om dei forstår omgrepa i ulike samanhengar og greier å bruka denne kunnskapen i ein meir kompleks samanheng.

Misoppfatningar kan gje informasjon om ei mangelfull strukturell forståing. For å avdekka om elevar kan ha misoppfatningar i brøk og brøkrekning, har eg teke med diagnostiske oppgåver i testen (sjå punkt 2.4.1. – Diagnostisk undervisning). Diagnostiske oppgåver kan vera til hjelp for å få større innsikt i kva tankar ein elev har om brøkomgrepet, og på den måten få auka kunnskap om ulike vanskar knytt til omgrepet (Brekke, 2002). Ei diagnostisk oppgåve skal ideelt sett vera konstruert slik at det berre er ved å nytta «rett tenkjemåte» at ein vil koma fram til rett svar (ibid.). Dette stiller store krav til den som lagar oppgåvene. Det er m.a. naudsynt med solid kjennskap til ulike feilstrategiar som er vanleg å finna hjå elevar. For å kunna avgjera om feila elevar gjer er tilfeldige eller om det skuldast misoppfatningar, har eg teke med fleire oppgåver som omhandlar same område.

Nivået på den skriftlege kartleggingstesten tek utgangspunkt i den kompetansen ein kan forventa elevane har tileigna seg etter 10 år i grunnskulen. Oppgåvene skal kunna gje informasjon om elevar sine dugleikar i og forståing av sentrale aspekt ved brøkomgrepet, samt få fram eventuelle misoppfatningar knytt til brøk og brøkrekning. Å formulera gode spørsmål som er eintydige og lette å svara på, og samstundes ein målbar indikator for omgrepa i problemstillinga, kan vera vanskeleg (Danielsen, 2013). Det kan difor vera ein fordel å nytta spørsmål andre forskarar har prøvd ut og som allereie er kvalitetssikra (ibid.; Christoffersen & Johannessen, 2012). Dessutan vil det då kunna vera mogleg å samanlikna eigne resultat opp mot desse. Dei fleste oppgåvene brukt i denne kartleggingstesten har vore nytta i tidlegare forsking – nokre av dei på litt yngre elevar. Oppgåvene er m.a. henta frå «Chelsea Diagnostic Mathematics Tests»[8] (Hart, Brown, Kerslake, Küchemann & Ruddock, 1984) – med løyve, «Alle Teller»[9] (McIntosh, 2007), TIMSS 2011 – 8.trinn, «Kartleggingsprøve i rekning VG1»[10] og «Læringsstøttande prøvar»[11] .

Kor mange spørsmål som skal vera med i eit spørjeskjema fins det ikkje noko fasitsvar på, men er det for omfattande kan ein risikera at elevane vert trøytte, misser konsentrasjonen, gjer ikkje sitt beste og let vera å svara på oppgåver (Christoffersen & Johannesssen, 2012). Generelt vert det anbefalt å ha så få oppgåver som mogleg, men nok til at ein vil kunna få svar på det ein er ute etter (ibid.). I denne testen er det 35 oppgåver, noko som kanskje er i meste laget. Men sidan testen vert utført på ei elevgruppe med karaktersnitt godt over gjennomsnittet i matematikk frå ungdomsskulen[12], har eg vurdert at dette er greitt. Elevane skal gjennomføra testen i ein dobbeltime på skulen, og vil difor ha ca. 80 minutt til disposisjon. Oppgåvene i testen har ulik vanskegrad, og til saman skal dei gje svar på forskingsspørsmåla. Nokre oppgåver har oppgjevne svaralternativ – noko som m.a. kan gjera det lettare både for eleven når han skal svara på spørsmåla og for forskaren når svara skal

---

[8] *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests* består av 10 kartleggingstestar frå ulike emne i matematikk, to av desse testane er om brøk. Testane var ein sentral del av forskingsprosjektet «Concepts in Secondary Mathematics and Science» (CSMS), som vart gjennomført i England i perioden 1974-1979. Fokus var på omgrepsforståing, og oppgåvene vart utforma på bakgrunn av diagnostiske intervju. Målet var å kartleggja ulike nivå i forståinga hjå elevar på dei fire første trinna i secondary school, identifisera ulike typar feilsvar og laga undervisningsopplegg for elevane (Hart et al., 1984).

[9] *Alle Teller* er ei handbok for lærarar som underviser i matematikk i grunnskulen, og har vorte til etter eit samarbeid mellom «Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen» (Noreg), «Nationelt Center for Matematik i utbildningen» (Sverige) og professor Alistair McIntosh ved University of Tasmania (Nilsen, 2008, s.5). McIntosh har m.a. forska på elevar si talforståing i mange år, både i Australia, USA og England (ibid.). Formålet med boka er m.a. å hjelpa ein lærar både til å avdekka misoppfatningar hjå elevar og hjelpa dei som allereie har misoppfatningar. I tillegg er ho meint å vera til hjelp for ein lærar slik at han kan unngå å skapa misoppfatningar hjå elevar når nye omgrep skal lærast (McIntosh, 2007, s.2).

[10] *Kartleggingsprøve i rekning VG1* er ein digital kartleggingstest som ligg i Utdanningsdirektoratet sitt prøveadministrasjonssystem, PAS. Det er ein prøve i rekning som grunnleggjande dugleik, og tek utgangspunkt i læreplanen for 10.trinn. Formålet er å identifisera elevar som treng ekstra oppfølging, slik at ein kan setja i gang tiltak så tidleg som mogleg (http://www.udir.no/Vurdering/Kartlegging-videregaende-opplaring/).

[11] *Læringsstøttande prøvar* ligg i Utdanningsdirektoratet sin prøvebank, og er oppgåver frå det tidlegare KIM-prosjektet (sjå punkt 2.4.1.). Dette er prøvar som kan brukast for å identifisera misoppfatningar og manglande omgrepsforståing (http://www.udir.no/vurdering/laringsstottende-prover/).

[12] Gjennomsnittskarakteren i matematikk for heile landet (standpunkt 10.klasse) våren 2014 er 3,5 (http://www.ssb.no/utdanning/statistikker/kargrs/aar/2014-10-30). Gjennomsnittskarakteren i matematikk hjå elevane som deltek i denne studien er 4,8.

registrerast (Danielsen, 2013). Samstundes må ein vera klar over at ein då kan ekskludera moglege svar, eller at strategiar elevar brukar i løysingsprosessen ikkje kjem fram. Eit rett svar på ei slik oppgåve treng heller ikkje bety at ein elev har forstått oppgåva. Andre oppgåver har opne spørsmål der eleven kan skriva ned svaret og forklara korleis han tenkjer når han løyser ei oppgåve. På den måten kan det vera lettare å vurdera korleis ein elev har tenkt. Ein slik kombinasjon av prekoda og opne svar vert kalla semistrukturert spørjeskjema (Christoffersen & Johannessen, 2012). I kartleggingstesten som er brukt her finn vi 12 lukka spørsmål og 23 opne spørsmål. Ein del av dei lukka oppgåvene er diagnostiske oppgåver der eventuelle misoppfatningar hjå ein elev kan koma til syne gjennom nokre av svaralternativa (distraktorane). Totalt sett meiner eg dette er ei god blanding og vil kunna gje meg informasjon om korleis ein elev tenkjer om brøk og brøkrekning.

Nokre av oppgåvene er sett inn i ulike kontekstar i eit enkelt språk, medan andre oppgåver er reine utrekningsoppgåver. Dei fleste utrekningsoppgåvene er kopla til tekstoppgåver andre stader i testen. Dette er gjort for å kunna samanlikna elevsvara på nokre av oppgåvene og sjå om det er ein samanheng mellom tekstoppgåvene og dei tilsvarande reine rekneoppgåvene i testen. Når det gjeld rekkefølgja på oppgåvene i testen, har eg vald å plassera spørsmål som testar nesten det same eller som tematisk høyrer saman, på ulike stader i oppgåvesettet (bortsett frå oppgåve 28 og 29, der oppgåve 28 er ei innleiande oppgåve til oppgåve 29). Dette er gjort for å minimalisera risikoen for at samansetninga av oppgåvesettet, i praksis rekkefølgja, skal gje hint om korleis ei oppgåve skal løysast. Ein kan sjølvsagt ikkje sjå bort frå at ein elev kan kjenna igjen testaspektet frå oppgåve til oppgåve på tvers av testoppsettet. Testen min har imidlertid ikkje mange kontrolloppgåver, og oppgåvene som testar same matematikkfaglege emne har ein viss progresjon i vanskegrad. Eg tenkjer dermed at dette ikkje er eit stort problem i undersøkinga mi. Eit testoppsett med fleire parallelle oppgåver ville kravd meir vidtgåande tiltak for å avklara slike interne samanhengar.

3.1.2. Intervjua

Å gjennomføra eit forskingsintervju er ein kompleks og krevjande metode som krev eit høgt dugleiksnivå hjå den som intervjuar (Kvale & Brinkmann, 2009). Intervju er ein ofte nytta datainnsamlingsmetode der forskaren kan få mykje informasjon frå få informantar (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det er ein profesjonell samtale med eit fagleg innhald, bygd på den kvardagslege samtalen, og har ein struktur og eit formål (Kvale & Brinkmann, 2009). Strukturen ligg i intervjuguiden og rollefordelinga mellom deltakarane, og formålet er m.a. å forstå eit fenomen (ibid.). Kunnskap vert konstruert i samspel mellom intervjuar og den som vert intervjua (Sollid, 2013).

Forskaren har stor innverknad på det som skjer i eit intervju, han er ein del av samtalen og må difor prøva å leggja til rette for at denne vert så god som mogleg (Sollid, 2013). Eit intervju kan vera fleksibelt, og ein har difor høve til å justera seg undervegs i kommunikasjonen. Men ein må vera klar over at det kan ta tid å etablera eit tillitsforhold til ein elev. Eigen utryggleik og manglande intervjutrening kan påverka situasjonen negativt. Eleven kan vera nervøs, misforstå spørsmåla eller han kan prøva å svara det han trur læraren vil at han skal svara. Sjå elles punkt 3.6 – Reliabilitet og validitet, og 3.7. – Etiske refleksjonar.

McIntosh (2007, s.145-146) gjev fleire råd når ein lærar skal intervjua ein elev. For det første er det viktig at det er eleven som står for snakkinga og ikkje læraren. Læraren må sjølvsagt oppmuntra eleven til å forklara korleis han tenkjer og gje han tid til å tenkja utan å avbryta han, men ein for «snakkesalig» lærar kan føra til at ein ikkje får fram korleis eleven tenkjer. For det andre er det viktig at læraren lyttar til det eleven seier og ikkje byrjar å undervisa. Svara eleven gjev må sjåast på som interessante og informative, ikkje som rette eller gale. Eit «galt» svar kan vera vel så nyttig for læraren, då det kan gje informasjon om kva eleven strevar med. Å prøva å få ein elev til å koma fram til rett svar ved t.d. leiande spørsmål, vil kunna forstyrra tankeprosessen hjå eleven, og ein vil då ikkje få fram korleis han tenkjer.

Eg har vald eit delvis strukturert intervju med ein overordna intervjuguide som utgangspunkt, der spørsmål, tema og rekkefølgje vil variera. Denne type intervju kan gje ein god balanse mellom standardisering og fleksibilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Ein intervjuguide er ei liste over tema og generelle spørsmål ein skal gjennomgå i løpet av intervjuet (ibid.). Stikkord på ein lapp kan gje fridom i situasjonen, men det vil kunna vera utfordrande for intervjuar å vera nærværande i samtalen, då han må passa på at alle aktuelle tema vert teke opp (Sollid, 2013). Konkrete spørsmål og oppfølgingsspørsmål kan gje tryggleik i situasjonen, og det vil kunna gjera det lettare å eventuelt samanlikna svara (ibid.). Utgangspunkt for samtalane var oppgåver frå den skriftlege testen. Spørsmåla var enkle og korte, og bygd på løysingsstrategiar funne på svararket til eleven, «korrekte» og «ikkje korrekte». Kva oppgåver det var, varierte frå elev til elev. Difor vart ein generell intervjuguide utarbeidd, sjå vedlegg 5.

3.2. Utval

Informantane vart vald ut etter kva som er formålstenleg ved forskinga, noko som er eit vanleg kriterium for utval i m.a. kvalitative undersøkingar (Christoffersen & Johannessen, 2012). 32 VG1-elevar, 25 jenter og sju gutar, har delteke i denne studien. Alle er rekruttert ved skulen eg jobbar på. Elevane kjem frå 26 ulike kommunar fordelt på 10 fylker i Noreg. Vi snakkar her om eit «bekvemmelighetsutvalg», og det kan difor ikkje sjåast på som representativt for alle elevar (Danielsen, 2013). Funna som kjem fram i denne undersøkinga kan difor ikkje generaliserast (ibid.). Men dei kan gje meg som lærar større innsikt i nokre elevar si brøkforståing: kva dei tenkjer, korleis dei tenkjer og kvifor dei tenkjer som dei gjer. Elevane går på musikk/dans/drama. Skulle utvalet vore representativt, burde eg ha teke med fleire elevar frå alle studieprogram, noko som ikkje var mogleg å gjennomføra grunna tida. Gruppa er forholdsvis homogen, med eit karaktersnitt i matematikk frå ungdomsskulen på 4,8.

Utval av elevar til intervju vart gjort ut frå det som kom fram på den skriftlege testen. Kor mange som bør delta i eit intervju, finst det ingen fasitsvar på, men eit hovudprinsipp er at ein samlar inn informasjon til det ikkje er meir å henta (Sollid, 2013). 30 av 32 elevar sa seg villig til å delta på intervju. Eg plukka ut 11 av dei, anten på grunnlag av interessante eller representative svar som kom fram i kartleggingstesten, eller fordi dei hadde vanskar med oppgåver og meir informasjon trongs for å forstå korleis dei tenkte. Tre gutar og åtte jenter deltok på intervjua.

3.3. Pilotering

Hausten 2013 laga eg eit oppgåvesett med brøkoppgåver. Oppgåvene skulle dekka ulike aspekt ved brøk og moglege kjente misoppfatningar innan dette emnet. Formålet med piloteringa var å testa ut metode og verktøy. Testen skulle vera til hjelp for å sjå kva oppgåver som fungerte og kor eventuelle problem låg hjå elevane. Eg gjekk nokså bredt ut i oppgåvesettet. Det var oppgåver som inneheldt brøk og illustrasjonar, ekvivalens, brøk på tallinja, samanlikning av brøkar, brøk/prosent/desimaltal, brøk og dei fire rekneartane, brøk i geometri, brøk og sannsyn og brøk i algebra. Testen inneheldt 46 oppgåver og vart gjennomført i oktober 2013 av elevane i VG1 ved skulen der eg jobba. 31 elevar deltok i denne undersøkinga.

Oppgåvesettet har gått gjennom endringar etter at piloten vart gjennomført. Elevane brukte frå 45 – 90 minutt på testen og nokre av dei vart trøytte på slutten då friminuttet nærma seg.

Ein del hadde ikkje svart på dei siste oppgåvene som m.a. handla om brøk i algebra. Eg var difor usikker på om elevane gjorde sitt beste på desse oppgåvene. Ein samtale med elevane i etterkant stadfesta at dette var tilfelle. Fylgjande setning stod òg skrive på eit av svara på slutten : «Brøkkvoten min for å tenkja logisk stoppa her…». Testen var for omfattande og nokre oppgåver måtte bort. Ut frå ei totalvurdering av det som kom fram i testen bestemte eg meg for å kutta ut dei fleste oppgåver som tok føre seg brøk i geometri, brøk i sannsyn og brøk i algebra. Eg ville heller konsentrera meg om oppgåvene som testa den grunnleggjande brøkforståinga, då fleire kjende misoppfatningar kom til syne i elevsvara på desse oppgåvene.

I etterkant av piloteringa las eg meir litteratur om emnet, og kom m.a. over Chelsea Diagnostic Mathematics Tests (Hart et al., 1984). Nokre av desse oppgåvene vart teke med i testen for å få fleire reine diagnostiske oppgåver med. For å kunna avdekka kva ein elev eventuelt strevar med, er det viktig at testen inneheld ein del enkle oppgåver (Nilsen, 2008). Nokre TIMSS-oppgåver vart difor kutta ut, då dei vart vurdert til å vera meir krevjande grunna meir tekst og fleire rekneoperasjonar. Oppgåver som var lite informative, vart anten endra litt på eller kutta ut. Språket i nokre oppgåver vart justert der eg såg det var naudsynt med presiseringar, og elevane vart beden om å grunngjeva svara sine på fleire av oppgåvene.

Sumaren 2014 var den endelege testen klar. For å forsikra meg om at han enno ikkje var for omfattande, lot eg to jenter på 14 år rekna gjennom oppgåvesettet. Dei brukte 60-65 minutt på testen. Eg vurderte då at omfanget på testen var passande, då desse to jentene er høvesvis eitt og to skuleår yngre enn elevane som skulle delta i dette forskingsprosjektet.

Når det gjeld intervju, presiserer Kvale & Brinkmann (2009) at eit forskingsintervju er eit handverk som må lærast, og kvaliteten på kunnskapen som vert produsert er avhengig både av kunnskap, dugleik og personleg skjøn hjå den som intervjuar. Dette føreset trening; «… ferdigheter i å intervjue tilegnes ved å intervjue» (Kvale & Brinkmann, 2009, s.105). Difor gjennomførte eg i februar 2014 individuelle intervju med 3 av elevane som deltok i pilottesten. Kvart intervju tok ca. 30 minutt, og dei vart teke opp på band og transkribert i etterkant. Sjølv om eg har vore lærar i mange år og hatt mange formelle og uformelle samtalar med elevar, var det særs nyttig å gjennomføra intervjua, lytta til dei i etterkant og transkribera dei. Fleire gongar ramla eg i «fallgruver» som kan kjenneteikna ein urøynd intervjuar. McIntosh (2007) understrekar m.a. at ein ikkje skal undervisa under intervjuet ved å prøva å hjelpa ein elev til å koma fram til rett svar. Då eg høyrde gjennom intervjua i etterkant såg eg tydeleg at det var nettopp det eg gjorde ved fleire høve. Eg oppdaga òg at eg stundom var litt for kjapp med å koma med nye spørsmål der det oppstod stille i samtalen, men dette vart gjort for at eleven ikkje skulle oppfatta situasjonen som «pinleg». Eit av intervjua føregjekk på slutten av skuledagen (frå kl. 15.30-16.00). Dette var ikkje gunstig, då både elev og lærar var trøytt etter ein lang dag. Intervjua bør difor takast tidlegare på dagen når begge partar er meir opplagt.

Ved transkribering av intervjua starta eg med å skriva ned alt som vart sagt. Småord som javel, hm, æh, flott etc. vart teke med. Då eg las gjennom transkripsjonane verka det heile noko usamanhengande. I etterkant gjorde eg ein fortetta transkripsjon med ein meir samanhengande skriftleg stil. Meininga med det eleven sa kom då tydlegare fram. Samstundes såg eg at ein del av usikkerheita som kunne vera i situasjonen då eleven prøvde å forklara korleis han tenkte, vart borte. Eg meiner likevel dette ikkje påverkar meiningsinnhaldet, og at det ikkje vil bety noko for vidare arbeid med datamaterialet. Difor har eg vurdert dette til å vera det beste alternativet i mi undersøking.

3.4. Gjennomføring

Testen vart gjennomført 26.august 2014 frå klokka 9.50-11.10. Elevane vart på førehand oppmoda om å gjera sitt beste og kladda på oppgåvearket. Dei vart oppmoda til å svara på alle oppgåvene, òg på oppgåver dei var usikre på korleis skulle løysast. Dei fekk forklart at testen ikkje var meint for å rangera dei og at resultatet ikkje ville påverka karakteren i faget. Testen skulle derimot vera til hjelp for meg for å få større innsikt i korleis dei tenkjer om brøk og brøkrekning, slik at eg kan hjelpa dei best mogleg. Elevane hadde ikkje fått oppfriska brøkkunnskapane sine i matematikktimane før testen vart teke. Det var ro i klasserommet i testsituasjonen, og ingen fekk gå ut i friminuttet før alle hadde levert. Elevane brukte frå 40 til 70 minutt på testen.

Dei 11 intervjua vart gjennomført innan 14 dagar etter at testen vart teke, fordi elevane betre skulle kunna hugsa korleis dei tenkte då dei jobba med oppgåvene på testen. Kva oppgåve vi skulle sjå nærare på hadde eg bestemt før samtalane starta. Før intervjua starta, fekk elevane beskjed om at eg var interessert i å høyra korleis dei hadde tenkt då dei løyste dei ulike oppgåvene. Eg ville ikkje ha fokus på om dei svara rett eller galt, det var tenkinga deira eg var interessert i å få større innsikt i. Vi sat på eit grupperom på skulen, noko avskjerma frå klasseromma der dei andre elevane var. Dette for å få mest mogleg ro rundt intervjuet. Tidslengda på kvart intervju var ca. 30 minutt. Eit intervju kan vera ein intens samtale, og varer den for lenge kan det m.a. føra til at eleven vert trøytt, misser konsentrasjonen og svarar det han trur læraren vil at han skal svara. Alle samtalane vart teke opp på band. Nøyaktig informasjon om kva som vert sagt er viktig i analyseprosessen (Sollid, 2013). Notatar vart gjort under intervjua eller like etterpå, då lydopptak m.a. ikkje fangar opp non-verbal kommunikasjon som t.d. kroppsspråk.

3.5. Vidare arbeid med data

Datamaterialet vart handsama manuelt då datamengda frå den skriftlege testen er liten grunna få respondentar. Eg starta med ei forenkla koding, der eg gav 1 poeng for rett svar, 0 poeng for feilsvar eller manglande svar og $\frac{1}{2}$ poeng for litt rett. Resultata vart ført inn i Excel. Dette gav ei rask oppsummering på klassenivå, men ikkje so mykje informasjon om korleis ein elev tenkjer (Nilsen, 2008). Difor såg eg på dei ulike svara på nytt, og kategoriserte dei ut frå svaralternativa på fleirvalsoppgåvene og sjølve løysinga på dei opne oppgåvene. Her skilde eg òg mellom ulike strategiar elevane nytta. Eg såg etter feil og eventuelle misoppfatningar. Eg samanlikna resultata på dei reine utrekningsoppgåvene med dei tilhøyrande tekstoppgåvene for å sjå om eg kunne seia noko om prosedyrekunnskap versus omgrepskunnskap hjå elevane. Svarfrekvensen er oppgjeve i prosent på oppgåver som vert samanlikna med resultatet frå andre forskingsprosjekt. Men ein må her vera klar over at det er svært få respondentar på testen min, dette utgjer ei uvisse og må difor tolkast med respekt.

Intervjua vart transkribert i etterkant for å få struktur og oversikt over datamaterialet og dermed gjera det lettare for analysearbeidet (Kvale & Brinkmann, 2009) . Dette er ingen nøytral prosess (ibid; Sollid, 2013). Kor mykje av materialet som skal transkriberast og kor detaljert ein skal vera er avhengig av målsetjinga for undersøkinga (Kvale & Brinkmann, 2009). Eg ynskjer å få større innsikt i og auka forståing for korleis elevar tenkjer om brøk. Difor valde eg å først å transkribera det meste som vart sagt, men tok ikkje med alle gjentakingane, latter, sukk, eh, hm etc. Deretter føretok eg ei fortetting av intervjuet med ein meir samanhengande skriftleg stil. Dette vart gjort for at det skulle vera lettare å lesa og at meininga med det eleven sa skulle tre tydlegare fram. Eg unngjekk usamanhengande og gjentakande transkripsjonar mest fordi eg ikkje kan sjå at det betyr noko for mi tolking av svara, men òg fordi slike sitat kan oppfattast som ei stigmatisering av elevane. Som tidlegare omtala kan slik fortetting dekka over noko av usikkerheita hjå elevane, utan at dette har påverka mi tolking av meiningsinnhaldet.

Eg har ikkje transkribert «småpraten» som var mellom oppgåvene vi samtalte om. Elevane var klar over at eg ikkje hadde fokus på om dei svara rett eller galt, men på korleis dei tenkte. Dei fekk positive tilbakemeldingar undervegs i intervjuet, som t.d. «Takk, no trur eg at eg forstår korleis du tenkjer. Flott!» Eller: «Dette som du sa no, har eg ikkje vore klar over før. Takk for at du forklarte det for meg. Eg lærer mykje av det». Etc. Dette vart gjort for å skapa tryggleik i situasjonen, og for å unngå å påføra elevane negative opplevingar; t.d. stress og endra sjølvbilete. Dette har eg heller ikkje transkribert. Eit par av elevane lurte i etterkant av intervjua på om dei hadde svara rett på oppgåvene. Vi sette oss då ned med dei aktuelle oppgåvene, og prata om dei (som i ein undervisningssituasjon), men bandopptakaren var då slått av.

Kor vidt ein i transkripsjonen skal skriva eleven sine svar på hans eigen dialekt eller på normert skriftspråk, fins det ikkje noko fasitsvar på (Sollid, 2013). Dialekt ligg nært opp til stemma, men det er brot på skriftbilete og kan føra til distanse til lesaren. Nyttar ein det normerte skriftspråket, kan viktig informasjon gå tapt (ibid.). Eg valde likevel å skriva ned det eleven sa på nynorsk og ikkje eleven sin dialekt. Dette vart gjort for at eleven ikkje skal kunna verta identifisert, då elevane som deltok i prosjektet kjem frå heile landet.

Det transkriberte materialet vart samanlikna med resultata på oppgåvene frå testen, og eventuelle nye strategiar og misoppfatningar vart lagt til det opphavlege materialet. Funna vart presentert gjennom tal og figurar og vurdert i forhold til undersøkingar i Noreg og andre land, og i forhold til teori om misoppfatningar, prosedyrekunnskap og omgrepskunnskap. Oppgåvene vart presentert og analysert ut frå matematisk kontekst.

3.6. Reliabilitet og validitet

Reliabilitet og validitet er to sentrale omgrep i forsking som handlar om kvaliteten på datamaterialet (Sollid, 2013). Reliabilitet handlar om kor påliteleg datamaterialet er; kor nøyaktig og presis ein er når data vert samla inn og arbeidd vidare med. Vi har høg reliabilitet dersom eit forsøk kan gjentakast fleire gongar, gjerne utført av ein annan forskar, med same resultat kvar gong (Christoffersen & Johannessen, 2012). Validitet handlar om kor gyldig eller truverdig undersøkinga er; at t.d. metoden er eigna til å undersøkja det vi vil undersøkja og at vi måler det vi ynskjer å måla. Spørsmåla i t.d. ein test må vera gyldige indikatorar for det ein vil forska på (Danielsen, 2013). I mitt tilfelle handlar det om kor vidt oppgåvene er eigna til å måla ein elev si forståing av og dugleikar i brøk og brøkrekning, samt om oppgåvene er godt eigna til å avsløra misoppfatningar.

Å vurdera kvaliteten på datamaterialet i undersøkingar der t.d. intervju er ein del av metoden, kan vera vanskeleg, då ein her prøver å finna ut korleis nokre få personar tenkjer om eit emne (Sollid, 2013). Det som er gyldig i ein samanheng treng ikkje vera det i ein annan samanheng, noko som krev at forskaren må vera open kring prosedyrane i forskingsarbeidet og reflektera over dette (ibid.).

Det er mange faktorar som kan spela inn når ein skal forska på elevar i skulen. Ein elev kan vera trøytt og ukonsentrert den dagen testen skal takast, eller han kan vera lite motivert for å delta. Tilhøvet mellom lærar og elev kan spela inn; nokre elevar kan ynskja å gjera læraren til lags, medan andre det motsette.

For å sikra størst mogleg reliabilitet i denne undersøkinga, vart m.a. fylgjande gjort:

- God informasjon om prosjektet vart gjeve før testen vart gjennomført – både til elevar og føresette. Det var sjølvsagt frivillig å delta i prosjektet. Eg understreka at det var viktig for forskinga at elevane gjorde sitt beste, svara seriøst og at dei unngjekk samarbeid med andre. Elevane vart oppmoda til å kladda på oppgåvearket.
- Testen vart gjennomført på eit tidspunkt der elevane var opplagde. Mi erfaring som lærar tilsa at det var på føremiddagen, men ikkje i første time som starta kl.08.05, då nokre elevar er svært trøytte. Difor vart testen gjennomført frå kl. 09.50 – 11.10. Det var ro i klassen då testen vart tatt. Mengde oppgåver i testen såg ut til å vera passande, elevane jobba konsentrert den tida testen varte.
- Oppgåvene i testen inneheldt både reine utrekningsoppgåver og tekstoppgåver. Dei fleste utrekningsoppgåvene er kopla til tekstoppgåver andre stader i testen. Dette vart gjort for å kunna samanlikna elevsvara på nokre av oppgåvene og for å sjå om det var ein samanheng mellom tekstoppgåvene og dei tilsvarande reine rekneoppgåvene i testen. Ulike oppgåver som testar det same matematikkfaglege emnet vart teke med for å sjå om nye kontekstar påverka elevsvara.
- Spørsmålsformuleringa i testen var i eit enkelt og eintydig språk, då det er viktig at både elevane og eg har same oppfatning av spørsmåla.
- Få dagar etter at testen vart gjennomført vart datamaterialet strukturert i tabellar og kategorisert ut frå svaralternativa på fleirsvarsoppgåvene eller sjølve løysinga på dei opne oppgåvene. Dette vart gjort for å gje meg ei betre oversikt over materialet. Noko

av datamaterialet vart so utgangspunkt for intervju med elevane. Her måtte dei utdjupa korleis dei tenkte då dei løyste nokre av oppgåvene på testen. På den måten kunne eg få ei betre innsikt i korleis eleven har tenkt. Dette vart vidare samanlikna med kategoriane utarbeidd frå kartleggingstesten og dei ulike strategiane som kom fram der, og det vart samanlikna med anna forsking på området.

- Under intervjua prøvde eg å unngå leiande spørsmål. Det er eit ujamt maktforhold i intervjusituasjonen, og risiko for at eleven svarar det han trur læraren vil høyra i staden for sine eigne tankar er absolutt til stades. Eg presiserte difor for eleven før intervjuet tok til at eg ikkje er ute etter rette eller «gale» svar, men korleis eleven tenkjer. For å forsikra meg om at eg forsto meininga med det eleven sa, nytta eg meg av oppfølgingsspørsmål, direkte spørsmål og tolkande spørsmål. Ord nytta av eleven vart tatt med til neste spørsmål slik at argumentasjonen vart samanhengande. Eg gjorde ikkje så mange notatar undervegs under intervjuet, men skreiv ein liten logg like etter at intervjuet vart gjennomført for å hindra at viktig informasjon skulle gå tapt. Intervjua vart raskt transkribert i etterkant.

For å sikra størst mogleg validitet i denne undersøkinga, vart m.a. fylgjande gjort:

- Eg snakka med elevane i forkant av undersøkinga, og presiserte for dei at dersom dei var lite motivert for å vera med i prosjektet, var det heilt greitt å la vera å delta. Dette ville ikkje få konsekvensar for dei i skulekvardagen.
- Eg nytta metodetriangulering for å få ulike data som kjelder. På den måten kan eit fenomen verta studert frå fleire sider, noko som kan gje ei fyldigare skildring av det eg forskar på. Ein test kan gje svar på kor utbredt eit fenomen er, medan ein i intervju kan gå meir i djupna på det ein ynskjer å få større innsikt i.
- Eg gjennomførte ei pilotundersøking i forkant av undersøkinga der formålet var å testa ut metode og verktøy. Eg vurderte det slik at metoden var eigna til å undersøkja det eg ville undersøkja, men eg måtte gjera nokre endringar i oppgåvesettet slik at det kom betre fram det eg ville måla.
- Dei fleste oppgåvene i kartleggingstesten er oppgåver som har vore nytta i anna forsking og som allereie er kvalitetssikra. Oppgåvene frå det norske KIM-prosjektet/ «læringsstøttande prøvar» er omtala i punkt 2.4.1. – diagnostisk undervisning. «Chelsea Diagnostic Mathematic Test» inneheld for det meste oppgåver som legg vekt på omgrepsforståing. Dei vart til på bakgrunn av diagnostiske intervju med elevar i

alderen 11-15 år. Basert på intervjua vart ein skriftleg test laga og gjeve til om lag 10000 barn i England. Oppgåvene i «Alle Teller – test i talloppfatning» har vorte utvikla av McIntosh, som har forska på både barn og unge si taloppfatning i mange år – i ulike land. Mange av oppgåvene er konstruert slik at eventuelle misoppfatningar skal avslørast. Oppgåvene er omsett og tilpassa norske forhold og læreplanar av Ingvill Merete Stedøy-Johansen og May Renate Settemsdal ved Matematikksenteret – NSMO. Eg meiner at oppgåvene er eigna til å måla ein elev si forståing av og dugleikar i brøk og brøkrekning og til å avsløra eventuelle misoppfatningar.

- Eg har prøvd å vera open kring prosedyrane i forskingsarbeidet, særleg omkring intervjusituasjonen og korleis datamaterialet vart handsama i etterkant.

Ut frå ei totalvurdering meiner eg at denne undersøkinga har høg reliabilitet og validitet. Men det er viktig å vera klar over at desse funna ikkje kan generaliserast, då vi har med eit ikkje-representativt utval å gjera. Undersøkinga kan likevel gje viktig informasjon om korleis elevar tenkjer om brøk og brøkrekning, og eventuelle misoppfatningar ein kan finna hjå elevar i denne aldersgruppa.

3.7. Etiske refleksjonar

Det er fleire etiske omsyn ein forskar må tenkja gjennom når han arbeider med eit prosjekt. Den nasjonale forskingsetiske komité for samfunnsvitskap og humaniora (NESH) har utarbeidd forskingsetiske retningsliner, og dei kan m.a. vera til hjelp for forskaren slik at han kan gjera val som veg etiske omsyn opp mot vitskaplege omsyn i ei undersøking.

Dei som deltek i eit forskingsprosjekt skal gje *informert samtykke*. Dei skal ha informasjon om forskingsprosjektet; både overordna mål og hovudtrekka i designet. Dei skal vita at det er frivillig å delta, og at dei når som helst kan trekkja seg frå prosjektet utan grunngjeving. Ein elev skal vita at det ikkje vil få noko konsekvens for han i skulekvardagen om han ikkje ynskjer å delta i prosjektet. Denne informasjonen vart gjeve elevane munnleg og skriftleg på starten av skuleåret før kartleggingstesten skulle takast og informasjonen vart repetert munnleg i forkant av intervjua. Alle elevane som deltok i undersøkinga var over 15 år, og kunne difor sjølv samtykka i å delta, då det ikkje vart registrert sensitive opplysningar i prosjektet. Eit skriv til føresette der eg informerte om prosjektet vart sendt ut ved starten av skuleåret. Det vart òg gjeve informasjon om at studiet er godkjent av Norsk samfunnsvitenskaplig datatjeneste, NSD. Viktig informasjon som seinare kom fram i skuletimane og som hadde relevans for oppgåva mi, vart ikkje brukt utan at det var avklart med den einskilde elev.

Informantane som deltek i eit forskingsprosjektet har krav på *konfidensialitet* eller fortrulegheit. Dei skal ikkje kunna avslørast. Førenamna på elevane vart difor kopla opp mot ein kodenøkkel, og denne koden vart nytta då den skriftlege testen vart utført. Lista med namn og kode (som berre eg hadde tilgang til) og lydopptaka frå intervjua vart oppbevart i låst skap på skulen. I transkripsjonen av intervjua nytta eg skriftspråket, ikkje eleven sin eigen dialekt. Alle opplysingane vart handsama konfidensielt og anonymisert. Elevane som vart intervjua er namngjeve som E1-E2-E3---E11 og omtala som «han», då elev er eit hankjønnsord. Ingen einskildpersonar vil dermed kunna kjenna seg igjen i den ferdige oppgåva.

Ein forskar må òg vurdera moglege *konsekvensar* for ein person som deltek i ei undersøking. Risiko for skade skal vera minst mogleg. Etiske spørsmål oppstår ofte i intervju grunna den skeive maktrelasjonen mellom intervjuar og respondent (Kvale & Brinkmann, 2009). Difor er det viktig å vera varsam her. Ein må prøva å finna balansen mellom forskaren sitt ynskje om å innhenta informasjon, og respektera intervjupersonen sin integritet (ibid.). Ein må prøva å unngå at intervjusituasjonen påfører ein elev negative opplevingar som t.d. stress eller at sjølvbiletet hans vert endra. Ein må prøva å unngå å påverka eleven ved t.d. å stilla leiande spørsmål, eller ved tydeleg å visa at det han svarar er «feil». Kvale & Brinkmann (2009) understrekar at dei første minutta av eit intervju er avgjerande. Å skapa god kontakt ved å lytta, visa interesse og respektera det som vert sagt er difor viktig. I intervjusituasjonen prøvde eg etter beste evne å etterleva dette. Elevane var klar over at eg ikkje var interessert i rette eller «gale» svar, men korleis dei tenkte. Dei fekk positive kommentarar undervegs i intervjuet.

Datainnsamlinga føregjekk heilt i starten på eit nytt skuleår. Elevane og eg var ukjende med kvarandre. Difor deltok eg mykje i det sosialpedagogiske arbeidet ved skulen dei første vekene; som t.d. samtalar med einskildelevar og mindre grupper i friminutta og i kantina, vi var på båttur saman med resten av skulen og vi var saman på konsertar etc. Ein trygg relasjon mellom lærar og elev vil m.a. kunna føra til at eleven tør å vera mest mogleg ærleg i forklaringa si om korleis han tenkjer utan å føla seg «dum».

Då intervjua skulle transkriberast, unngjekk eg usamanhengande og gjentakande transkripsjonar på grunn av at slike sitat kan oppfattast som ei stigmatisering av elevane (ibid.).

Forskarrolla er viktig – særleg i kvalitative undersøkingar, og Kvale & Brinkmann (2009, s.92) meiner at forskaren sin kunnskap, erfaring, ærlegdom og rettferd er den avgjerande faktoren. Forskaren har eit ansvar for at resultata vert kontrollert, validert og publisert so nøyaktig som mogleg, og han skal kritisk vurdera si eiga forsking. Dette har eg prøvd å etterleva etter beste evne. Eg har gjennomført ei pilotundersøking i forkant av denne undersøkinga for å øva meg opp i rolla som forskar. Omsyn til personvern vart handsama på same vis som i det endelege oppsettet.

4. Resultat og analyse

I dette kapitlet gjer eg greie for resultata frå den skriftlege testen og intervjua. Funn frå testen vert presentert gjennom tal og figurar, og supplert med interessante svar frå intervjua. Dette vert vurdert i forhold til andre undersøkingar og teori om misoppfatningar, prosedyreforståing og omgrepsforståing. Elevsvara vert presentert og analysert ut frå matematisk kontekst.

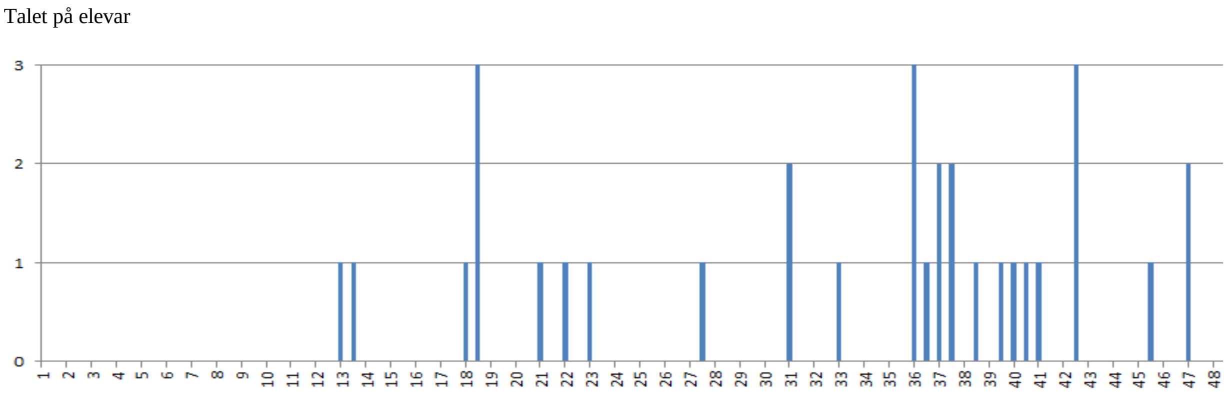
Eg har vald ei open tilnærming til datamaterialet som alternativ til å snevra det inn mot ei spesifikk hypotese. Med denne tilnærminga ynskjer eg å danna meg eit heilskapleg bilete av brøkforståinga hjå elevane, hjå heile klassen eller delar av han. Samstundes vert det mogleg å ringa inn og velja mellom eit vidt spekter av utfordringar, kjende og kanskje ukjende. Døme på dette kan vera problem som er gjennomgåande, eller som på anna vis fortener særskild merksemd. Konsistens i svara hjå einskildelevar har eg hatt mindre fokus på, då dette etter mi meining er meir formålstenleg dersom ein ynskjer å få oversikt over kva den einskilde elev strevar med for so å laga eit tilpassa undervisningsopplegg for han. Ei kartlegging av ulike elevprofilar kunne auka validiteten i oppgåva mi, men på grunn av omfanget på oppgåva har det vore naudsynt å gjera prioriteringar.

4.1. Nokre statistiske mål

Alle elevane i klassen deltok på den skriftlege testen. Elevane som deltok på intervjua vart plukka ut på grunnlag av interessante strategiar som kom fram i kartleggingstesten. Nokre feilsvar på einskildoppgåver spelte òg ei rolle for kven som vart vald ut i forsøk på å avdekka korleis dei tenkte.

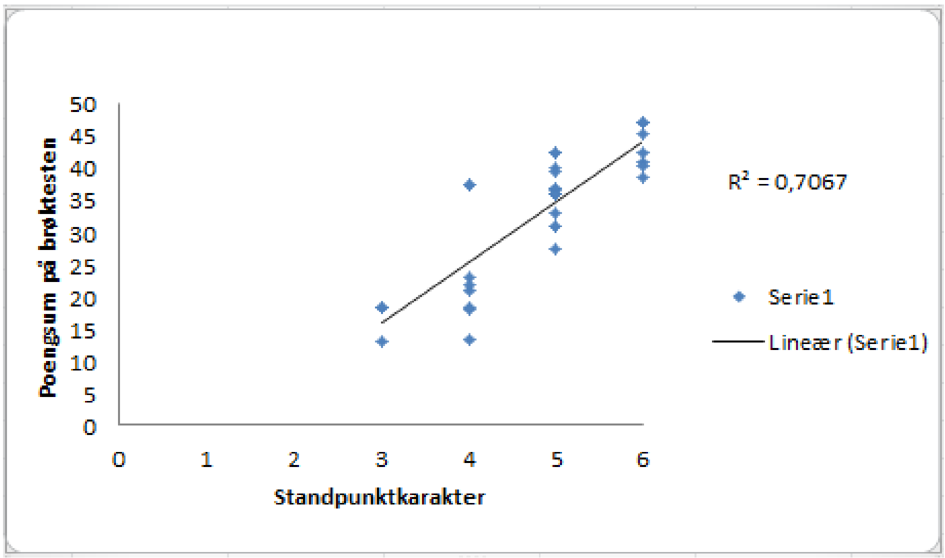
Resultatet av ei forenkla koding av elevsvara er vist i figur 4. Rett svar gjev eit poeng, galt svar eller ikkje svart gjev null poeng og delvis rett svar gjev eit halvt poeng. Maksimal poengsum er 48. Gjennomsnittleg poengsum er 32,8, medan medianen er 36,25.

Det er stor spreiing i elevsvara. Variasjonsbredda er 34, med 13 som lågaste poengsum og 47 som høgaste poengsum. Kvartildifferansen er 17,75 (Q1=22,5 og Q3=40,25) og standardavviket er 10,2.



Figur 4: Fordeling av poengsum hjå elevane

Samanhengen mellom standpunktkarakter i matematikk frå 10. klasse og resultat på brøktesten er vist i figur 5.



Figur 5: Samanlikning av standpunktkarakterar i matematikk og poengsum på testen

Korrelasjonskoeffesienten er 0,84, noko som kan tyda på høg grad av samanheng mellom faktorane. Ein høg standpunktkarakter kan indikera ein høg poengsum på testen. No kan ein ut frå dette sjølvsagt ikkje slå fast at ein elev med høg standpunktkarakter automatisk vil ha høg grad av brøkforståing. Ein standpunktkarakter skal setjast ut frå ei heilskapsvurdering av ein elev sin samla kompetanse i faget. Brøkforståinga er berre ein del av dette.

Ein kan leggja merke til at det er størst sprik i resultata hjå elevane som hadde fire i standpunkt, samstundes som dei fleste av desse elevane skårar relativt lågt.

4.2. Resultat, kommentarar og analyse av einskildoppgåver

Oppgåvene under er forsøkt kategorisert ut frå omgrepsstrukturen til brøk, som er omtala i punkt 2.1.2.1. – 2.1.2.5. i teorikapitlet, og følgjer difor ikkje rekkjefølgja på oppgåvene i testen. Elevsvara er gruppert i samsvar med dette. Dei vert presentert og analysert ut frå ein matematisk kontekst for å gje ei betre oversikt over datamaterialet. Formålet er å få eit overordna bilete av brøkforståinga, å synleggjera prosedyre- og strukturforståing hjå elevar, samt eventuelle misoppfatningar. Dette kan igjen gje eit grunnlag for prioritering og vidare arbeid med data.

Eg vil først omtala nokre oppgåver som er knytt opp mot brøk og illustrasjonar. Dette er ei side ved aspektet «brøk som del av eit heile». Deretter ser eg på nokre oppgåver som handlar om ekvivalente brøkar, samanlikning av brøkar, brøk på tallinja, tettleik i brøk og brøk/desimaltal/prosent. Dette kan vera ulike sider ved aspektet «brøk som målestorleik». Nokre oppgåver i testen handlar om brøk og forhold, og er sider ved aspektet «brøk som forhold». Til sist omtalar eg oppgåver som er knytt opp mot brøk og dei fire rekneartane, både tekstoppgåver og reine utrekningsoppgåver. I følgje Birkeland et al. (2011) er det vanleg at ein ved addisjon og subtraksjon ser på brøk som «målestorleik», medan ein ved multiplikasjon og divisjon ser på brøk som «operator». Sider ved aspektet «brøk som operator» og «brøk som kvotient» vert omtala her.

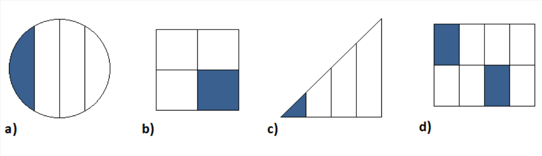
Eg presenterer oppgåve for oppgåve, gjev oversikt over ulike elevsvar, tek med interessante svar frå intervjua og prøver å finna forklaringar på ulike elevsvar. Funna vert so relatert til anna forsking. Alle elevutsegner vert skrive i kursiv. 23 av 35 oppgåver vert kommentert og analysert. Dei er vald ut etter interessante funn – anten i testen eller i intervjua. Eg har ikkje kommentert oppgåver som ikkje gjev ny informasjon eller der om lag alle svarar rett. Tabellane viser frekvensen av elevar på dei ulike svara. Ei oversikt over elevsvara på alle oppgåvene er gjeve i vedlegg 7.

4.2.1. Brøk som del av eit heile

Nokre oppgåver i testen tek føre seg brøk som del av ein kontinuerleg heilskap. Desse oppgåvene testar forståing. Her må ein elev kunna sjå samanheng mellom ein illustrasjon for brøk og eit skriftleg symbol. I pilotundersøkinga hadde eg m.a. nokre oppgåver der elevane skulle finna brøkdelen av ei mengde med objekt. Alle greidde å finna brøkdelen av ei mengde og å rekonstruera eit heile når ein del er gjeve. Desse oppgåvene vart difor kutta ut i den endelege testen. Ei misoppfatning som kom fram i piloten og som eg ville undersøkja nærare var at brøk ikkje nødvendigvis betyr deling i like store delar.

Oppgåve 1

I kva figurar er $\frac{1}{4}$ av arealet fargelagt?



Rett svar: b og d	**26**
b	**1**
a og b	3
a, b og c	1
a, b, c, d	1

Denne oppgåva er henta frå rettleiinga til «Kartlegging i rekning for VG1» (Utdanningsdirektoratet, 2012), og testar m.a. om ein elev har forstått at brøk betyr deling i like store delar og om eleven forstår at ulike brøkar kan ha same verdi. 26 elevar svarar rett på denne oppgåva. E5 svarar alternativ b. Han seier fylgjande i intervjuet:

> *Eg har svara at $\frac{1}{4}$ er fargelagt på b, fordi den er delt inn i fire ruter, og ei av dei er fargelagt. I brøk må delane vera like store, difor har eg ikkje svara a og c, fordi desse bitane ikkje er like store. Eg kunne vel eigentleg ha svara at $\frac{1}{4}$ av figuren i d òg er fargelagt, fordi her er $\frac{2}{8}$, og det er jo det same som $\frac{1}{4}$. Eg veit ikkje kvifor eg ikkje valde den.*

Eleven rettar seg sjølv undervegs, han veit at d òg er rett svar. Det same skjer i intervjua med dei andre elevane som har svara alternativ a, b eller c. Dei korrigerer seg sjølv når dei ser på oppgåva på nytt. Det kan vera fleire årsaker til dette. Kan hende gjekk det litt for raskt då elevane svara på denne oppgåva. Då dei tok seg betre tid og sette ord på tankane sine, såg dei at dei hadde svara feil. Ei anna årsak kan vera at då testen vart teke, hadde elevane ikkje fått repetert brøk og brøkrekning. Men lærar som underviser i 1P hadde nettopp repetert brøk med elevane (14 stk.) før dei vart intervjua. Dette kan sjølvsagt verka inn på elevsvara, noko som gjer at dei tydlegare ser feila dei har gjort.

E11 svarar at $\frac{1}{4}$ er fargelagt både på figur a, b, c og d. Han grunngjev det slik:

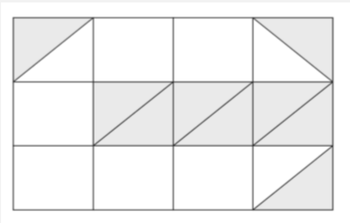
> *På a er det ein sirkel med fire forskjellige rom, og den eine er svart. Då er det ein av fire. Brøkstreken betyr av i dette tilfelle, ikkje ein delt på fire som det gjer i andre tilfelle. På b og c er det akkurat det same som på a, det er delt inn i fire spalter og den eine er svart. På d er det to som er fargelagt, men her har vi åtte delar, og åtte er det dobbelte av fire, og to er det dobbelte av ein. Ein av fire – det dobbelte er to av åtte. So dette er faktisk det same.*

Her ser vi eit døme på misoppfatninga om at brøkdelane ikkje treng ha same storleik. Berre vi har fire delar og den eine er fargelagt, har vi ein firedel. Ein av elevane som vart intervjua i pilotundersøkinga hadde òg denne misoppfatninga, og uttrykte fylgjande: *Eg tenkjer at dei* (delane) *ikkje treng vera like store når vi snakkar om brøk.* Petit et al. (2010) meiner at når ein arealmodell av brøk vert nytta, kan det vera lett for at nokre elevar berre ser på talet på delar og ikkje på storleiken på delane. Ei årsak til ei slik misoppfatning kan vera kvardagsspråket, t.d. utsegn som «eg har den største halvdelen» (McIntosh, 2007).

Oppgåve 11

Du legg grå fliser på eit golv som vist under.

Kva brøkdel av golvet har vorte flislagt?



Rett svar: $\frac{9}{24}$ eller $\frac{3}{8}$	**26**
$\frac{4\frac{1}{2}}{12}$	**3**
$\frac{4}{12}$	1
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{8}{12} + \frac{1}{2}$	1

Denne oppgåva er henta frå Hart et al. (1984). Oppdelinga i illustrasjonen har ulike storleikar, og manglande tryggleik på kva som er eininga kan gjera denne oppgåva vanskeleg (ibid.). Ei slik oppgåve kan løysast ved prosedyre, t.d. å telja talet på delar som er fargelagt og telja alle delane. Men for å svara rett her må ein elev kunna identifisera kva som er eininga, og han må vita at delane må vera like store.

26 elevar svarar $\frac{9}{24}$ eller $\frac{3}{8}$. Dette utgjer 81,3% av elevgruppa. 42,3% av 15-åringane hjå Hart et al. (1981) gav dette svaret. Elevane som svara rett i mi undersøking brukar trekanten som eining. Tre elevar gav $\frac{4\frac{1}{2}}{12}$ som svar. E1 uttrykkjer fylgjande:

> *Eg har svara $\frac{4\frac{1}{2}}{12}$, men det går jo ikkje an å skriva, fordi eg har sett ein brøk inne i brøken. Og det går ikkje an. Eg har i alle fall aldri sett det i nokon av oppgåvene vi har hatt på skulen. So då går eg ut frå at dette ikkje er lov. Men eg var ganske usikker på denne oppgåva.*

Eleven viser liten fleksibilitet i å veksla mellom dei to einingane som er oppgjeve. Han held seg berre til kvadratet som eining, og ser ikkje at han kan dela det opp i mindre delar. Denne måten å tenkja på finn ein òg igjen hjå Hart et al. (1981); her gav 20,5% av elevane dette svaret. Det er ein elev i mi undersøking som svarar $\frac{4}{12}$. Han gjev uttrykk for at han eigentleg vil svara fire og ein halv tolvdelar, men veit ikkje korleis dette skal skrivast, difor vel han å oversjå den siste halve.

Eit interessant svar kjem fram hjå E11:

> *Det er den halve som er problemet. Her har vi to halve. Vi har tre ruter nedover og fire ruter bortover. 3·4=12. Vi har 12 store ruter. Og so er det fargelagt fire og ei halv rute. Men eg trur ikkje vi har lov å skriva det. Difor skreiv eg* $\frac{8}{12}+\frac{1}{2}$*. Åtte små ruter er fargelagt av 12 pluss ei halv rute til.*

Her ser vi eit døme på at eleven ikkje er bevisst på kva som er eininga. Han startar med kvadratet som eining og vil eigentleg skriva $\frac{4\frac{1}{2}}{12}$. Men sidan han er usikker på om det er lov å skriva det, tel han opp trekantane. Eininga på teljaren er dei små trekantane, og eininga på nemnarane er kvadrata. Men han skriv ikkje $\frac{9}{12}$, men $\frac{8}{12}$. Han tek berre med 8 av trekantane slik at dei til saman utgjer 4 kvadrat. Den siste trekanten noterer han som ein halv – eit halvt kvadrat. Eleven strevar med å identifisera eininga, noko som, i følgje Lamon (2005), er grunnleggjande i forståinga av brøk.

4.2.2. Brøk som målestorleik

Testen inneheld oppgåver som undersøkjer om elevane har forståing for ekvivalente brøkar, storleikar på brøkar, brøkar på tallinja, tettleiken i dei rasjonale tala og samanhengen mellom brøk, desimaltal og prosent. Nokre av desse oppgåvene vert presentert og analysert under.

4.2.2.1. Ekvivalens

Å forstå likeverdige brøkar er grunnleggjande for å kunna forstå og rekna med brøk (McIntosh, 2007). Ofte kan elevar ha dugleikar som trengs for å laga ekvivalente brøkar, men dei manglar forståing for kva dei gjer og i kva situasjonar dette kan takast i bruk (Kerslake, 1986). Elevane som deltok i pilotundersøkinga greidde å løysa oppgåvene om ekvivalente brøkar, både å utvida brøkar og forkorta dei. Difor endra eg litt på oppgåvene i det endelege settet for m.a. å sjå om elevane forstod og greidde å finna ekvivalente brøkar når dei ikkje kan nytta ei «rett-fram-prosedyre» som dei fleste er kjend med frå grunnskulen.

Moglege misoppfatningar når det gjeld ekvivalente brøkar, kan vera at elevane ikkje forstår at likeverdige brøkar er uttrykk for same storleik. Å forkorta ein brøk eller utvida han er ulike skrivemåtar for same storleik. Ei anna misoppfatning er at når ein utvidar ein brøk t.d. $\frac{2}{7}$ til $\frac{4}{14}$, so trur ein at ein har multiplisert $\frac{2}{7}$ med to sidan ein har multiplisert både teljar og nemnar med to (McIntosh, 2007).

Oppgåve 4

$$\frac{2}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{10}{\triangle}$$

a, Kva tal skal stå i $\square$? ________

b, Kva tal skal stå i $\triangle$? ________

a, Rett svar i $\square$: 4	**32**
b, Rett svar i $\triangle$: 35	**22**
21 eller 28	2
Andre svar: 3, 20, 25, 31, 100	5
Ikkje svart:	3

Denne oppgåva er henta frå Hart et al. (1984), og testar forståing for ekvivalente brøkar. Alle elevane svarar rett på oppgåve 4a, og har nytta standardprosedyren med å multiplisera teljar og nemnar med to. 4b er vanskelegare, då eleven må oversjå $\frac{\square}{14}$ og sjå på $\frac{2}{7}$ og $\frac{10}{\triangle}$ (ibid.). Ca $\frac{1}{3}$ av elevane får problem her. E1 seier fylgjande: *Men når denne brøken skulle utvidast vidare til 10 eit eller anna, so forstod eg ikkje korleis eg skulle gjera det. Fire går jo ikkje opp i 10. Og då tenkte eg at dette var feil.* Eleven har nett funne ut at $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ ved å ta i bruk ein multiplikasjonsstrategi. Men denne metoden fungerer ikkje for eleven når multiplikasjonsfaktoren ikkje er eit heilt tal. Eleven er kjend med standardprosedyren for å utvida ein brøk, men når han ikkje fungerer, greier han ikkje å sjå kva han då kan gjera. Fleksibiliteten som ligg i å kunna veksla mellom ulike skrivemåtar for same verdi for å finna ein ny brøk, er ikkje til stades. Eit kjenneteikn på Sfard (1991) sitt kondensasjonsnivå er å kunna setja saman ulike prosedyrar og veksla mellom ulike representasjonar (sjå punkt 2.2.3. – omgrepsdanning). Dette ser det ut som eleven strevar med. Ei anna årsak til at det stoppar opp for eleven kan vera synet på likskapsteiknet; at det berre er relevant mellom uttrykka som står på kvar si side av teiknet (Hart et al., 1981).

Nokre av elevane som har svara feil eller ikkje har svart på denne oppgåva, greier å koma fram til rett svar når eg påpeikar at dei nettopp har funne ut at $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$. Då er $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$. Andre gjer det ikkje, som t.d. E5: *Eg har rett og slett ikkje peiling på kva som skal stå her.*

Ein velkjend strategi når ein er usikker på noko er å sjå etter mønster (Utdanningsdirektoratet, 2013a). To elevar ser her eit mønster ved at dei anten dobla nemnarane for kvar ny brøk og får svaret 28 eller at dei ser 7-gongen i nemnaren, som t.d. fylgjande elev har gjort:

E8: *Eg tenkte 7-gongen; 7-14-21. Her såg eg eit mønster.*
L: Kva då med teljarane?
E8: *Det vert eit mønster her òg: 2-4-10, men eg kan ikkje forklara det. Det berre vart slik.*

Her ser vi døme på at ein brøk vert sett på som to heile tal som kan handsamast kvar for seg. Eleven ser ikkje på brøken som ein einskap, men som ei rekkje med teljarar og ei rekkje med nemnarar. Denne feilen finn ein òg hjå Hart et al. (1981). 16% som deltok i den undersøkinga gav svaret 21 eller 28, mot ca. 6% i mi undersøking.

Oppgåve 17

Kan du fullføra dette og forklara kva du har gjort?

$\frac{9}{12} = \frac{12}{\boxed{}}$

Rett svar: 16	**16**
9	4
15	4
Ikkje svart:	8

Denne oppgåva testar òg forståing for ekvivalente brøkar og er henta frå Kerslake (1986). Halvparten av elevane i mi undersøking svarar rett her; seks færre enn på oppgåve 4. Ei årsak til dette kan vera at elevane i denne oppgåva må kunna veksla mellom ulike skrivemåtar for same verdi, som t.d. å forkorta brøken til $\frac{3}{4}$, for deretter å utvida han til $\frac{12}{16}$. Dette vart gjort av dei fleste som svara rett på denne oppgåva. Ein elev har utvida $\frac{9}{12}$ ved å multiplisera med $\frac{12}{12}$, for so å dela teljar og nemnar på ni. Desse elevane greier å setja saman fleire prosedyrar og veksla mellom ulike representasjonar av same tal, noko som kjenneteiknar Sfard sitt kondensasjonsnivå. Tre elevar utvidar brøken direkte ved å multiplisera teljar og nemnar med $1\frac{1}{3}$.

Fire elevar meiner $\frac{9}{12} = \frac{12}{15}$. Ein av dei forklarar fylgjande:

E4: *9+3=12 og då må 12+3=15. Eg plussa med det same talet.*
L: So dersom eg skriv $\frac{1}{2} = \frac{2}{?}$, kva må stå i nemnaren her?
E4: *Det vert jo* $\frac{2}{4}$.
L: Men her har du jo gått frå ein til to og frå to til fire…
E4: *Ja, men dette ser meir logisk ut.* $\frac{1}{2}$ *er mykje enklare å finna ut av enn andre brøkar. Eg greier å sjå for meg korleis* $\frac{1}{2}$ *ser ut. Men det gjer eg ikkje med* $\frac{9}{12}$. $\frac{9}{12}$ *seier meg ingen ting.*

Her ser ein tydeleg at når eleven ikkje forstår, prøver han å finna eit mønster. Han er velkjend med $\frac{1}{2}$, han har truleg sopass mange erfaringar med dette talet at han har fått danna seg eit indre bilete av brøken – jamfør det ikoniske og symbolske systemet i Bruner sin teori (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning). Men eleven har ikkje noko visuelt minne av $\frac{9}{12}$. Og når han ikkje har det, og ikkje forstår, byrjar han å sjå på skilnaden mellom teljar og nemnar. Differansen mellom 12 og 9 er 3, då må vi ha same differanse på den nye brøken. Nemnaren vert difor addert med tre, og vi får 15. Ein elev skriv at desse tala høyrer til i 3-gongen. Det neste talet må difor vera 15. Dette er igjen døme på at elevar ikkje ser på brøk som ein einskap, men som to uavhengige tal som kan handsamast kvar for seg.

Det er òg fire elevar som skriv at $\frac{9}{12} = \frac{12}{9}$. På spørsmål om kor vidt elevane tenkjer at desse to brøkane har same verdi, svarar E2: *Nei, desse brøkane er vel ikkje heilt like. Kanskje ikkje i det heile teke. Men det var den einaste regelen eg kom på at eg kunne bruka.* Eleven greier ikkje å utvida brøken når multiplikasjonsfaktoren ikkje er eit heilt tal. Den innlærte prosedyren fungerer ikkje. Og når denne metoden ikkje fungerer, byrjar eleven å leita etter andre reglar som kan nyttast. Det einaste han kan koma på er å snu brøken. Dette kan minna om ein liten del av divisjonsalgoritmen. Det kjem tydeleg fram at brøkforståinga handlar om ulike reglar som skal hugsast utan at dei nødvendigvis er knytt til ein kognitiv struktur. Eleven viser manglande forståing for kva ein brøk er, då han er usikker på kor vidt desse to brøkane er like. Det er først etter at han har fått spørsmål om kor vidt brøkane er større eller mindre enn ein, at han ser at dei ikkje kan vera like, sidan den første brøken er mindre enn ein og den andre brøken er større enn ein.

Å kunna laga ekvivalente brøkar treng ikkje bety at du forstår kva det er (McIntosh, 2007). I intervjua kjem det fram at fleire elevar er usikre her. Ikkje alle har forstått at to likeverdige brøkar er uttrykk for same storleik. På spørsmål om kor vidt $\frac{1}{5}$ og $\frac{4}{20}$ har same verdi, svarar E4 fylgjande: *Sjølvsagt er dei to ulike tal.* Her kan det sjå ut som at eleven manglar erfaringar med brøk, noko som gjer at han ikkje greier å sjå at ein her snakkar om same mengde. Å forstå likeverdige brøkar er, i følgje McIntosh (2007, s.29), både ein føresetnad for å rekna med brøk og ein sentral del av talforståinga.

Ein annan observasjon som går igjen i fleire intervju er at elevane gjev uttrykk for at t.d. $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{10}$ har same verdi, samstundes som dei seier at dei har multiplisert $\frac{2}{5}$ med to sidan teljar og nemnar har vorte multiplisert med to. Dette er ei misoppfatning som er vanleg hjå elevar (ibid.). Fylgjande interessante samtale fann stad med ein elev etter at han hadde presisert at $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{10}$ har same verdi:

E5: *Eg tenkjer vel eigentleg at* $\frac{4}{10}$ *er dobbelt så stort som* $\frac{2}{5}$. *Eg skriv det slik:* $\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2}$ *og det vert* $\frac{4}{10}$.
Eg har gonga med to i teljar og nemnar.
L: Kva tal er det eigentleg du har gonga med då?
E5: *To. Eg har gonga med to.*
L: Kva gjer du når du skal multiplisera $\frac{2}{5}$ med to?
E5: *Då må eg skriva* $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{1}$. *Dette vert* $\frac{4}{5}$. $\frac{4}{5}$ *er dobbelt so mykje som* $\frac{2}{5}$.
L: Ja, det er rett, men meiner du at både $\frac{4}{5}$ og $\frac{4}{10}$ er det dobbelte av $\frac{2}{5}$?
E5: *Ja, det er slik eg tenkjer.*
L: I stad sa du at $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{10}$ har same verdi. Kan to brøkar ha same verdi, samstundes som den eine er dobbelt so stor som den andre?
E5: *Ja.*

Denne eleven har dugleikar som trengs for å laga ekvivalente brøkar, men manglar forståing for å kunna bruka denne kunnskapen. Han gjev uttrykk for at $\frac{2}{5}$ er lik $\frac{4}{10}$, samstundes som han meiner at $\frac{4}{10}$ er dobbelt so stor som $\frac{2}{5}$. Han kjenner ikkje igjen multiplikasjonsidentiteten; i dette tilfellet $\frac{2}{2}$. Algoritmen eleven brukar er at han multipliserer teljar og nemnar med to, men han forstår ikkje kva han eigentleg gjer. Difor trur han at heile brøken har vorte multiplisert med to. Denne misoppfatninga finn ein igjen hjå Kerslake (1986). Her svarte 13 av 59 elevar i alderen 12-14 år at $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, samstundes som dei meinte at $\frac{8}{12}$ var fire gongar so stor som $\frac{2}{3}$.

Det er òg interessant å leggja merke til at fleire elevar har ei oppfatning av at nokre storleikar ikkje er like, men kan verta like. E2 seier fylgjande: *Sjølv om det ikkje er ein firedel, so kan det bli det.* Frå pilotundersøkinga kjem fylgjande frå ein av elevane: *I og med at* $\frac{2}{8}$ *òg kan verta* $\frac{1}{4}$. *Men det er ikkje* $\frac{1}{4}$ *fordi det er* $\frac{2}{8}$. Eleven viser her at han har ei dynamisk oppfatning av talomgrepet. To tal er ikkje like, men dei kan verta det. Ei årsak til dette kan vera at mange elevar tolkar = som vert; det er eit signal om at ein rekneoperasjon skal utførast (Utdanningsdirektoratet, 2013a). Men likskapsteiknet må forståast som er lik/ er/ er det same som.

4.2.2.2. Samanlikning av brøkar

Desse oppgåvene skal testa om eleven forstår storleiken på ein brøk. Å kunna samanlikna to brøkar og vurdera kven av dei som er størst, kan i følgje Hallett et al. (2010) vera ei oppgåve som testar omgrepsforståing. Men ein må vera merksam på at for elevar som nyttar algoritmar, som t.d. å utvida brøkane slik at dei får same nemnar, kan dette dreia seg om prosedyreforståing.

Misoppfatningar som kan koma til syne i desse oppgåvene, kan t.d. vera «ein stor nemnar gjev ein stor brøk», «dess større summen av teljar og nemnar er, dess større er brøken» (McIntosh, 2007), «to brøkar er av lik verdi dersom differansen mellom nemnar og teljar i kvar brøk er lik», «ein liten nemnar gjev ein stor brøk» (Pearn & Stephens, 2004).

Oppgåve 2

Set ein ring rundt den største brøken i kvart par.

(a) $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{11}$ (b) $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{6}$ (c) $\frac{89}{90}$ $\frac{90}{91}$

	Rett svar :
(a) $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{11}$	31
(b) $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{6}$	30
(c) $\frac{89}{90}$ $\frac{90}{91}$	9

31 elevar har svara rett på oppgåve 2a. Fem av elevane som vart intervjua, utvida $\frac{1}{5}$ til $\frac{2}{10}$ og samanlikna denne brøken med $\frac{2}{11}$. Dei nyttar seg her av strategien om at når to brøkar har like teljarar, so er det den brøken med lågast nemnar som har størst verdi (McIntosh, 2007).

E7 kjem fram til rett svar ved hjelp av illustrasjon.

> *Eg ser alltid for meg brøk som figurar, som for eksempel slik* (teiknar opp eit rektangel, deler det inn i fem delar og fargelegg ein av delane). *So då prøvde eg å tenkja kor stor del den er. Den er større enn om vi hadde delt opp denne firkanten i 11 bitar og tatt to av dei. Men dette går jo ikkje heilt opp på teikninga mi. Deler eg kvar femdel inn i to, får eg 10 bitar. Då hadde eg måtta lagt til ein del til for å få 11 bitar. Sidan området til* $\frac{1}{5}$ *er like stort som området til* $\frac{2}{10}$*, og vi har ein ekstra bit, so må* $\frac{1}{5}$ *vera større enn* $\frac{2}{11}$*.*

Eleven omset her ein brøk frå eit skriftleg symbol til ein illustrasjon, noko som kan vera til hjelp når oppgåver skal løysast (Kerslake, 1986). Brøken vert konkretisert med ei teikning, og eleven viser gjennom denne arealmodellen at han ser på brøk som ein del av eit kontinuerleg heile. Han har ei indre førestelling om kva ein brøk er, og tek i bruk og vekslar mellom ulike representasjonsformer; det «ikoniske systemet» og det «symbolske systemet» (sjå punkt 2.2.3. – omgrepsdanning). Ei kopling mellom indre førestellingar og matematiske symbol vil, i følgje Imsen (2005), kunna gjera ein elev i stand til å forstå dei formelle og abstrakte eigenskapane ved eit omgrep.

I intervjua oppdaga eg at sjølv om elevane hadde svara rett på denne oppgåva, var det ikkje nødvendigvis på grunn av at dei hadde tenkt rett. Fleire elevar tenkjer at den brøken som har den minste nemnaren, har den største verdien. Teljaren har mindre å seia. Eit døme på dette er fylgjande:

> E8: *11 er eit mykje høgare tal enn fem, so difor tenkjer eg at* $\frac{1}{5}$ *er størst fordi den har meir verdi enn det* $\frac{2}{11}$ *har.* $\frac{1}{5}$ *har dei største bitane. Ein liten nemnar har stor verdi, og ein stor nemnar har liten verdi.*
> L: Men kva med teljarane då, har dei noko å seia?
> E8: *Ikkje so mykje eigentleg. Eg tenkjer mest på nemnarane når eg ser på brøk.*

Eleven veit at nemnaren viser kor mange delar den heile er delt inn i, og at dess større nemnaren er, dess mindre er kvar brøkdel. Dette er to viktig moment i å forstå storleiken til ein brøk (McIntosh, 2007). Men eleven er mindre bevisst på teljaren si rolle i brøken – at han seier noko om kor mange delar som er med. Det kan sjå ut som eleven ser på teljar og nemnar som to uavhengige tal i staden for eit tal. Dette kan føra til ulike misoppfatningar (Lindegren et al., 2012), i dette tilfelle «ein liten nemnar gjev ein stor brøk». Eleven nyttar her ein strategi der han samanliknar storleiken på brøkdelen med den heile, ein framgangsmåte som òg kom fram hjå Pearn & Stephens (2004).

E11 avgjorde kva brøk som var størst ved å sjå på differansen mellom nemnar og teljar: $\frac{1}{5}$ *er den minste brøken fordi det er kortare veg frå ein til fem enn frå to til 11.* Her viser eleven manglande forståing for kva ein brøk er; tydinga av teljar og nemnar og forholdet mellom dei. Å sjå på skilnaden mellom teljar og nemnar når ein skal samanlikna to brøkar, er ei form for heiltalstenking; teljar og nemnar vert sett på som to uavhengige tal (Clarke & Roche, 2009). Denne misoppfatninga kjem òg fram hjå Nilsen (2008). Den er ikkje nemnt eksplisitt hjå McIntosh (2007), men han skriv at det å sjå på summen av teljar og nemnar når ein skal avgjera storleiken på ein brøk, kan vera eit resultat av ein regel eleven sjølv har laga, og som han synest gjev meining.

30 elevar svara rett på oppgåve 2b. Dei fleste elevane som vart intervjua gjorde brøkane om til blanda tal, for so å samanlikna dei, som t.d. E1:

> *Her tenkte eg at når det er fire i nemnaren på den første brøken, so har han større bitar enn på den andre brøken som har seks i nemnaren. Begge brøkane her er jo ein heil. Ein heil og ein firedel, og ein heil og ein sjettedel. Og* $\frac{1}{4}$ *er større enn* $\frac{1}{6}$*. Difor er* $\frac{5}{4}$ *størst.*

Eleven ser her at begge brøkane består av ein heil pluss ein brøkdel til. Difor er det nok å samanlikna brøkdelane. Å bruka denne strategien krev eit godt utvikla brøkomgrep (Utdanningsdirektoratet, 2012). I etterpåklokskapens lys ser eg at eg i intervjua òg burde bedt elevane samanlikna t.d. $\frac{5}{4}$ og $\frac{9}{7}$ for å sjå om misoppfatninga «ein liten nemnar gjev ein stor brøk» kjem fram her. Denne eventuelle misoppfatninga vil ikkje koma til syne slik oppgåve 2b er utforma, då restbrøkane her er to stambrøkar.

To elevar uttrykte desse to brøkane med same nemnar for å finna ut kven av dei som var størst. E6 seier fylgjande: *På b tenkte eg at eg måtte gonga det opp slik at eg fekk like nemnarar, at dei vert 12. Eg gonga* $\frac{7}{6}$ *med to og* $\frac{5}{4}$ *med tre. Då får vi* $\frac{15}{12}$ *og* $\frac{14}{12}$*. Og* $\frac{15}{12}$ *er størst.* Eleven nyttar her ei prosedyre som er mykje brukt i tradisjonell undervisning når brøk skal samanliknast, og som alltid fungerer (McIntosh, 2007); han utvidar brøkane. Ein kan her leggja merke til at eleven gjev uttrykk for at han har multiplisert brøken med to. Denne måten å uttrykkja seg på finn ein igjen hjå fleire elevar. Dette kan vera ei taleform, ei forkorting av «vi multipliserer teljar og nemnar med to». Men det kan òg vera at elevane ikkje forstår kva dei gjer; at brøken vert multiplisert med $\frac{2}{2}$, altså ein. Difor har brøkane lik verdi.

Fleire gongar i intervjua gjev elevane uttrykk for at dei føretrekkjer å jobba med desimaltal, då det er lettare, meir logisk og gjev meir meining. Difor prøver dei å gjera brøkane om til desimaltal for so å samanlikna dei, som t.d. E8: *Eg synest det er lettare å nytta desimaltal. Det er meir logisk.* Å gjera brøkane om til desimaltal er òg ein velkjend strategi når brøk skal samanliknast (Utdanningsdirektoratet, 2012). Nilsen (2008) meiner hovudårsaka til dette er at elevar er vant med å gjera brøk om til desimaltal ved hjelp av kalkulator. Eit ynskje om å styra unna brøk kom òg fram i undersøkinga hjå Hart et al., (1984).

Ein elev hadde svara at $\frac{7}{6}$ var den største brøken. Då han skulle forklara korleis han tenkte, sa han fylgjande:

> E11: *På b var eg svært usikker, men når eg tenkjer meg om no, so trur eg at begge er like store fordi at her har vi fem av fire, altså ein del ekstra på ein heil. Det vert ein komma ein til. Vi har ei heil kake og eit stykke til. Det same har vi på sju av seks. Vi har ein heil her og ein bit til. So desse to brøkane må vera like store.*
> L: No teiknar eg opp kakene. Her har vi $\frac{5}{4}$ – ein heil og ein firedel – og der har vi $\frac{7}{6}$ – ein heil og ein seksdel. Tenkjer du at desse to er like store?
> E11: *Ja. Dei er like. Dei er ikkje like i korleis dei er delt opp. Men det er ein heil og ein liten del til.*

Her viser eleven at han ikkje har forstått at storleiken på delane i ein brøk har noko å seia. Vi har ei heil kake og ein bit til. At desse to bitane har ulik storleik spelar inga rolle. Eleven unngår å namnsetja desse brøkdelane, han føretrekkjer å gje svaret som ein restbit, noko som kan tyda på manglande forståing for brøk (Hart et al., 1984).

Ånestad et al. (2014) har undersøkt forkunnskapar i brøk hjå lærarstudentar ved HiOA, og oppgåve 2c er henta frå den undersøkinga. Der svara 44% av studentane rett på denne oppgåva. Ni elevar svara rett i mi undersøking. Det svarar til ca.28% av respondentane. Eg har ikkje grunnlag for å seia noko om årsak til denne skilnaden, men som nemnt tidlegare – prosenttalet på elevgruppa mi må tolkast med varsemd, grunna få respondentar. Dessutan er VG1-elevar minimum tre år yngre enn studentane.

Korleis dei ni elevane som svara rett på oppgåve 9c har tenkt er uvisst, då alle elevane som vart intervjua hadde svara feil på denne oppgåva. Å samanlikna $\frac{89}{90}$ og $\frac{90}{91}$ er vanskeleg for elevar som nyttar seg av strategien om å setja brøkane på samnemnar. Ein meir egna strategi kan vera å samanlikna restbrøkane; brøkane som manglar for å få ein heil. $\frac{1}{90}$ er større enn $\frac{1}{91}$, difor må $\frac{90}{91}$ vera størst. Det kan henda nokre elevar har nytta seg av denne strategien, også kalla residual tenking (Clarke & Roche, 2009). Men ein må òg ta høgde for at elevane kan ha tippa rett svar, eller at dei tenkjer feil og trur at $\frac{90}{91}$ er størst fordi det er den brøken som inneheld dei største tala (Hart et al., 1981). Men dersom desse elevane trur at ein stor brøk er ein brøk som inneheld store tal, so skulle dei ha svara feil på oppgåve 2a og 2b. Dette er ikkje tilfelle. Alle som svara rett på denne oppgåva svara òg rett på 2a og 2b.

16 elevar har svara at $\frac{89}{90}$ er størst. Igjen er det misoppfatninga om at den brøken som har den minste nemnaren er størst. E10 uttrykkjer seg på fylgjande måte: $\frac{89}{90}$ *er akkurat ikkje ein heil. Det er ein mindre. Og so er* $\frac{90}{91}$ *akkurat ikkje ein heil. Då visste eg ikkje heilt kva eg skulle gjera. Det vert vel kanskje* $\frac{89}{90}$ *som er størst, for den har den minste nemnaren, og då har den størst verdi.* Eleven ser her at brøkane er nesten ein heil, at ein manglar berre ein del på begge to. Men han manglar truleg erfaringar og strategiar for korleis han kan gå vidare. Difor har han laga seg ein regel som han gjentek seinare i intervjuet: *Eg tenkjer at når ein brøk er nesten full, so er det den brøken som inneheld dei største bitane som er nærast ein.*

Då elevane fekk spørsmål om kor vidt bitane som mangla for å få ein heil kunne vera til hjelp i vurderinga av kva brøk som var størst, svara alle at $\frac{1}{90}$ var større enn $\frac{1}{91}$. Men fortsatt var det fleire som meinte at $\frac{89}{90}$ var størst, sjølv om det var den brøken som mangla den største biten for å få ein heil. Eit par elevar kom fram til rett konklusjon, som t.d. E5: *Vi manglar ein bit på begge brøkane. Men biten som er igjen på* $\frac{89}{90}$ *er større enn biten som er igjen på* $\frac{90}{91}$*.* $\frac{1}{90}$ *er større enn* $\frac{1}{91}$*. Og no trur eg faktisk at eg ombestemmer meg, det må vera* $\frac{90}{91}$ *som er størst, fordi den manglar den minste biten.* Gjennom denne samtalen og monologen skjer læring.

Eleven må tenkja gjennom oppgåva på nytt og setja ord på tankane sine. Her ser vi kan henda eit døme på at språk og tenking kan vera med på å utvikla kvarandre (sjå punkt 2.2.2.2. – Den sosiale konstruktivismen). Dette fører til at eleven korrigerer sitt eige skjema og gjer det meir finmaska. Etter eit lite puff frå meg tek han i bruk strategien residual tenking (Clarke & Roche, 2009).

To elevar har svara at brøkane er like store. E8 seier: *Det er jo berre ein igjen til det vert fullt på ein måte. Og då tenkjer eg at dei må vera like.* Her ser vi eit døme på at eleven samanliknar brøkane med ein heil; begge manglar ein brøkdel for å vera ein heil, difor må dei vera like. Dette finn ein òg igjen hjå Pearn & Stephens (2004). Brøk vert ikkje sett på som eitt tal, men som to uavhengige tal. Eleven tek ikkje omsyn til forholdet mellom teljar og nemnar.

Fem elevar har ikkje svara på denne oppgåva. Ei årsak til dette kan vera som E10 sa: *Det var so store tal at eg ikkje greier å tenkja.* E8 uttrykkjer fylgjande seinare i intervjuet: *Eg greier meg fint når vi snakkar om todelar, tredelar, firedelar og femdelar. Men når det kjem over sju, åtte, ni og ti, då gjev det ikkje meining lenger. Eg greier ikkje sjå det for meg, og alt verkar ulogisk.* Her kan det sjå ut som at elevane manglar erfaringar som kan gje ei indre førestelling av korleis ein brøk ser ut. Det «ikoniske systemet» er ikkje på plass (sjå punkt 2.2.3 – Omgrepsdanning). I følgje McIntosh (2007) er bruk av konkretar grunnleggjande i prosessen med å danna indre førestellingar. Dette er viktig når eit solid brøkomgrep skal dannast.

Fylgjande uttalar forsterkar inntrykket av eit mangelfullt brøkomgrep (mi understreking):

> E1: *Begge manglar ein del før dei vert ein heil. Begge to vert på ein måte* $\frac{9}{10}$ *<u>føler</u> eg. Om eg skulle ha korta dei ned.*
> E2: *… det er fortsatt <u>gunstig</u> å ta den som har lågast tal, for då får du meir.*

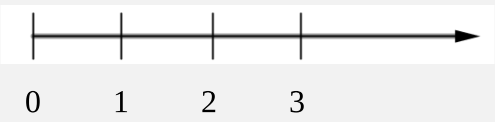
4.2.2.3. Tallinja

Tallinja kan m.a. vera til hjelp for at ein elev betre skal forstå storleiken på ein brøk, ekvivalens, addisjon og subtraksjon av brøkar og tettleiken i dei rasjonale tala (Petit et al., 2010). Nokre av oppgåvene i testen tek føre seg brøk på tallinja. Elevane skal plassera brøkar på tallinja – både der inndelinga på linja er gjeve og der eleven sjølv må skapa denne inndelinga. Tallinja skil seg m.a. frå andre brøkmodellar ved at einingane er representert ved ei lengde eller eit symbol, og einingane er kontinuerlege (ibid.). Moglege misoppfatningar her kan vera at ein elev ikkje kjenner igjen kva som er den heile då ei tallinje ofte inneheld meir enn eit heile, at ein tel kvar strek på tallinja i staden for rommet mellom kvar av markeringane, eller at ein elev ikkje forstår at avstanden mellom kvar strek må vera den same (den proporsjonale tenkinga) (Heron, 2014).

Oppgåve 13

Plasser desse tala på tallinja under:

$4 \quad \frac{3}{4} \quad 1\frac{1}{4} \quad \frac{9}{4}$



Alle tala rett plassert:	**22**
Alle tala rett plassert, bortsett frå $\frac{3}{4}$	4
Alle tala rett plassert, bortsett frå $\frac{9}{4}$	2
Alle tala rett plassert, bortsett frå 4	1
$\frac{3}{4}$ og 4 er rett plassert	1
$1\frac{1}{4}$ og $\frac{9}{4}$ er rett plassert	1
Ingen tal rett plassert	1

Denne oppgåva testar om eleven forstår den relative storleiken på brøkar, og plasseringa deira på tallinja. Å kunna visualisera brøk på ulike måtar, som t.d. brøk på tallinja, er m.a. viktig i utviklinga av ei solid brøkforståing (Utdanningsdirektoratet, 2012). Oppgåva er henta frå Kerslake (1986), og her må elevane ta omsyn til heile tal, ekte brøk, uekte brøk og blanda tal. Desse tala skal eleven plassera på ei tallinje. Dei må sjølv skapa oppdelinga, og dei må vita kva som er eininga.

22 elevar svarar rett på denne oppgåva og plasserer alle tala rett. Fire elevar har plassert alle tala rett bortsett frå $\frac{3}{4}$. Ein elev seier fylgjande:

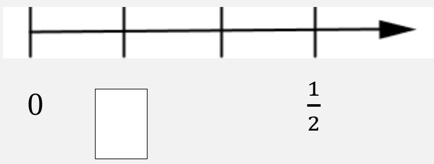
> E4: *Fire er jo her. Då har vi fire heile.* $\frac{3}{4}$ *av fire er på tre.*
> L: Dersom du ikkje skulle ha plassert fire på tallinja, men berre dei andre tre brøkane, kor hadde du då plassert $\frac{3}{4}$?
> *E4*: *Eg hadde fortsatt plassert han på tre. Det er jo plass til fire på tallina, og då må det jo vera her.*
> L: So dersom eg hadde forlenga talinja slik at den vert dobbelt so lang, utan å setja på fleire tal, kor ville du ha plassert $\frac{3}{4}$?
> E4: *Då hadde eg brukt linjal og teke på nye strekar heilt bort til pilen. Og so teke* $\frac{3}{4}$ *av det.*

Her kjem det tydeleg fram at eleven oppfattar heile tallinja som det heile. $\frac{3}{4}$ vert tolka som $\frac{3}{4}$ av heile linja. Dette er ein vanleg feil å gjera når ein har ei tallinje med gjentakande einingar (Petit et al., 2010). Ei årsak til dette kan vera at eleven har erfaringar med brøk som del av eit heile frå før, og overfører denne kunnskapen til tallinja (Heron, 2014). Men eleven går bort frå tolkinga av at ein skal finna brøkdelen av heile linja når tala vert større enn ein, både når ein snakkar om uekte brøk og blanda tal. Her blandar eleven saman det å måla ein brøkdel av ei linje og brøk som punkt på ei linje. Denne måten å tenkja på finn ein òg igjen i Kerslake (1986). Ho meiner at ei årsak til denne forvirringa kan vera at eleven har ein for snever tankemodell for brøk; brøk vert sett på som del av eit heile. Det kan då vera vanskeleg å justera den mentale konstruksjonen slik at han passar med notasjonen brøk som tal.

E10 viser lita forståing for tallinja og har plassert alle tala feil. Han seier fylgjande: *Eg har skrive opp dei ulike tala under 0, 1, 2 og 3. Det ser kanskje litt rart ut. Eg har skrive av alle tala som eg skulle plassera. Eg synest det vert tydlegare.* Det kan verka som om denne type oppgåve der eleven sjølv må skapa oppdelinga på tallinja er ukjent for han, sidan han plasserer brøkane på kvar sin strek utan omsyn til storleiken på tala. Då eleven får spørsmål om kor han vil plassera fire, ser han ikkje på tala, men han byrjar å telja kor mange strekar det er på linja. Difor vil han plassera fire der tre står, sidan det er den fjerde streken. Denne type feil finn ein òg igjen hjå Heron (2014). Her var det ein tendens for å telja strekane i staden for rommet mellom kvar markering.

Oppgåve 22

Skriv det rette talet i boksen under.



Rett svar: $\frac{1}{6}$	**17**
0,1666	**3**
Ca. 0,15	1
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, 0,25 eller 0,3	4
Ikkje svart:	2

Oppgåve 22 testar òg om eleven forstår den relative storleiken på brøkar, og plasseringa deira på tallinja. Oppgåva er henta frå Pantziara & Philippou (2012), og dei meiner at for å lukkast med denne oppgåva må ein greia å forstå brøk som eit objekt lausrive frå ein prosess, med generelle eigenskapar som t.d. ekvivalens, tettleik og relativ storleik på ein brøk – noko som kan kjenneteikna Sfard sitt reifikasjonsnivå. 17 elevar svarar $\frac{1}{6}$. E6 forklarar korleis han tenkte då han kom fram til dette svaret: *Eg tenkte at viss dette er ein halv, so er jo det tre strekar opp til ein halv. Og tre er halvparten av seks. Då må det vera i sjettedelar. Difor skreiv eg* $\frac{1}{6}$. Her går eleven vegen om talet ein for å finna ut kor mange delar den heile har vorte delt inn i. Han brukar kunnskap om ekvivalente brøkar, og veit at $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Denne måten å tenkja på fann ein òg igjen hjå Pantziara & Philippou (2012). Andre elevar tenkjer at ein skal finna $\frac{1}{3}$ av $\frac{1}{2}$. Difor tek dei i bruk divisjonsalgoritmar; dei reknar ut $\frac{1}{2}$: 3 som er $\frac{1}{6}$ eller som tre andre har gjort: dei gjer ein halv om til desimaltal og skriv 0,5:3= 0,1666. Ein elev gjer ein halv om til desimaltal og halverer to gongar. Dette ser han vert for lite, og skriv difor ca. 0,15. Eleven kjem ikkje på at han kan dela ein halv på tre. Denne observasjonen finn vi òg hjå McIntosh, som generaliserer ved å seia at ei tredeling av eit tal er for mange elevar vanskelegare enn å halvera talet (McIntosh, 2007, s.23).

Tre elevar svarar $\frac{1}{8}$. E3 seier fylgjande:

> *Eg veit ikkje heilt om eg hugsar korleis eg tenkte her, men eg trur eg skreiv $\frac{1}{8}$ fordi linja er jo delt inn i fire strekar. Vi har 0 og $\frac{1}{2}$ på strekane på kanten. Difor må vi ha fire strekar til for å få ein heil. Og då får vi åtte strekar mellom null og ein. Då vert den første streken $\frac{1}{8}$.*

Her prøver eleven å gå vegen om ein, men rotar med kor mange inndelingar intervallet er delt inn i. Han tel med streken på null. Denne måten å tenkja på finn ein òg igjen hjå Heron (2014), og ho meiner at å telja strekane i staden for romma mellom strekane på tallinja er ei vanleg misoppfatning.

E7 har ei heilt anna forklaring på kvifor han kom fram til $\frac{1}{8}$: *Men eg trur eg tenkte at streken framfor $\frac{1}{2}$ var $\frac{1}{4}$ og streken framføre den igjen var $\frac{1}{8}$*. Her prøver eleven å halvera ein halv for kvar strek fram mot null, utan omtanke for storleiken på brøkane og avstandane mellom inndelingane. Det kan verka som eleven prøver å leita etter eit mønster som kan passa og som verkar logisk. Det same finn ein igjen hjå dei to elevane som har svara $\frac{1}{4}$. E4 seier fylgjande: *Eg trur eg har tenkt at der er $\frac{1}{2}$, då må streken framføre vera $\frac{1}{3}$ og den framføre den igjen vera $\frac{1}{4}$. For då vert bitane mindre.* Desse elevane viser lita forståing for tallinja, og at einingsbrøken som skal finnast skal kunna brukast gjentekne gongar for å bestemma ein avstand frå eit startpunkt. Heron (2014) meiner at den proporsjonale tenkinga når tallina vert brukt som modell er vanskeleg for mange elevar. Ei rettferdig deling har mange elevar erfaringar med, men dei greier ikkje å overføra det til ein tallinje-modell. Pantziara & Philippou (2012) viser til undersøkingar som konkluderer med at tallinja kan vera vanskeleg for mange elevar.

Det er fleire feilsvar ute og går på oppgåve 22. Korleis alle desse elevane har tenkt er uvisst, då ikkje alle vart intervjua. Ein elev har svara 0,3 og seier fylgjande:

> E5: *Eg har skrive 0,3, men eg synest dette er litt rart, fordi ein todel er det same som 0,5. Og då tenkte eg at sidan her er null, so må det vera 0,5 – 0,4 – 0,3, men då var det ikkje plass til 0,2 og 0,1. Og so fann eg ingenting som kunne passa.*
> L: 0,5 skal delast inn i tre like store delar.
> E5: *Eg ville hatt fleire strekar her nede. Slik at eg fekk 0-0,1-0,2-0,3-0,4-0,5.*

Eleven vel nok ein gong å nytta desimaltal i staden for brøk på denne oppgåva. Det kan verka som at eleven har lita erfaring med tallinja og ulike inndelingar av ho. Han er låst i oppfatninga om at det berre kan førekoma ei type inndeling, nemleg tidelar. Difor prøver han å teikna inn to ekstra strekar slik at det skal passa. At strekane ikkje har same avstand, bryr ikkje eleven seg om. Igjen ser vi eit døme på liten fleksibilitet og forståing for tallinja. Ein annan interessant ting dukka opp i intervju med E11:

> E11: *Eg ser at eg har skrive feil her. Det er 0,20 som skal stå her, fordi at ved den andre streken skal det stå 0,25 og ved $\frac{1}{2}$ skal det stå 0,30.*
> L: Meiner du at $\frac{1}{2}$ er det same som 0,30?
> E11: *Ja, fordi at 60 er jo ein time. Ein halv time er 30 minutt.*

Her blandar eleven inn klokka. Ein halv time er det same som 30 minutt, og dette gjer han om til 0,30. Han er ikkje merksam på at han her blandar saman to talsystem. Han er heller ikkje merksam på at vi må ha same avstand mellom inndelingane på tallinja. Dette er igjen eit døme på lita forståing for tallinja.

4.2.2.4. Tettleik

Oppgåve 21

Kor mange ulike brøkar finst det mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$?

Set ring rundt a, b eller c og fullfør svaret.

(a): Ingen, fordi ___________________________

(b): Ein, fordi ______________________________

(c): Mange, to av dei er ____________________

Rett svar: c med to rette brøkar	**13**
c. Ein brøk; $\frac{1}{2}$	3
c. Inga brøkar	2
a	9
Ikkje svart:	5

Oppgåve 21 er henta frå McIntosh (2007), og testar om eleven har ei god forståing for brøk og forstår at mellom to vilkårlege brøkar fins det uendeleg mange brøkar. Moglege misoppfatningar her kan vera at elevane trur at det ikkje fins brøkar mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$. Elevane overfører kunnskap om dei naturlege tala (som har påfølgjande tal) til brøk (som ikkje har påfølgjande tal). Dette kan skuldast manglande erfaring med likeverdige brøkar (McIntosh, 2007). Nilsen (2008) har m.a. brukt denne oppgåva i si undersøking av talforståing hjå elevar på slutten av 10. klasse, og der svara 7 av 83 elevar rett. Dette utgjer ca. 8,4% av respondentane. I mi undersøking, som var i starten på eit nytt skuleår, svara 13 elevar rett her, altså 40,6% av respondentane. Ei viktig forklaring på denne store forskjellen er at gjennomsnittskarakteren i standpunkt frå 10.klasse var 4,8 i elevgruppa mi, medan han var 3,34 hjå gutane og 3,72 hjå jentene som deltok i hennar undersøking. Denne oppgåva har òg vore brukt i ei svensk undersøking blant 8.klassingar (Reys, Reys, Emanuelsson, Johansson, Maerker, Nilsson & Rosén, 1995b). Der svara 12% av elevane rett, og var i stand til å gje døme på brøkar i dette området.

På svararka til elevane kan eg sjå at dei som greidde å gje døme på to brøkar i det oppgjevne intervallet, har funne fram til dei ved å utvida $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$. Desse elevane veit at ein brøk kan skrivast på mange ulike måtar, og dei tek i bruk denne kunnskapen for å finna brøkar som ligg i dette aktuelle intervallet. Tre elevar svarar at det er mange tal mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$, men greier ikkje å gje døme på brøkar som høyrer til her. Tre andre elevar ser at ein halv ligg i dette intervallet. Kva strategi dei har nytta, er uvisst, då ingen av dei vart intervjua. Ein velkjend strategi er å vurdera ein brøk i forhold til erfaringsreferansar (Reys & Reys, 1995a), i dette tilfelle ein halv. To femdelar er mindre enn ein halv, medan tre femdelar er større enn ein halv. Difor må ein halv liggja i dette intervallet.

Ni elevar svarar alternativ a, i.e. ingen brøkar. Dette utgjer 28% av elevgruppa. I undersøkinga til Nilsen (2008) var det 32 elevar som valde dette svaralternativet, noko som utgjer 38,5% av den elevgruppa. 47% av elevane vel dette alternativet hjå Reys et al., (1995b). Grunngjevinga elevane gjev i mi undersøking for at det ikkje kan liggja brøkar i dette intervallet, er at ein ikkje kan ha desimaltal i brøk.

> *E4: Vi kan ikkje ha desimaltal i brøk.*
> *E7: Det er ingen tal mellom to femdelar og tre femdelar fordi vi ikkje kan ha desimaltal i brøk. Det er iallfall det vi har lært.*

Ingen av desse elevane kjem på at dei kan utvida brøkane for å sjå at det ligg brøkar i dette intervallet. Kerslake (1986) påpeikar at sjølv om ein elev greier å laga ekvivalente brøkar, so betyr ikkje det at han kan bruka denne dugleiken til å løysa andre problem – t.d. å finna brøkar mellom to vilkårlege brøkar. Ei misoppfatning om at det ikkje finst brøkar mellom to vilkårlege brøkar kan, i følgje McIntosh (2007), skuldast manglande erfaringar med likeverdige brøkar.

I samtalar med elevar som hadde gjeve svaralternativ a eller ikkje har svara på denne oppgåva, meinte alle at det er ein brøk mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{5}$, og at det er tre brøkar mellom $\frac{4}{10}$ og $\frac{8}{10}$. Ei misoppfatning som dette er vanleg (Petit et al., 2010). Samstundes meinte dei aller fleste at det er mange tal mellom to vilkårlege desimaltal. Elevane har forstått at det er uendeleg mange tal i eit intervall der endepunkta er oppgjeve som desimaltal, men dette gjeld ikkje når endepunkta er oppgjeve som brøkar. Dei rasjonale tala vert ikkje sett på som eit heilskapleg system; brøk og desimaltal vert handsama ulikt. Dette er eit døme på eit syntetisk omgrep (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning), eit mellomnivå av forståing der tettleiken i dei rasjonale tala gjeld berre for desimaltala, ikkje for brøkane. Elevane har ikkje heilt greidd å reorganisera kunnskapen sin om kva eit tal er. Brøk og desimaltal vert sett på som om dei var ulike slags tal i staden for ulike måtar å skriva same tal på. Dette samsvarar med det som kom fram i undersøkinga til Vamvakoussi & Vosniadou (2010), der forståing av tettleiken i dei rasjonale tala hjå elevar på 7., 9. og 11. trinn vart undersøkt.

E4 gjev uttrykk for at brøkar kan skrivast som desimaltal, og prøver å finna ei forklaring på kvifor det er uendeleg mange tal mellom to desimaltal men ikkje mellom to brøkar.

> *I utgangspunktet vil eg seia at det er berre ein brøk mellom dei. Men kanskje det er fleire tal? Eg veit iallfall ikkje korleis eg skal finna dei. Det er jo litt logisk at det skal finnast fleire tal mellom brøkar, sidan vi kan gjera dei om til desimaltal. Men ikkje alle desimaltal kan skrivast som brøk. Det er vel eigentleg berre ein brøk mellom* $\frac{1}{5}$ *og* $\frac{3}{5}$*. Det er mange tal imellom, men dei kan ikkje skrivast som brøk.*

Ein elev kjem fram til at det kan vera uendeleg mange brøkar i dette intervallet etter at han har tenkt gjennom oppgåva på nytt:

> E1: *Dersom nemnarane skal vera fem so er det berre ein brøk mellom dei. Men dersom nemnaren kan vera ein annan, som t.d.* $\frac{2}{10}$ *her og* $\frac{6}{10}$ *der, so ligg det jo tre brøkar mellom dei. Men so kan du jo dela det opp igjen. At du får 20 nede. Då står det* $\frac{4}{20}$ *og* $\frac{12}{20}$*. Her er har vi sju tal mellom.*
> L: Tenkjer du at $\frac{4}{20}$ har ein annan verdi enn $\frac{2}{10}$ og $\frac{1}{5}$?
> E1: *Nei, det er vel akkurat det same talet.* $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$ *og* $\frac{4}{20}$ *er det same talet. Og so kan vi sikkert dela det opp igjen og igjen og igjen. So då er det sikkert mange tal. No tenkjer eg vel at det må vera mange tal mellom* $\frac{2}{5}$ *og* $\frac{3}{5}$ *fordi vi kan utvida brøkane slik. Ja, eg trur det er mange tal.*

Her ser vi igjen eit døme på at læring skjer i løpet av samtalen. Eleven set ord på tankane sine då han går gjennom oppgåva på nytt. Dette fører til at han korrigerer sitt eige mentale skjema om brøk og gjer det meir finmaska.

E11 avslører at han ikkje har forstått tettleiken i desimaltala heller.

> L: Om eg no skriv 0,1 og 0,2, er det nokre tal mellom her?
> E11: *Ja. Det kan jo vera 0,15. og 0,16. Her er det vel mange tal mellom.*
> L: Kva då med 0,23 og 0,24?
> E11: *Nei, her er det ingen tal. Eller 0,230? Nei, det er jo over 0,24. Nei, her har vi ingen tal mellom.*
> L: Men du har tal mellom 0,1 og 0,2?
> E11: *Ja, for der kan det fortsatt stå ting bak.*
> L: Kan det ikkje stå tal bak 0,23?
> E11: *Det kan du sikkert, men då er du jo opp i hundre, t.d. 0,231, og det er større enn 0,24*.

Det kan sjå ut som at denne eleven manglar erfaringar med desimaltal òg. So lenge vi har ein desimal i tala, ser han at det kan vera mange tal i intervallet, men dette gjeld ikkje når ein får to desimalar i tala. Dessutan viser eleven her at han ser på talet bak komma som eit heilt tal. Det lengste talet er størst – 0,231 er større enn 0,24. Denne misoppfatninga er vanleg (Utdanningsdirektoratet, 2013b).

4.2.2.5. Brøk/ desimaltal/ prosent

Nokre av oppgåvene i testen tek føre seg samanhengen mellom brøk, desimaltal og prosent. McIntosh (2007, s.33) poengterer at det er viktig å sjå på desse representasjonane som forholdstal, der eininga er ein for brøk og desimaltal, medan ho er 100 for prosent. Å sjå samanheng mellom brøk og divisjon samt å kunna multiplisera ein brøk med eit heilt tal, er viktig for å forstå omgjering mellom brøk og desimaltal/prosent (ibid.). Ei oppgåve vert omtala her.

Oppgåve 8

Set ring rundt dei påstandar som er sanne om talet $\frac{2}{5}$.

(a): Det er større enn $\frac{1}{2}$ (b): Det er det same som 2,5

(c): Det er lik 0,4 (d): Det er større enn $\frac{1}{3}$

Rett svar: c og d	**18**
c	**9**
d	**3**
b og d	1
b	1

Oppgåve 8 testar ein elev si forståing for brøk, desimaltal og tilhøvet mellom dei. Eit tal kan uttrykkjast på ulike måtar, og eleven må her kunna veksla mellom ulike representasjonsformer. Oppgåva er henta frå McIntosh (2007), og moglege misoppfatningar her kan vera forvirring i omgjeringa mellom brøkar og desimaltal; at brøkstreken vert oppfatta som eit komma som t.d. $\frac{2}{5}$ = 2,5. 18 elevar svarar korrekt at $\frac{2}{5}$ er lik 0,4 og at det er større enn $\frac{1}{3}$. Ni elevar har valt svaralternativ c og tre elevar har valt alternativ d. Dette kan tyda på at dei fleste elevane ser samanhengen mellom brøk og desimaltal. Denne oppgåva har òg vorte brukt i ei svensk undersøking blant 8.klasse-elevar (Reys et al, 1995b). Her valde 23% av respondentane svaralternativ c og d, 36% svaralternativ c og 11% svaralternativ d.

To elevar i min klasse svarar m.a. at $\frac{2}{5}$ er det same som 2,5. E11 seier: *Eg tippa her fordi eg var usikker*. Kanskje tippa denne eleven på 2,5 sidan det inneheld dei same sifra som i brøken. E6 seier: *Eg tenkte i prosent eigentleg. I alle fall på 2,5 fordi* $\frac{2}{5}$ *er 2,5% trur eg. Men no vart eg litt usikker.* $\frac{2}{5}$ *er 25%. Nei, det er det ikkje. Eg veit faktisk ikkje*. Eleven prøver å gjera om brøken til prosent, utan å lukkast. Han er usikker, og prøver seg på prosenttal som inneheld dei same sifra som i brøken. I følgje McIntoch (2007) er tolkingsfeil av einskilde prosentar ei vanleg misoppfatning når ein har med omgjering av brøk, desimaltal og prosent å gjera.

4.2.3. Brøk som forhold

Nokre av oppgåvene i testen tek føre seg brøk som forhold. Dei kan gje informasjon om ein elev m.a. forstår kva det vil seia at det er ein relasjon mellom to mengder; at to storleikar i eit forhold kan endra seg i lag utan at forholdet mellom dei vert endra (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Oppgåve 20

Maria og Karl lagar sjokolademjølk. Maria tek 3 skeier med kakao i 2 dl mjølk. Karl tek 4 skeier kakao i 3 dl mjølk. Kva sjokolademjølk er sterkast? Set ring rundt svaret ditt.

(a) Karl si

(b) Maria si

(c) Begge er like

(d) Det går ikkje an å rekna det ut

Rett svar: b	**20**
c	9
a	2
d	1

Denne oppgåva er henta frå McIntosh (2007) og testar om ein elev kan bruka forholdstal i praktiske situasjonar og at han kan samanlikna to forhold. Eleven må her kunna setja opp forholda mellom kakao og mjølk i blandingane, og han må kunna avgjera kva sjokolademjølk som er sterkast. Brekke & Tinnes (2001) påpeikar at oppgåver av denne type kan vera vanskelegare for elevane enn oppgåver der ein skal samanlikna rater, då det i sistnemnde oppgåvetype kan vera lettare å halda frå kvarandre det som skal samanliknast. Moglege problem her kan vera at eleven nyttar seg av additiv tenking i staden for multiplikativ tenking. Multiplikative forhold der brøk er involvert kan vera vanskeleg for elevar (McIntosh, 2007).

20 elevar i mi undersøking svarar rett på denne oppgåva. Dette utgjer 62,5%. Hjå Nilsen (2008) svarar 35 av 81 rett på denne oppgåva. Det er 43,2% av elevane hennar. Brekke & Tinnes (2001) har ei liknande oppgåve der elevane skal avgjera kva saftblanding som er søtast. Her svarar 42% av grunnkurselevane rett.

Ni elevar i mi undersøking gjev svaralternativ c og meiner at blandingane er like sterke. Tre av dei svarar fylgjande:

> E1: *Eg tenkte vel at det var ei skei meir enn desiliter i begge blandingane. Det er ein i forskjell på begge to, og då er dei like.*
> E2: *Eg synest det er logisk at dei er like. Dei har begge ei meir skei enn desiliter i koppen. So forholdet er likt.*
> E8: *Eg tenkte at sidan ho tok tre skeier på to dl mjølk og fire skeier på tre dl mjølk, so tenkte eg at dei var like. Vi får to like store brøkar. Her er ein i forskjell på begge to.*

Her er det den additive tenkinga som kjem fram. Det er ei skei meir enn talet på desiliter, difor må dei vera like. Ei slik ukorrekt additiv tenking samsvarar med det ein finn hjå Brekke & Tinnes (2001). Der var det 29% av grunnkurselevane som meinte at saftblandinga som hadde minst forskjell mellom sukker og sitron var søtast. E8 presiserer at vi får to like store brøkar, og det kan kanskje vera misoppfatninga om at to brøkar er like berre forskjellen mellom teljar og nemnar er lik som ligg bak her. I etterpåklokskapens lys burde eg ha bedt eleven skriva opp desse to brøkane for å sjå om det var slik han tenkte.

E6 gjev uttrykk for at dersom du held på slik i lengda, so vert blandinga tynnare:

> *Eg tenkte at det skulle vera ei skei meir enn talet på desiliter, og det er det på begge to. Difor er dei like. Fem dl med seks skeier, seks dl med sju skeier og so vidare. Men eg ser jo at viss du held på slik i lengda, so vert det vel litt for lite skeier oppi. Blandinga vert tynnare.*

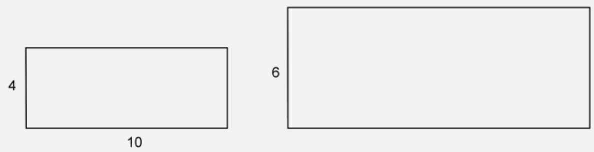
Denne eleven ser at i lengda so kan denne måten å tenkja på ikkje vera rett. Men det er først etter at eg ber eleven samanlikna 1 dl mjølk med 2 skeier kakao og 2 dl med 3 skeier kakao, at han greier å sjå korleis blandingsforholda må vera om dei skal vera like sterke. Han konkluderer so raskt at Maria si blanding må vera sterkast. Når E10 går gjennom oppgåva på nytt, endrar han òg på forklaringa si:

Når eg tenkjer meg litt om, so er det kanskje meir openbert at Maria si er sterkare, fordi at du tok berre ei skei meir når det er ein heil desiliter meir. Dersom blandingane skulle vore like, måtte du vel tatt $\frac{1}{2}$ skei til kanskje? Då hadde det vorte likt. $1\frac{1}{2}$ skei til ein desiliter, tre skeier til to dl og $1\frac{1}{2}$ skei til i tre desiliter. Då hadde det vorte likt.

Her ser vi igjen eit døme på at når ein elev tek seg tid til å setja ord på tankane sine, korrigerer han seg sjølv.

Oppgåve 26

Eit databilete er 4 cm høgt og 10 cm breitt. Lise kopierer og forstørrar dette bilete i prosjektoppgåva si. I prosjektoppgåva er biletet 6 cm høgt. Kor breitt er det?



Rett svar: 15	22
12	7
12,5 eller 14	2
Ikkje svart:	1

Forklar eller vis ved rekning korleis du har tenkt.

Denne oppgåva er henta frå Brekke & Tinnes (2001), og testar om eleven har ei forståing av formlike storleikar og kan forstørra ein figur. Her er både funksjonsoperatoren og skalarfaktoren større enn ein (sjå punkt 2.1.2.2. – Brøk som forhold). Moglege misoppfatningar her kan vera at eleven brukar differansen mellom høgdene og legg den til den oppgjevne bredda.

22 elevar svarar rett på denne oppgåva og nyttar multiplikativ tenking. Dette utgjer 69% av respondentane. 44% av grunnkurselevane svarar rett hjå Brekke & Tinnes (2001). Ulike strategiar har vorte nytta i mi undersøking. Nokre elevar set opp eit forhold, som t.d. E9: *Vi har fått oppgjeve alle sidene på det vesle biletet, og på det store har vi ei side. Sida du skal finna må du dela på den tilsvarande sida. Og då får vi $\frac{x}{10} = \frac{6}{4}$. For å få x-en for seg sjølv, so tok eg $\frac{6}{4} \cdot 10$. Då vart det 15.* Eleven viser her at han har ei oppskrift på å løysa slike oppgåver. Då han skal forklara korleis han tenkjer, skildrar han algoritmen for korleis han har løyst oppgåva. Her ser vi eit døme på prosedyreforståing.

Då E5 skal forklara korleis han tenkjer, seier han fylgjande: *Dette er to formlike bilete. Forholdet mellom dei to korte sidene er 6:4 som er 1,5. Då må det vera det same forholdet mellom dei to lengste sidene, altså 1,5. 10·1,5=15*. Eleven finn først skalarfaktoren, og brukar dette til å finna den ukjende sida. Her viser eleven forståing for kva han gjer. Han veit at vi har to formlike bileter. Sjølv om storleiken på bilete vert endra, må forholdet mellom sidene vera det same. Å forstørra opp eit bilete er knytt til multiplikasjon. Ei additiv tenking her ville ført til at biletet hadde endra form (Brekke & Tinnes, 2001).

Andre strategiar som er nytta er t.d. at tala vert skalert ned før dei vert skalert opp igjen, som t.d. E3: *Ja, eg gjekk ned på tala, for so å gå opp igjen. Eg tok halvparten av fire og so såg eg kor mange gongar det gjekk opp i seks. 4:2=2 og 2·3=6. Då måtte eg gjera det same med lengda på biletet. 10:2=5. Og 5·3=15*. Ein elev skriv fylgjande på svararket sitt: *4 er* $\frac{2}{3}$ *av 6. 10 er* $\frac{2}{3}$ *av 15.* Ein annan elev skriv fylgjande på sitt svarark: *Lengda på den vesle figuren er bredde + bredde +* $\frac{1}{2}$ *bredde. På den store figuren får vi: 6 +6 +* $\frac{1}{2}\cdot$ *6.* Eleven har her funne funksjonsoperatoren (2,5) utan at dette vert nemnt. I tillegg viser han at han ser på multiplikasjon som gjenteken addisjon.

Det mest vanlege feilsvaret i mi undersøking er 12. Sju elevar har svara dette, og dei har her nytta seg av additiv tenking. E2 seier fylgjande:

> *Eg tenkjer at her har du fire. So har du plussa på eller forstørra det til seks og då er det to imellom. Og so tenkte eg at 10 måtte forstørrast med det same, dei er formlike på ein måte. Då må ein plussa på og ha den same forskjellen. Det vert rart viss dei skulle hatt ulike lengder. At liksom den eine skulle forlengast med to og den andre skulle forlengast med åtte. Det går ikkje an. Difor må lengda vera 12.*

Eleven ser på differansen mellom høgdene. Når høgda aukar med to, so må lengda òg aukast med to. Andre elevar med tilsvarande tenking ser på differansen mellom sidene på det vesle biletet. Den er seks. Då må det vera same differanse mellom dei to sidene på det store biletet òg. I Brekke & Tinnes (2001) si undersøking var 12 òg det vanlegaste feilsvaret (28%). Dei påpeikar at elevar som gjer denne type feil manglar erfaringar med at figuren vil endra form når ein adderer eit fast tal til sidene i ein figur. Når ein figur skal skalerast opp eller ned, er dette knytt til multiplikasjon og divisjon.

Ein elev har gjeve svaret 12,5. Han har funne funksjonsoperatoren og addert han til lengda i det vesle biletet. Dette finn ein òg igjen hjå Brekke & Tinnes, (2001).

Oppgåve 30

15 liter bær veg 10 kg.

Kor mange kg veg 6 liter av dei same bæra?

Forklar eller vis ved rekning korleis du har tenkt.

Rett svar: 4 kg.	**10**
3,996	**4**
9 kg	5
1 kg	1
4,8, 5, 5,5 eller 5,6	4
$\frac{6}{x} = \frac{15}{10}$. Stoppar so opp	2
Ikkje svart	6

Denne oppgåva er henta frå Brekke & Tinnes (2001), og testar om eleven har ei forståing av forhold som bind saman storleikar av ulik slag (rate). Elevane kan anten sjå på forholda innanfor same mål (mellom 15 og 6 liter) for å finna skalarfaktoren, eller dei kan sjå på forholda mellom dei to ulike måla (15 liter og 10 kg bær) for å finna funksjonsoperatoren (sjå punkt 2.1.2.2. – Brøk som forhold). Ein funksjonsoperator eller ein skalarfaktor mindre enn ein kan for nokre elevar vera vanskelegare å handsama enn om han var større enn ein (Brekke & Tinnes, 2001). Moglege misoppfatningar her kan vera at elevar snur funksjonsoperatoren, då ein ikkje kan dela eit lite tal på eit stort tal, eller at dei brukar ukorrekt addisjonsstrategi der dei ser på differansen mellom liter og kilo som ein konstant og adderer denne med seks.

14 elevar svarar rett på denne oppgåva, noko som utgjer 44% av respondentane. Fire av dei får 3,996 til svar. Desse elevane har forstått den proporsjonale strukturen i oppgåva, men har runda av funksjonsoperatoren til tre desimalar (10:15=0,666 og 0,666·6=3,996). Dei 10 andre kjem fram til fire kilo. Ein finn ulike strategiar hjå elevane som løyste denne oppgåva. Nokre elevar finn funksjonsoperatoren $\frac{2}{3}$ og skriv deretter fylgjande: *10 kg er* $\frac{2}{3}$ *av 15, og 4 kg er* $\frac{2}{3}$ *av 6,* eller at dei «snur» funksjonsoperatoren ved å finna forholdet 15 : 10 = 1,5 og reknar deretter ut 6 : 1,5. Andre elevar ser på forholdet innanfor same måla, men også denne skalaroperatoren vert «snudd» ved at dei finn forholdet mellom 15 og 6 som er 2,5. Deretter reknar dei ut 10 : 2,5 = 4. Nokre av dei set opp forholdslikninga $\frac{10}{15} = \frac{x}{6}$, og løyser deretter denne. Dette siste er ei typisk skuleprosedyre, og er effektiv for å finna svar på oppgåva (ibid.). Andre elevar går vegen om ein; ved å dividera med 10 får ein at eitt kilo svarar til 1,5 liter. Då vil fire kilo svara til seks liter. Atter andre elevar prøver å forenkla forholda ved at dei skalerer ned for deretter å skalera opp igjen. Tre liter bær må vega to kilo (15 : 5 = 3 og 10 : 5 = 2). Dette fører til at seks liter bær må vega fire kilo (3 · 2 = 6 og 2 · 2 = 4). Denne strategien kan vera effektiv når tala du får etter at du har skalert ned kan nyttast for å skalera opp igjen mot den ukjende proporsjonen (ibid.).

Fem elevar får ni til svar. Desse elevane snur funksjonsoperatoren ved at dei finn forholdet 15 : 10 = 1,5. Dette vert so multiplisert med seks og ein får svaret ni. Ei årsak til dette kan vera ei misoppfatning om at ein ikkje kan dela eit lite tal med eit stort tal (ibid.). Ei anna årsak kan vera at dei oppfattar dette som kg per liter og ikkje liter per kg, då ein del elevar kan vera lite bevisst på denne forskjellen (ibid.). E5 seier fylgjande:

> *Eg tenkte at eg måtte finna forholdet mellom liter og bær, og det vart 1,5. Og då har eg ganga dette forholdet med seks for å finna kor mange kilo det vart. Men det verkar jo litt lite logisk, fordi det kan jo ikkje verta berre eit kg mindre når vi skal ha litt under halvparten av bæra. Eg vil eigentleg ganga fordi at… Eg veit ikkje heilt, eg tenkjer berre at eg må ganga.*

Ein elev ser på differansen mellom 15 og 10, og brukar denne konstanten til å subtrahera fem frå seks. Svaret vert 1 kg. Denne ukorrekte addisjonstenkinga kjem tydlegare fram i oppgåve 26 (sjå s. 82-83). To elevar set opp ei forholdslikning, men greier ikkje løysa denne likninga. Her viser dei mangel på prosedyreforståing.

Oppgåve 32

Messing er ei blanding av sink og kopar i høve 1 : 4.

Kor mange kg sink er det i 40 kg messing?

Forklar korleis du rekna/ har tenkt for å koma fram til svaret ditt.

Rett svar: 8	**15**
10.	11
20 kg eller 120	2
160	1
Ikkje svart:	3

Denne oppgåva er henta frå Brekke & Tinnes (2001), og testar om eleven har ei forståing for forhold mellom to delar av eit heile (del-del-forhold). Moglege misoppfatningar her kan vera at eleven oppfattar dette som eit forhold mellom ein del og eit heile. Teiknet : vert sett på som eit divisjonsteikn og ikkje som eit symbol for eit del-del-forhold. Han vil då meina at $\frac{1}{4}$ av messinga er sink.

15 elevar svarar rett på denne oppgåva. Det utgjer ca 47% av respondentane. Hjå grunnkurselevane i Brekke & Tinnes (2001) si undersøking svarar 14% av elevane rett. Det vanlegaste feilsvaret i mi undersøking er 10. Elevane oppfattar dette som eit forhold mellom ein del og eit heile, og ikkje som eit forhold mellom to delar av eit heile (del-del-forhold). $\frac{1}{4}$ av blandinga er sink. E6 seier fylgjande: *Dersom eg skulle gjort denne oppgåva no, so ville eg ha svara at det skulle vera 10 kilo. Fordi det er* $\frac{1}{4}$ *sink i messing. Og viss du tek* $\frac{1}{4}$ *av 40 so vert*

det 10. Brekke & Tinnes (2001) meiner mange elevar har mindre erfaringar med del-del-forhold, og dette kan vera grunnen til at ikkje fleire svara rett på denne oppgåva.

4.2.4. Operasjonar på brøk

Når ein skal rekna med brøk, er det, som nemnt i punkt 4.2., vanleg å sjå på brøk som målestorleik ved addisjon og subtraksjon, og brøk som operator ved multiplikasjon og divisjon (Birkeland et al., 2011). Nokre av oppgåvene i testen er tekstoppgåver, medan andre er reine utrekningsoppgåver lausrive frå kontekst. Dei fleste utrekningsoppgåvene er kopla til tekstoppgåver for m.a. å kunna samanlikna elevsvara og sjå om det er noko samanheng mellom tekstoppgåvene og utrekningsoppgåvene. Utrekningsoppgåvene kan lett løysast ved hjelp av ein algoritme som er lært, og kan m.a. vera med på å gje informasjon om kva prosedyreforståing ein elev har (Hallett et al., 2010; Byrnes & Wasik, 1991). Tekstoppgåver krev andre dugleikar enn å løysa eit oppstilt reknestykke. Ein elev må her kunna omsetja ein situasjon til eit reknestykke på symbolform. Desse oppgåvene kan løysast både ved hjelp av innlærte algoritmar og ved forståing, noko eg vil prøva å synleggjera undervegs.

4.2.4.1. Addisjon og subtraksjon. Brøk som målestorleik.

Ei god forståing for brøk og likeverdige brøkar er viktig om ein skal forstå addisjon og subtraksjon av brøk, og misoppfatningar kan oppstå i fleire av trinna som er involvert i denne prosessen (McIntosh, 2007). Den mest vanlege misoppfatninga er at elevane adderer (subtraherer) teljar med teljar og nemnar med nemnar. Dette skuldast at dei ikkje ser på brøk som eit tal; teljar og nemnar opererer uavhengig av kvarandre som to tal (altså interferens med dei naturlege tala, omtala i punkt 2.3.6.). Andre typar feil kan oppstå når brøkane skal utvidast slik at dei har same nemnar (ibid.).

Oppgåve 5

I eit bakeri vert $\frac{3}{8}$ av mjølet brukt til å baka brød, og $\frac{1}{5}$ av mjølet vert brukt til å baka kaker. Kva brøkdel av mjølet har vorte brukt? Forklar korleis du tenkjer.

Rett svar: $\mathbf{\frac{23}{40}}$	26
$\frac{1}{10}$, $\frac{3}{8}$ eller 4	3
Ikkje svart:	3

Denne oppgåva er henta frå Hart et al. (1984), og testar om eleven kan addera to brøkar med ulik nemnar. 26 elevar svarar rett på denne oppgåva. På den tilsvarande rekneoppgåva utan kontekst **(oppgåve 35a: $\mathbf{\frac{3}{8} + \frac{1}{5}}$)** har 25 elevar svara rett. Ser ein på det desse elevane har skrive på svararka sine, har alle nytta seg av prosedyren med å finna samnemnaren for so å rekna ut svaret. Ti elevar greier å gje ei forklaring på kvifor dei utvidar brøkane slik at dei har same nemnar. For resten er dette uklart, som t.d. E10: *Eg veit ikkje. Det går berre ikkje an å rekna med to forskjellige nemnarar. Då vert svaret feil.* Desse elevane viser ei prosedyreforståing, og berre det. Dei greier å utføra reknestykket, det er ei oppskrift dei har lært. Men dei manglar innsikt i det dei gjer. Forståing for brøkoperasjonen er ikkje like godt utvikla.

Det motsette kjem fram hjå nokre elevar som ikkje har svart på oppgåva, men greier forklara kvifor brøkane vert utvida slik at dei får same nemnar, som t.d. E7: *Når eg skal plussa* $\frac{3}{8}$ *og* $\frac{1}{5}$, *so er problemet at bitane ikkje er like store. Difor må ein dela dei opp i mindre bitar slik at dei vert like. Vi må finna samnemnar. Og då kan vi samanlikna. Men eg hugsa ikkje korleis vi skulle gjera dette.* Denne eleven veit at brøkane må ha same eining, og viser på den måten ei viss strukturforståing. Men han hugsar ikkje korleis dette skal gjerast, og viser ein mangel på prosedyreforståing. Det kan vera at han ikkje greier å finna samnemnaren; at han ikkje ser at minste felles multiplum til åtte og fem er 40, men det kan òg vera at han ikkje ser at han må utvida brøkane eller at han rett og slett ikkje hugsar korleis ein adderer saman to brøkar.

Tre elevar har gjeve svara $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{8}$ eller 4 på oppgåve 5 utan noko grunngjeving for svara. Den eine eleven har skrive 3+1 på arket, so det kan sjå ut som at han berre har addert teljarane utan å ta omsyn til nemnarane. På den tilsvarande reine rekneoppgåva (oppgåve 35a) hadde tre elevar addert teljar med teljar og nemnar med nemnar, to av dei får svaret $\frac{4}{13}$ og ein av dei set først brøkane på samnemnar før dei vert addert til $\frac{23}{80}$. Desse elevane ser ikkje på brøken som eitt tal; teljar og nemnar opererer uavhengig av kvarandre som to heile tal. Dette er igjen eit døme på ei misoppfatning som skuldast interferens med dei naturlege tala (Petit et al., 2010). Denne misoppfatninga kjem enno tydlegare fram i oppgåve 34 der elevane skal addera tre brøkar som inneheld variabelen x i teljaren. Her er det fem elevar som adderer teljar med teljar og nemnar med nemnar.

Tre elevar har ikkje svara på oppgåve 5. Å sjå samanheng mellom ein konkret situasjon og ein rekneoperasjon kan, i følgje Tvete (2006), vera vanskeleg for nokre elevar. Eit par døme på elevutsegner her:

> E1: *Eg veit ikkje kva reknestykke eg skal setja opp. Om det er pluss, minus, gange eller deling.*
> E11: *Eg såg at dette var ei tekstoppgåve, so den hoppa eg over først. Og so gjekk eg tilbake til den då eg var ferdig med dei andre oppgåvene, berre for å skriva noko. Tekstoppgåver er*

vanskeleg fordi det er tekst. Og det er vanskeleg å henta ut eit reknestykke frå teksten og vita kva du skal gonga, dela, plussa eller minusa med kva.

Ei årsak til at nokre elevar strevar med tekstoppgåver kan vera at dei ikkje er medvitne om ulike formuleringar slik at dei kan kjenna igjen situasjonar og kva rekneart som kan nyttast (McIntosh, 2007). Gode munnlege diskusjonar om formuleringar i tekstoppgåver er viktig for å utvikla evne til å bruka matematikk i praktiske situasjonar (ibid.).

Oppgåve 12

Kva sum nedanfor er større enn 1?

Du skal ikkje rekna ut svaret.

Set ring rundt rett alternativ.

(a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$ (b) $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}$ (c) $\frac{3}{8}+\frac{2}{11}$ (d) $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}$

Rett svar: d	**26**
b og d	3
c	1
Ikkje svart	2

Denne oppgåva er henta frå McIntosh (2007) og testar om eleven kan addera to brøkar. Ein elev som nyttar ein algoritmisk måte å tenkja på, vil prøva å leggja saman desse brøkane, medan ein elev som har talforståing (sjå punkt 2.4.2. – Undervisning om talforståing – «Number sense») vil heller samanlikna kvar talstorleik med ein halv (ibid.). 26 elevar svarar rett på denne oppgåva. Dette utgjer ca. 81% av respondentane mine. Nilsen (2008) har òg brukt denne oppgåva i si undersøking, og her svarar 34 av 83 elevar rett, altså ca. 41% av elevane. Nokre elevar i mi undersøking har måtta rekna ut alle addisjonsstykka for å avgjera kva reknestykke som var større enn ein. Dei har nytta seg av algoritmen med å setja brøkane på samnemnar. Her viser dei prosedyreforståing. Andre elevar, som t.d. E8 brukar $\frac{1}{2}$ som referansepunkt og vurderer storleiken på brøkane i høve til den:

På d tenkte eg at den er ein halv, og $\frac{4}{7}$ er over halvparten. Difor vart det over ein. På b har eg jo ein halv pluss $\frac{4}{9}$ som er under ein halv. Det vert jo ikkje større enn ein. $\frac{2}{5}$ er mindre enn ein halv og det er $\frac{3}{7}$ òg. Difor vert det ikkje denne. Eg samanlikna alle brøkane med ein halv. Og so fann eg det ut.

Dette er ein velkjend strategi når storleikar på brøkar skal vurderst, og er eit av fleire kjenneteikn på god talforståing (McIntosh, 2007). I intervju med elevane kom det fram at denne strategien var framand for fleire av dei. Nilsen (2008) meiner elevane må få slike tips frå læraren.

Tre elevar har svara både b og d. Då vi i intervjua gjekk gjennom denne oppgåva på nytt, retta dei seg sjølv. Dei nytta ein algoritmisk måte å tenkja på, dei fann samnemnaren og adderte brøkane. Det gjekk truleg litt for fort då elevane gjorde denne oppgåva på testen, slurvefeil dukkar opp. Når elevane går gjennom oppgåva på nytt og brukar litt meir tid på ho, ser dei at b ikkje kan vera rett.

To elevar har ikkje svart på denne oppgåva. E1 seier fylgjande:

> *Eg hugsa rett og slett ikkje korleis eg skulle rekna dette ut. Det var eit eller anna vi måtte gjera når vi skulle plussa, for ein kan ikkje berre plussa dei. Vi kan ikkje plussa tala oppe og tala nede. Vi må finna ein samnemnar eller noko slikt, og eg har gløymt korleis det skal gjerast.*

Her igjen kan vi sjå ei manglande brøkforståing hjå eleven. Omgrepa teljar og nemnar vert ikkje brukt. I staden snakkar han om tala oppe og tala nede. Men samnemnar er eit omgrep som han brukar, utan heilt å vita korleis han skal finnast. Addisjon av brøkar er ein regel eleven har lært og som må hugsast. Reglar ein ikkje forstår kan lett verta gløymd.

Oppgåve 14

John betalar $\frac{3}{5}$ av løna si i skatt.

I tillegg betalar han $\frac{1}{10}$ av løna i husleige.

Kva brøkdel av løna har han igjen etter at han har betalt skatt og husleige?

Rett svar: $\frac{3}{10}$	**26**
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{4}{15}$	1
Ikkje svart	3

Denne oppgåva er henta frå Hart et al. (1984) og testar om ein elev greier å omsetja ei tekstoppgåve til eit reknestykke, og om han greier å subtrahera to brøkar med ulik nemnar frå ein heil. 26 elevar svarar rett her. Det svarar til ca. 81% av respondentane. På den tilsvarande rekneoppgåva utan kontekst **(oppgåve 35e: 1- $\frac{1}{10}$ - $\frac{3}{5}$)** har 21 elevar svara rett. Det er fem færre enn på tekstoppgåva. Ei årsak til dette kan vera at ei oppgåva som står i ein kontekst kan gjeva meir meining for ein elev enn ei oppgåve i eit reint symbolspråk (Hart et al., 1981). Ei anna årsak kan vera at elevane har vorte trøytte, då oppgåve 35e kom på slutten av testen. Hjå Hart et al. (1984) var det 43% av elevane (14-15 år) som svara rett her. Ser ein på svararka til elevane som deltok i mi undersøking, kan ein sjå at dei har nytta seg av prosedyren med å setja brøkane på samnemnar, for so å rekna det ut.

To elevar har svara $\frac{1}{2}$ på oppgåve 14. Korleis dei har tenkt er uvisst, då dei ikkje vart intervjua om denne oppgåva. E11 har svara $\frac{4}{15}$. Han har addert dei ekte brøkane i oppgåva; teljar med teljar og nemnar med nemnar. I intervjuet seier han: *Eg tenkte slik du gangar. Då er det rett fram. 3+1=4 og 5+10=15. Men no har vi lært i timen at vi ikkje kan gjera det slik med pluss. Då må ein ha same nemnar. Den regelen gløymde eg.* Igjen ser vi døme på at rekning med brøk består av ulike reglar ein må hugsa, utan at ein nødvendigvis forstår reglane. Difor vert dei ofte gløymd. Lærar som underviser i 1P hadde nettopp repetert brøkrekning med elevane sine (14 stk.) før dei vart intervjua, og dette gjer at eleven no hugsar prosedyren for addisjon og subtraksjon.

Ser ein på feila på den tilsvarande rekneoppgåva (oppgåve 35e), ser ein at eit par elevar ikkje greier å fullføra heile utrekninga. Dei kjem fram til 1- $\frac{7}{10}$, men so stoppar det opp. Grunnen til dette er uviss, då ingen av dei vart intervjua om denne oppgåva. Ei mogleg årsak kan vera at eleven ikkje ser at ein er det same som $\frac{10}{10}$. Ein annan elev snur rekneoperasjonen og får svaret $\frac{1}{2}$. Først utvidar han $\frac{3}{5}$ til $\frac{6}{10}$. Deretter overser han den heile, reverserer reknestykket og reknar ut $\frac{6}{10}$ - $\frac{1}{10}$ og får $\frac{1}{2}$ til svar. Ein grunn til at eleven reverserer reknestykket etter at han overser den heile, kan vera at han elles ville fått ein negativ brøk som svar. Har ein avgrensa erfaringar med brøk som del av eit heile, vil ikkje det gjeva meining (Kerslake, 1986). Ei anna årsak kan vera at han trur at subtraksjon er kommutativ.

Åtte elevar har ikkje svart på oppgåve 35e mot tre elevar på tekstoppgåva. Ei årsak til dette kan vera at elevane har vore trøytte og difor latt vera å svara på slutten. Samstundes finn ein fylgjande kommentar på eit av svararka: *Jeg husker jo ingenting…* Reglar ein ikkje forstår, vert lagra som isolert kunnskap i minnet (sjå punkt 2.2.2.1. – Den kognitive konstruktivismen). Dei vil då lett verta gløymt (McIntosh, 2007).

4.2.4.2. Multiplikasjon og divisjon. Brøk som operator. Brøk som kvotient.

Multiplikasjon og divisjon av brøk er komplisert å forstå. Mange elevar har prosedyrekunnskap om desse brøkoperasjonane, men manglar forståing for dei underliggjande omgrepa (Petit et al., 2010). Multiplikasjon og divisjon er inverse operasjonar. Ved ei mekanisk utrekning utan forståing må elevane stola på at dei hugsar reglane. Det kan då vera lett for at dei blandar ulike reglar. Den mest vanlege misoppfatninga er at elevane trur at multiplikasjon gjer talet større og divisjon gjer talet mindre. Dette kan skuldast tidlegare erfaringar elevar har med multiplikasjon. Dei overfører reglane som gjeld for heile tal til brøk (sjå punkt 2.3.6. – Interferens med dei naturlege tala).

Oppgåve 9

Skriv >, = eller < på linja under slik at setninga vert sann.

456 : 8 _____ 456 $\cdot \frac{1}{8}$

Rett svar: =	**16**
>	9
<	7

Denne oppgåva er henta frå McIntosh (2007) og testar om elevane greier å sjå samanheng mellom brøk og vanleg divisjon. Eleven må her vita at brøkstreken er det same som deleteikn.

Halvparten av elevane i klassen svarar rett på denne oppgåva. Dei veit at å dela på eit tal er det same som å multiplisera med den inverse verdien til talet. Nilsen (2008) har brukt same oppgåve, og der svarar 29 av 83 elevar rett. Dette utgjer ca. 35% av elevane hennar. Eg har ikkje grunnlag for å seia noko om årsak til denne skilnaden, men ei forklaring kan vera at karaktersnittet i elevgruppa mi er noko høgare.

Nesten ein firedel av elevane i klassen min svarar at 456:8 er mindre enn 456 $\cdot \frac{1}{8}$. Ein elev seier fylgjande:

> E2: *Eg tenkjer at på den første so deler vi, og då blir det mindre. Og på den siste so gongar vi, og då blir det større.*
> L: Er det alltid slik at når vi gongar vert svaret større?
> E2: *Nei. Det vert vel ikkje større dersom du gongar med desimal eller noko slikt, altså 0,5 eller eit anna desimaltal. Eg har aldri heilt skjønt dette, at svaret vert mindre når du gongar med positive tal. Men eg tenkte at dette måtte vera rett. Når du gongar med eit positivt tal, so må jo det bli større. Det er logisk. Når du gongar noko, so vert jo det større. Men eg har blitt fortalt at dersom du gongar eit tal med 0,5 eller eit anna kommatal, so vert svaret mindre*.

Dette er uttrykk for ei misoppfatning om at multiplikasjon gjer talet større og divisjon gjer talet mindre. Eleven har lita erfaring med multiplikasjon av desimaltal, og overfører difor kunnskap og reglar om dei naturlege tala til brøk og desimaltal. Han har ikkje greidd å utvida skjemaet om multiplikasjon og divisjon til å gjelda for dei rasjonale tala. Fortsatt er det mest logisk at so lenge du multipliserer med eit positivt tal, so må svaret verta større (Brekke, 2002). E6 gjev uttrykk for at han veit at det er berre når ein multipliserer med eit tal større enn ein at svaret vert større. Men når det gjeld divisjon, seier han fylgjande: *Men eg trur jo at når vi deler, so vert svaret alltid mindre. Eg har iallfall aldri tenkt at svaret kan bli større*. Eleven manglar erfaringar med divisjon, og skjemaet for divisjon har difor ikkje vorte utvida hjå denne eleven heller (ibid.).

E4 seier òg at $456 \cdot \frac{1}{8}$ må vera størst sidan vi gongar. Samstundes gjev han uttrykk for at $\frac{1}{8}$ ikkje gjev noko meining for han. Difor fekk han spørsmål om kva han ville svara dersom det hadde stått 4:2 og $4 \cdot \frac{1}{2}$. Fylgjande interessante samtale fann stad:

> E4: *Eg tenkjer at ein halv kan vera ein halv av kva som helst. Det står jo ikkje kva det er ein halv av. Det kan jo vera 50 om det heile er 100. Men dersom det er ein halv av fire so vert jo det to. Då vert svaret åtte. Medan 4:2=2.*
> L: Kva sa du $4 \cdot \frac{1}{2}$ var?
> E4: *Åtte. Eg tek halvparten av fire og multipliserer det med fire.*
> L: $4 \cdot \frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{2} \cdot 4$ – du skal ta halvparten av 4…
> E4: *Halvparten av fire er to, men eg kan jo ikkje «ta» om det er gonging. Eg skal jo gonga fire med halvparten. Og då vert det fire gonge to som vert åtte.*

Her kan det sjå ut som at eleven strevar med å sjå kva aspekt ved brøk som kan vera relevant. Eleven viser at han ikkje ser på $\frac{1}{2}$ som eit tal, men som ei halv mengde av noko. Og det er denne halve mengda som skal multipliserast med fire. Han har ikkje forstått rekneoperasjonen, og verkar ikkje fortruleg med å tolka multiplikasjonsteiknet som «av». Bjørnestad (2011) meiner ei tolking av multiplikasjonsteiknet som «av» kan føra til at operasjonar som i utgangspunktet kan vera vanskeleg å forstå, kan gjeva meir meining. Men det er viktig at denne overgangen vert presisert for elevane i undervisninga.

Ni elevar svarar at 456 : 8 er større enn $456 \cdot \frac{1}{8}$. E7 gjev uttrykk for at han ikkje anar kva av uttrykka som er størst, då han ikkje kan hugsa korleis dette skal reknast ut. Han seier m.a. fylgjande: *Eg tenkjer rett og slett at eg skal gløyma forteikna eller gonge- og deleteiknet. Åtte er større enn ein åttedel. Eg ser bort frå det som står framføre tala*. Eleven ser altså berre på tala, utan tanke for kva operasjonar dei er knytt opp mot. Han ser ikkje samanheng mellom brøk og vanleg divisjon, og trur han må rekna dette ut for å kunna svara på oppgåva. Og då han ikkje kan hugsa korleis dette skal gjerast, vel han å oversjå rekneoperasjonane og ser berre på tala. Åtte er større enn ein åttedel.

Ein annan elev seier fylgjande:

> E10: *Det er meir openbert at dette* (456:8) *er det uttrykket som er størst.*
> L: Kvifor er det meir openbert?
> E10: *Eg veit ikkje korleis eg skal forklara det. Der skal du jo gonga med åtte* (peikar på $456 \cdot \frac{1}{8}$).
> L: Det står oppgjeve at du skal gonga 456 med ein åttedel.
> E10: *Skal du gonga det berre oppe då? Skal 456 berre gongast med det som er oppe? Er ikkje det ein regel om at vi skal gonga berre med talet som står oppe – altså teljaren? Då får vi* $\frac{456}{8}$.

> *Dette greier eg ikkje rekna ut. Men 456:8 er meir logisk og gjev meir meining enn 456 $\cdot \frac{1}{8}$. Eg føler at det vert større.*

Her viser eleven lita forståing for samanhengen mellom brøk og vanleg divisjon. Han ser at $456 \cdot \frac{1}{8}$ er lik $\frac{456}{8}$, men han greier ikkje å sjå at det er det same som 456 : 8. Det kan verka som om eleven er utrygg på brøkstreken som deleteikn. I intervjua kjem det òg fram at både for denne eleven og fleire andre handlar brøkoperasjonar om reglar som må hugsast utan at dei er forstått. Og sidan denne prosedyrekunnskapen ikkje er basert på forståing, festar han seg heller ikkje i minnet. Ein konsekvens av dette er at reglane må repeterast med jamne mellomrom.

E1 forklarar fylgjande:

> *Og sidan eg var so usikker på korleis dette skulle gjerast, so tenkte eg at det var meir sikkert å skriva at 456:8 var størst. 456 $\cdot \frac{1}{8}$ vert mindre på ein eller annan måte fordi 1:8 er veldig lite. Det er null komma eit eller anna. Gongar du eit veldig lite tal med 456 so vert ikkje det so veldig mykje. Det vert iallfall mindre enn 456:8.*

Her viser eleven ei oppfatning av at «når du gongar eit tal med eit lite tal, vert svaret veldig lite». Dette kom tydleg fram i eit par av intervjua i pilotundersøkinga. Ein elev der sa m.a.: *Ein åttedel er jo null komma eit eller anna. Og dersom du gongar 456 med null komma eit eller anna, blir jo det eit ganske lite tal. Eit heilt tal gonge med eit lite tal som null komma eit eller anna, vert eit ganske lite tal. Mens 456:8 er større enn ein*. Denne eleven brukar ein som referanse for å samanlikna desse to operasjonane. Han ser at 456:8 er større enn ein, medan han trur at 456 $\cdot \frac{1}{8}$ er mindre enn ein. Eleven har her forstått at multiplikasjon ikkje alltid gjer talet større. Når ein multipliserer med eit tal mindre enn ein, vert det opphavlege talet mindre. Men her kan det sjå ut som at eleven overgeneraliserer, og vi får ei oppfatning om at produktet av dei to tala er mindre enn faktorane, noko som berre stemmer dersom begge faktorane er mindre enn ein. Ei årsak til dette kan vera at eleven manglar tilstrekkeleg med erfaringar som gjer at skjemaet for multiplikasjon vert endra og utvida (sjå punkt 2.3.6. – Interferens med dei naturlege tala og punkt 2.3.9. – Undervisning).

Oppgåve 10

I ei matoppskrift står det at vi skal bruka $1\frac{3}{4}$ kopp med mjøl.

Kor mykje trengs det til ei dobbel oppskrift?

Set ring rundt rett svaralternativ.

(a) $1\frac{6}{8}$ kopp (b) $2\frac{1}{2}$ kopp (c) $2\frac{6}{8}$ kopp (d) $3\frac{1}{2}$ kopp

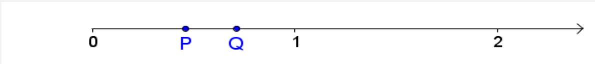
Rett svar: d	17
c	9
b	6

Denne oppgåva er henta frå kartleggingsprøve i rekning , VG1 (Utdanningsdirektoratet, 2012), og testar om eleven greier å multiplisera eit blanda tal med eit heilt tal. Ei mogleg misoppfatning her kan vera at når ein multipliserer eit heilt tal med eit blanda tal, multipliserer vi det heile talet med alle sifra i det blanda talet. 17 elevar svarar rett på denne oppgåva. Det utgjer ca. 53% av respondentane. I følgje Utdanningsdirektoratet (2012) kan ein forventa at ca. 24% av elevane svarar rett på denne oppgåva. På den tilsvarande rekneoppgåva utan kontekst **(oppgåve 35f: $2 \cdot 1\frac{3}{4}$)** har 15 elevar svara rett, altså to elevar færre. Ei årsak til dette kan vera at oppgåve 10 har svaralternativ, medan dette ikkje er tilfelle på oppgåve 35f.

Ni elevar gjev svaralternativ c. Her har dei multiplisert to med alle sifra i det blanda talet. Sju elevar har denne type feil på den tilsvarande rekneoppgåva. E3 seier fylgjande: *Eg dobla alle tal, det dobbelte av ein er to, det dobbelte av tre er seks og det dobbelte av fire er åtte. Difor vert det 2* $\frac{6}{8}$. Her igjen ser vi eit døme på at elevar ser på teljar og nemnar som uavhengige tal, og ikkje som eitt tal. Elevane ser ikkje at når dei multipliserer teljar og nemnar med to, so har dei multiplisert med to og delt på to; altså multiplisert med ein.

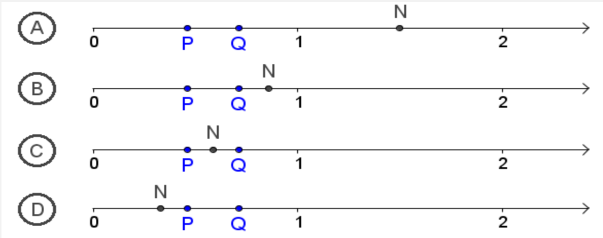
Seks elevar gjev svaralternativ b. Eit par av dei rettar seg sjølv når dei går gjennom oppgåva på nytt. Desse elevane ser først på det heile talet og doblar dette, deretter gjer dei det same med brøken og får han til å verta ein og ein halv. Men so gløymer dei å leggja til den ekstra heile og får svaret to og ein halv. Her ser vi døme på at det truleg har gått litt for fort då elevane løyste oppgåva.

Oppgåve 31



P og Q representerer to brøkar på tallina ovanfor.

P · Q = N. Kva av tallinene under viser kor N ligg på tallina?



Rett svar: D	**16**
A	5
B	4
C	3
Ikkje svart:	4

Denne oppgåva er henta frå TIMSS 2011 – 8.trinn, og krev at eleven greier å abstrahera ved å nytta symbol og ikkje tal. Ei eventuell misoppfatning om at multiplikasjon automatisk gjer svaret større kan koma fram her. Halve klassen svarar rett på denne oppgåva. I TIMSS 2011 svara 15% av norske 8.klassingar rett på denne oppgåva[13].

Ni elevar svarar alternativ a eller b. I begge tilfella er svaret større enn dei opphavlege brøkane, i alternativ a er svaret større enn ein og i alternativ b er svaret mindre enn ein. E3 seier fylgjande: *Men eg tenkte iallfall at svaret måtte vera større fordi vi har gonging*. E6 uttrykkjer seg på denne måten:

> *Eg tok i alle fall vekk dei alternativa der N vart mindre, altså c og d. Når ein gongar noko med kvarandre, so vert det jo aldri eller nesten aldri mindre. So når P·Q=N, so tenkte eg at N må vera høgare enn P og Q. So eg tok vekk c og d. Men eg er litt usikker på kva som gjorde at eg valde b i staden for a. I begge tilfella er svaret større enn P og Q. Men i a er svaret større enn ein og i b er svaret mindre enn ein. Men uansett so er dei større enn P og Q.*

Denne eleven er inne på at multiplikasjon stundom kan gjera det opphavlege talet mindre, men reflekterer ikkje over i kva situasjonar det er tilfelle. Han er sikker på at i denne oppgåva er svaret større, sjølv om han veit at P og Q er mindre enn ein. Igjen er det misoppfatninga om at multiplikasjon gjer talet større som kjem fram.

Tre elevar har svara alternativ c. E9 seier fylgjande: *Eg laga meg to tal,* $\frac{1}{2}$ *og* $\frac{3}{4}$*. So ganga eg dei saman, og då fekk eg* $\frac{3}{8}$*. So prøvde eg å plassera* $\frac{3}{8}$ *på denne linja. Då fann eg ut at c var*

---

[13] Talet er henta frå TIMSS 2011 International Database; http://timss.bc.edu/timss2011/international-database.html

det beste. $\frac{3}{8}$ *er større enn* $\frac{1}{2}$ *og mindre enn* $\frac{3}{4}$. Eleven prøver å løysa denne oppgåva ved å setja inn tal i staden for bokstavar, han multipliserer tala saman, men greier ikkje vurdera kva tal som er størst av $\frac{3}{8}$ og ein halv. Akkurat dette skulle ikkje ha vore vanskeleg for elevar i den vidaregåande skulen.

Oppgåve 35b: $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8}$		**Oppgåve 35d:** $\frac{1}{6}$ **av** $\frac{3}{4}$	
Rett svar: $\frac{10}{72}$ **eller** $\frac{5}{36}$	**23**	**Rett svar:** $\frac{1}{8}$ **eller** $\frac{3}{24}$	**9**

Desse to oppgåvene er meint å testa prosedyreforståing. Elevane skal multiplisera to ekte brøkar. I oppgåve 35b vert multiplikasjonsteiknet nytta, medan ordet «av» vert nytta i staden for multiplikasjonsteiknet på oppgåve 35d. Dette for å sjå om elevane kan tolka multiplikasjonsteiknet som «av».

23 elevar svarar rett på oppgåve 35b. Dette utgjer ca. 72% av elevane. Alle har nytta standardalgoritmen der dei multipliserer teljar med teljar og nemnar med nemnar. Dei viser god prosedyreforståing. Men ingen av desse elevane greier å forklara kvifor denne prosedyren fungerer. Slik sett viser dei mangel på strukturforståing. Denne oppgåva har òg vorte nytta i Ånestad et al. (2013), og der svara 53% av studentane rett.

Ser ein på feila hjå elevane som deltok i mi undersøking, kan det sjå ut som at dei ikkje hugsar prosedyren for multiplikasjon. Dei har difor laga seg sine eigne reglar, som er ei blanding av ulike prosedyrar knytt opp mot brøkrekning. Døme her er å snu den bakre brøken for so å summera teljar med teljar og nemnar med nemnar, eller snu den bakre brøken for so å multiplisera teljar med teljar og nemnar med nemnar (men med reknefeil). Å snu den bakre brøken er ein del av algoritmen i divisjon av brøkar, og det er truleg bitar av denne algoritmen elevane hugsar. Elevane hadde ikkje repetert brøk før testen vart teke, det var truleg minst to månader sidan dei sist rekna med brøk. Reknereglane var gløymt. McIntosh (2007) understrekar at reknereglar som ikkje gjev meining for elevane og som ikkje inngår i ein kognitiv struktur, vert lett gløymt.

Slik oppgåve 35d var presentert, gav det lita og inga meining for mange elevar. Ni elevar svarar rett her. På sverarka deira har dei skrive $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}$ og rekna dette ut. Fire elevar tolkar «av» som subtraksjon, to elevar tolkar «av» som divisjon og 10 elevar har ikkje svara på denne oppgåva (mot tre elevar på oppgåve 35b). Nokre kommentarar som går igjen på svararka til elevane på denne oppgåva er: *«WHAT???»*, *«Har ikkje vært bort i en slik oppgave før…»* og *«???»*. Det verkar som at mange elevar er ukjende med å tolka multiplikasjonsteiknet som «av». Den tilsvarande tekstoppgåva til oppgåve 36d **(oppgåve 16)** hadde elevane ikkje problem med. Ei viktig årsak til dette kan vera at oppgåve 16 var ei oppgåve med illustrasjon. Elevane skulle fargeleggja $\frac{1}{6}$ av $\frac{3}{4}$ av ein sirkel, for deretter å finna ut kor stor del av sirkelen som var fargelagt. 29 elevar svara rett på denne oppgåva. Her ser vi eit døme på at oppgåver som står i ein kontekst kan gje meir meining for elevar enn oppgåver i eit reint symbolspråk, noko som òg kom fram hjå Hart et al. (1981). Kerslake (1986) påpeikar at illustrasjonar kan vera nyttige når oppgåver skal løysast, og til god hjelp for å auka forståing for visse aspekt ved brøk, særleg brøk som del av eit heile.

Oppgåve 27

Lag ei tekstoppgåve som passar til fylgjande rekneuttrykk:

$$4\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$$

Rett målingsdivisjon	**5**
Rekneforteljing til $4\frac{1}{2} : 4$	5
Rekneforteljing til $4\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$	1
Reknestykke på skulen/ reknar ut oppgåva	2
Urealistisk kontekst/ ufullstendige opplysingar	6
Ikkje svart	13

I denne oppgåva skal elevane laga ei rekneforteljing til ei oppgåve gjeve på symbolform. Oppgåva testar om eleven kan tenkja på passande samanhengar der brøk og rekneoperasjonar vert brukt på ein korrekt måte. Dette viste seg vera svært vanskeleg for mange elevar. Berre fem elevar svarar rett her og greier å finna ein realistisk situasjon til dette rekneuttrykket. Dette svarar til ca. 16% av respondentane i mi undersøking. Desse elevane tek i bruk målingsdivisjon, noko som, i følgje Birkeland et al. (2011), er naturleg å nytta når divisor er ein brøk. Den same tendensen finn vi òg hjå Lindgren (2011). Ho brukte ei liknande oppgåve i si undersøking av kva kunnskap gymnaselevar har i multiplikasjon og divisjon av brøk. Her var det 15% som greidde å laga ei tekstoppgåve til $3 : \frac{1}{2}$. Noko betre, men langt frå tilfredsstillade gjer elevane det i Brekke & Tinnes (2001) si undersøking . Her var det 23% av grunnkurselevane som greidde å laga ei tekstoppgåve til 4 : 0,5. Ei årsak til at elevane gjer det betre her kan vera på grunn av at det var brukt desimaltal i staden for brøk. Desimaltalsystemet er meir brukt for å uttrykkja storleikar enn det brøk er (McIntosh, 2007), og difor har elevane truleg fleire erfaringar med desimaltala enn det dei har med brøk.

Det kan sjå ut som at målingsdivisjon er ukjent for mange elevar. Ei årsak til dette kan vera at denne typen divisjon vert mindre vektlagd i skulen enn det delingsdivisjon vert (ibid.). 13 elevar svarar ikkje på denne oppgåva. Dette utgjer 40,6% av respondentane. Ein elev skriv på svararket sitt: *Sorry, men hjernen min klarer bare ikke å lage tekstoppgaver! Jeg har alltid strevd med det!* E6 svarar fylgjande på spørsmål om han greier å sjå føre seg ein situasjon frå dagleglivet som passar til t.d. $4 : \frac{1}{2}$: *Nei, det anar eg ikkje. Det greier eg ikkje å sjå for meg*. Den same tendensen finn vi òg hjå Brekke & Tinnes (2001). Her er det 40% av grunnkurs-elevane som ikkje gjev svar på oppgåva der ei rekneforteljing til 4 : 0,5 skulle lagast.

Det er seks elevar som prøver å laga ei rekneforteljing, men i ein urealistisk kontekst eller med ufullstendige opplysingar. I følgje Brekke & Tinnes (2001) kan det tyda på at elevane ikkje er vane med denne typen oppgåve frå ungdomsskulen.

Fem elevar lagar ei rekneforteljing til $4\frac{1}{2} : 4$. Desse elevane tek i bruk delingsdivisjon, ein type divisjon dei fleste har erfaringar med (McIntosh, 2007) og som er naturleg å nytta når divisor er eit heilt tal (Birkeland et al., 2011). Ein elev lagar ei subtraksjonsforteljing, ein elev reknar ut divisjonsstykket og ein elev set reknestykket inn i ein kontekst på skulen; eit reknestykke i ein matematikktime. Det kan, i følgje Brekke & Tinnes (2001), tyda på at rekneoperasjonar i praktiske oppgåver er problematiske for desse elevane.

I etterpåklokskapens lys burde dette reknestykket òg vore ein del av oppgåvene 35. Sidan so få elevar greier å laga ei rekneforteljing hadde det vore interessant å sjå kor mange elevar som likevel hadde greidd å rekna ut dette reknestykket. McIntosh (2007) påpeikar at å kunna rekna eit reknestykke ikkje nødvendigvis vil føra til at ein veit korleis dette skal brukast i praktiske samanhengar.

Oppgåve 24

Ein stafettrunde er $\frac{1}{8}$ km. Kvar deltakar spring ein runde kvar. Kor mange deltakarar må vera med for å springa ein totaldistanse på $\frac{3}{4}$ km? Forklar korleis du tenkjer.

Rett svar: 6	**24**
$\frac{6}{8}$ deltakar	1
Ikkje svart:	7

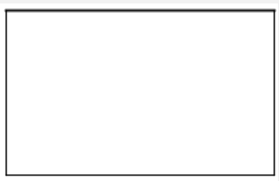
Denne oppgåva er henta frå Hart et al. (1984) og testar om eleven forstår rekneoperasjonane og har ein tankemodell for målingsdivisjon. 24 elevar svarar rett på denne oppgåva. Dette utgjer 75% av respondentane. I Hart et al.(1984) svarar 57% av 14-15åringane rett her. Dei fleste elevane som har svara rett på denne oppgåva har brukt kunnskap om ekvivalente brøkar for å løysa ho. E3 seier fylgjande: *Eg trur eg utvida brøken,* $\frac{3}{4}$ *vart til* $\frac{6}{8}$*. Og eg visste at dei skulle springa* $\frac{1}{8}$ *km kvar. Då måtte det vera seks deltakarar med for å springa* $\frac{6}{8}$ *km.*

Ein finn òg andre variantar av å bruka kunnskap om ekvivalente brøkar. Ein elev gjer $\frac{1}{8}$ om til $\frac{0,5}{4}$, og finn ut at ein må multiplisera det med seks for å få $\frac{3}{4}$, medan ein annan elev utvidar kvar av brøkane til 32-delar, for so å dela dei på kvarandre etterpå. Desse strategiane, der ein gjer bruk av ekvivalente brøkar, finn ein òg i undersøkinga til Hart et al. (1984). Ein elev finn ut kor mange meter det er i $\frac{1}{8}$ km og $\frac{3}{4}$ km og resonnerer seg på dette viset fram til kor mange rundar ein må ha.

På den tilsvarande reine rekneoppgåva utan kontekst **(oppgåve 35c: $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$)** var det òg 24elevar som svara rett, men same strategirikdom fann eg ikkje her. Alle brukte den velkjende standardalgoritmen der ein snur den bakre brøken for so å multiplisera teljar med teljar og nemnar med nemnar. Elevane viser prosedyreforståing. Her ser vi eit døme på at ei oppgåve gjeve i ein kontekst kan opna opp for bruk av fleire strategiar enn oppgåver gjeve i eit reint symbolspråk. Dette kom òg fram hjå Hart et al. (1981). Dei meiner oppgåver gjeve i ein kontekst kan gje meir meining for elevar.

Ulike typar feil vart gjort hjå elevane som ikkje svara rett på denne oppgåva. To elevar snur den første brøken, for deretter å multiplisera teljar med teljar og nemnar med nemnar. I følgje McIntosh (2007) er dette er ei vanleg misoppfatning når det gjeld divisjon av brøk. Ein elev multipliserer brøkane i staden for å dividera dei, og ein elev set brøkane på samnemnar, for so å subtrahera dei. Her ser vi igjen døme på at ulike prosedyrar vert blanda saman.

Oppgåve 29: Arealet = $\frac{1}{3}$ kvadratcentimeter. Bredda = $\frac{3}{5}$ cm. Kva er lengda av rektangelet?



$\frac{3}{5}$ cm

Lengde

Rett svar: $\frac{5}{9}$	**5**
0,55	**2**
Utvidar brøkane til $\frac{5}{15}$ og $\frac{9}{15}$ eller gjer dei om til desimaltal. Stoppar opp.	8
$\frac{4}{15}$	2
$\frac{9}{5}$	2
0,198, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{15}$ eller $\frac{6}{10}$	4
Ikkje svart:	9

Oppgåve 29 er henta frå Hart et al. (1984). I denne oppgåva er dividend mindre enn divisor, og ei mangel på forståing for brøk som kvotient kan avslørast her. Moglege feil og misoppfatningar kan vera at elevar trur at oppgåva ikkje kan løysast sidan talverdien på arealet er mindre enn talverdien på bredda. Ei oppfatning om at multiplikasjon gjer større og divisjon gjer mindre kan altså koma fram.

Sju elevar har svara rett på denne oppgåva, fem av dei gjev opp lengda på rektanglet som brøk, dei to andre gjer dei oppgjevne brøkane om til desimaltal før dei reknar ut lengda. På den tilsvarande reine rekneoppgåva utan kontekst **(oppgåve 35h: $\frac{1}{3} : \frac{3}{5}$)** svara 21 elevar rett. Alle desse elevane nyttar kjende divisjonsalgoritmar og viser på den måten prosedyreforståing. Her ser vi eit døme på at konteksten kan vera eit hinder i forståinga av brøkrekning.

På oppgåve 29 utvidar åtte elevar brøkane til $\frac{5}{15}$ og $\frac{9}{15}$ eller gjer dei om til desimaltal. Deretter stoppar det opp for dei. På eit av svararka står det fylgjande: *Bredden er større enn arealet, og det går jo ikke???* E8 seier fylgjande i intervjuet: *Eg prøvde faktisk å finna det ut med desimal, men det var ingenting her som gav meining. Arealet var mindre enn lengda på sida, so då gav eg opp*. Denne måten å tenkja på finn vi òg hjå Hart et al. (1981). Her kan det vera tanken om at multiplikasjon gjer talet større og divisjon gjer talet mindre som kjem fram eller at ein ikkje kan dela eit lite tal på eit stort tal. Dividend er mindre enn divisor, noko som kan vera vanskeleg å forstå om ein har avgrensa erfaring med divisjon. På den tilsvarande reine rekneoppgåva var det to elevar det stoppa opp for etter at brøkane hadde fått same nemnar. Ånestad et al. (2014) nemner at grunnen til at elevane stoppar opp på ei slik oppgåve kan vera mangel på forståing for brøk som kvotient (sjå punkt 2.1.2.4. – Brøk som kvotient).

Ei potensiell årsak til problema med å løysa oppgåve 29 kan òg vera at dei ikkje hugsa formel for areal av eit rektangel. Eg tok difor med ei liknande oppgåve som vart gjeve rett framføre denne oppgåva, men då med heile tal på både areal ($10cm^2$) og lengde (4cm). Her skulle elevane finna bredda av rektanglet. 25 elevar svara rett på den oppgåva, eit funn som gjer at ein kan sjå bort frå manglande kunnskap om denne formelen som einaste årsak til at so få elevar svara rett på oppgåve 29. Eit par av elevane som svara rett på oppgåve 28, og feil på oppgåve 29 (subtraksjonstenking; bredde – areal) vart i intervjuet gjort merksam på inkonsistensen i svara dei hadde gjeve. E3 svara då fylgjande: *På oppgåve 28 såg eg jo svaret utan at eg måtte rekna, medan på oppgåve 29 har vi ikkje heile tal, so eg måtte tenkja på ein annan måte. Og det mest naturlege var å sjå på forskjellen på tala.* Ein slik inkonsistens finn ein òg hjå eit par andre elevar som svara rett på oppgåve 28, men feil på oppgåve 29 (bredde : areal). Her kan det på ny vera misoppfatninga om at ein ikkje kan dela eit lite tal på eit stort tal som kjem fram.

Ni elevar svara ikkje på denne oppgåva. E1 seier fylgjande: *…men på oppgåve 29 so vart eg rett og slett redd av brøken. Difor klarte eg det ikkje*. Fleire elevar uttrykkjer redsle for brøk. Det er noko dei ikkje forstår og som ikkje gjev meining. I følgje Botten (1999) kan nettopp frykta for å mislukkast vera ei av årsakene til at ein mislukkast.

Nokre elevar prøver å unngå brøk ved å gjera dei om til desimaltal, for so å arbeida vidare med dei. E5 seier fylgjande:

> *Problemet på oppgåve 29 var at det var brøk. Eg veit ikkje korleis eg skal gjera det om til tal.* $\frac{3}{5}$ *er 0,6 og* $\frac{1}{3}$ *er 0,33. Men so stoppa det opp. Det er ulike brøkar og so skal det gjerast om til vanlege tal og so skulle eg rekna vidare med det. Eg hugsa rett og slett ikkje korleis eg skulle gjera det.*

Andre har problem med å akseptera brøk som tal og svar på oppgåver. Då E1 på slutten av samtalen deler $\frac{1}{3}$ på $\frac{3}{5}$ og får svaret $\frac{5}{9}$, utbryt han spontant: *Skulle eg ha svart at det var* $\frac{5}{9}$ *cm? Skulle eg ikkje fram til eit slikt tal* (peikar på 2,5) *eller eit vanleg tal for å seia det slik? Skal svaret verta ein brøk? Eg tenkte i alle fall at vi måtte få eit svar som desimaltal*. Dette finn ein òg igjen hjå Hart et al. (1981). Her var det fleire elevar som prøvde å unngå å nytta brøk som svar på oppgåver.

4.3. Ei kort oppsummering

Undersøkinga viser eit stort spenn både når det gjeld dugleikar i og forståing av brøk og brøkrekning. Prosedyreforståing gjer seg til kjenne ved at:

- Mange elevar nyttar i stor grad algoritmar ved operasjonar på brøk. Dei meistrar reint teknisk ulike prosedyrar, men greier ikkje forklara kva dei gjer og kvifor dei gjer det dei gjer.
- Elevar viser faktiske dugleikar til å laga ekvivalente brøkar, men manglar forståing for å ta denne kunnskapen i bruk.
- Mange elevar har fokus på reglar og algoritmar, og skjønet er knytt opp mot å hugsa ulike prosedyrar for ulike oppgåver; det er oppskrifter dei har pugga.

Feil som kjem fram når det gjeld prosedyreforståing er ymse feil knytt til utføring av prosedyrar, som t.d. at ulike reglar vert blanda saman. Men utfordringa kan òg vera ufullstendige løysingar; det stoppar opp for ein elev når innlærte prosedyrar ikkje fungerer.

Strukturforståing gjer seg til kjenne ved at:

- Nokre elevar greier å forklara enkelte prosedyrar. Desse elevane ser samanhengar, greier å setja saman prosedyrar og kan bruka brøkomgrepet i ulike samanhengar.
- Nokre elevar greier å veksla mellom ulike representasjonar av brøk, forstår tettleiken i dei rasjonale tala og greier å skilja mellom additive og multiplikative situasjonar.

Men strukturforståinga er likevel mangelfull hjå mange elevar. Feil som kjem fram når det gjeld strukturforståing er t.d. at dei ikkje greier forklara ulike prosedyrar, som t.d. algoritmar for brøkoperasjonar, eller at dei ikkje forstår i kva samanhengar ulike prosedyrar kan takast i bruk. I undersøkinga mi kjem òg mange kjente misoppfatningar fram. Desse misoppfatningane fortel om store manglar i brøkforståinga.

Feil og misoppfatningar som kjem fram i mi undersøking er:

- Nokre få elevar har ei oppfatning om at brøkdelane ikkje treng ha same storleik. Fokuset ligg heller på kor mange delar den heile er delt inn i. Dei er ikkje alltid bevisst på kva som er eininga og viser liten fleksibilitet i å veksla mellom ulike einingar.
- Nokre få elevar trur at to likeverdige brøkar er to ulike tal, fleire elevar trur ein har multiplisert ein brøk med to når ein har multiplisert teljar og nemnar med to, og atter andre meiner at to likeverdige brøkar kan ha same verdi, samstundes som den eine brøken t.d. kan vera dobbelt so stor som den andre.
- Når to brøkar skal samanliknast, er det fleire som har ei oppfatning av at ein liten nemnar gjev ein stor brøk – uavhengig av teljaren. Nokre ser på differansen mellom teljar og nemnar. Har to brøkar same differanse, er dei like store.
- Når det gjeld brøk og forhold, so nyttar om lag ein tredel av elevane seg av additiv tenking i staden for multiplikativ tenking i tolking av relasjon mellom teljar og nemnar. Ein firedel av elevane oppfattar eit del-del-forhold som eit del-heile-forhold.
- Fleire elevar blandar saman det å måla brøkdelen av ei linje og brøk som punkt på ei linje. Nokre verkar lite van med å plassera brøkar på ei tallinje utan inndelingar, og nokre forstår ikkje at ein einingsbrøk skal kunna brukast gjentekne gongar for å bestemma ein avstand frå eit startpunkt.

- Fleire elevar manglar ei heilskapleg tenking kring dei rasjonale tala; tettleiken i dei rasjonale tala gjeld for desimaltal, men ikkje for brøk.
- Ikkje alle elevane har forstått rekneoperasjonane, dei ser ikkje samanheng mellom brøk og vanleg divisjon, og fleire har ikkje ein fullstendig tankemodell for multiplikasjon og divisjon. Målingsdivisjon verkar ukjent for mange elevar, like eins å tolka multiplikasjonsteiknet som «av». Nokre meiner at multiplikasjon gjer svaret større og divisjon gjer svaret mindre.

5. Diskusjon og konklusjon

Eg har, som nemnt i kapittel 4, vald ei open tilnærming til datamaterialet for å få eit meir heilskapleg bilete av brøkforståinga hjå elevane. I dette kapittelet vil eg først diskutera nokre av funna frå undersøkinga mi; utfordringar som var gjennomgåande eller som fortener særskild merksemd. Deretter vil eg diskutera kor vidt metoden og teorien var eigna til å måla brøkforståinga hjå elevane. Til sist kjem eg med nokre tankar for undervisninga og forslag til vidare forsking.

5.1. Diskusjon av resultat

Denne undersøkinga har vorte gjennomført i ein klasse med elevar frå heile landet. Elevane hadde ein gjennomsnittskarakter i matematikk frå 10. klasse (standpunkt) på 4,8. Ein finn døme på elevar som viser prosedyreforståing og elevar som viser strukturforståing. Men forståinga er sårbar og under press. Det skal lite til før elevane vert usikre. Ulike feil og misoppfatningar kjem då til syne. Ei mogleg forklaring på dette kan vera at elevane fortsatt har ein syntetisk modell (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning) av brøkomgrepet. Vamvakoussi & Vosniadou (2010) skildrar dette som eit mellomstadium i utviklinga av forståing, frå bakgrunnskunnskap til ei meir vitskapleg forståing av omgrepet. Forståing av eit omgrep er altså ikkje ein «alt-eller-ingenting-situasjon». Ulike feil og misoppfatningar kan vera syntetiske modellar der elevane prøver å assimilera ny informasjon i den eksisterande kunnskapen (ibid.), og kan slik vera med på å gje eit innblikk i ei manglande strukturell brøkforståing hjå elevar.

Eg vil i dette kapittelet fokusera på nokre av desse utfordringane. Kor stoppar det opp for elevane? Kva feil og misoppfatningar kjem då fram? Kva kan årsakene til dette vera? Eg tenkjer at det er viktig å ha god kjennskap til dette, slik at ein som lærar kan hjelpa elevar best mogleg når dei startar i den vidaregåande skulen. Eit solid brøkomgrep er viktig, då brøk og brøkrekning inngår i mange emne i matematikk. Diskusjonen skjer på bakgrunn av eigne funn, andre forskingsresultat og læringsteoriar.

5.1.1. Dugleikar utan forståing

I undersøkinga mi kjem det fram at for fleire elevar handlar brøkoperasjonar om reglar og prosedyrar ein må hugsa, utan at dei har skjøna desse algoritmane. Desse elevane har prosedyreforståing, men ikkje strukturforståing. Dette inntrykket vart forsterka då elevane seinare i ein matematikktime skulle rekna ut nokre brøkoppgåver og forklara framgangsmåten. Her får mange problem. Ti elevar greier å forklara kvifor ein utvidar brøkane slik at dei får same nemnar ved addisjon og subtraksjon av brøkar. For resten er dette uklart. Ingen av elevane greier å gje ei fullgod forklaring på algoritmane for multiplikasjon og divisjon. *«Vet ikke», «fordi det bare er sånn», «det er en regel vi har lært»*, er svar som ofte går igjen hjå elevane. Eit liknande resultat kom òg fram i Lindgren (2011) si undersøking av gymnaselevar si forståing av multiplikasjon og divisjon av brøk. Elevane nytta i stor grad algoritmar ved operasjonar på brøk, der forståinga var knytt opp mot å det å kunna hugsa ulike prosedyrar for dei ulike oppgåvene. Den strukturelle forståinga var ikkje like godt utvikla. Dette samsvarar med Sfard (1991) sin teori om at den operasjonelle forståinga kjem før den strukturelle forståinga i utviklinga. Men for å forstå eit omgrep fullt ut, må ein kunna sjå det både operasjonelt og strukturelt, og dette er ein lang, vanskeleg og tidkrevjande prosess som mange elevar strevar med (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning).

McIntosh (2007) rettar merksemda mot skulen, som han meiner har vore for oppteken av å læra bort reknereglane i staden for å hjelpa elevane til å forstå kva brøk er. Dette kan føra til at ein både får lita forståing for tala det skal opererast på og lita forståing for kvifor prosedyrane fungerer (ibid.). No kan det vera fleire grunnar til at instrumentell undervisning kan skje i skulen; både manglande kunnskap hjå læraren til å undervisa elevane slik at dei kan få ei strukturell forståing og at det kan vera lettare å gå rett til reglane for å nå raske og kortsiktige resultat med tanke på tidspress i høve til eksamen (Skemp, 1976). Men det kan òg vera at det er eleven som ynskjer å få ei oppskrift på korleis ei oppgåve skal løysast då dette raskare kan føra fram til rett svar, sjølv om læraren ynskjer at elevane skal forstå dei grunnleggjande omgrepa og korleis ting heng saman (ibid.).

Ved ei prosedyreforståing skal det lite til før det stoppar opp for ein elev – særleg i oppgåver der dei innlærte reglane ikkje kan brukast direkte (McIntosh, 2007). Dette kjem fleire gongar fram i undersøkinga mi. Alle elevane greier t.d. å utvida $\frac{2}{7}$ til $\frac{4}{14}$, men om lag $\frac{1}{3}$ av elevane greier ikkje å utvida brøken vidare til $\frac{10}{35}$ (oppgåve 4). Multiplikasjonsstrategien som er brukt av desse elevane for å finna den første brøken, fungerer ikkje når dei skal finna den andre brøken, truleg på grunn av at multiplikasjonsfaktoren ikkje er eit heilt tal. Utsegn som: «*fire går jo ikkje opp i 10*» og «*eg veit ikkje korleis eg skal gå frå fire til 10*» kan tyda på at dei ikkje er vane med dette. Når standardprosedyren for å utvida ein brøk ikkje fungerer, stoppar det altså opp for fleire; fleksibiliteten som ligg i å veksla mellom ulike skrivemåtar for same verdi manglar. Dette kom endå tydlegare fram då elevane skulle utvida $\frac{9}{12}$ til $\frac{12}{16}$ (oppgåve 17). Halve klassen får problem her. Dei strevar m.a. med å setja saman ulike prosedyrar og veksla mellom ulike representasjonar av same tal, noko som er eit av kjenneteikna på Sfard sitt kondensasjonsnivå (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning). So lenge elevane berre har lært ein prosedyre utan å forstå han, vil det vera vanskeleg å få innsikt som svarar til dei høgare nivåa i Sfard sin teori, og dermed få ei solid forståing av brøkomgrepet. I tillegg kan elevar lett oppleva operasjonane som meiningslause når ein manglar den strukturelle forståinga (Sfard, 1991), noko som òg kjem fram fleire gongar i datamaterialet mitt.

Ei prosedyreforståing vil kunna føra til at ein elev er avhengig av å hugsa dei ulike reglane til ei kvar tid, for so å vera i stand til å ta dei i bruk i passande situasjonar. Men rekneregler ein ikkje forstår, er mislykka på lang sikt (McIntosh, 2007). Dei vil lett verta gløymd; det er lausrive kunnskap som ikkje inngår i ein kognitiv struktur. Piaget kalla dette figurativ kunnskap (sjå punkt 2.2.2.1. – Den kognitive konstruktivismen). Når kunnskap er lagra i minnet som isolerte fakta og detaljar, er faren stor for at ein blandar saman ulike reglar, eller lagar seg sine eigne reglar. Dette finn ein òg døme på i datamaterialet mitt. Fleire elevar skriv at $\frac{9}{12} = \frac{12}{9}$ med grunngjevinga at å snu brøken var den einaste regelen dei kom på at dei kunne bruka. Dette kan minna om ein liten del av divisjonsalgoritmen. Det kjem tydeleg fram at brøk handlar om ulike reglar som må hugsast. I tillegg finn vi jo eit slags mønster her, tala i teljar og nemnar har berre bytta plass.

Eit anna døme finn vi når ein elev skal multiplisera $\frac{2}{9}$ med $\frac{5}{8}$ (oppgåve 35b), og snur den siste brøken, for so å summera teljar med teljar og nemnar med nemnar. Her er det fleire algoritmar som vert blanda saman; ein bit av divisjonsalgoritmen – han snur den siste brøken, ein bit av multiplikasjonsalgoritmen – han treng ikkje bry seg med fellesnemnar, og ein bit av addisjonsalgoritmen – han adderer saman tala. Ei forklaring på dette kan vera at brøkreglane har vorte innført før elevane har etablert den grunnleggjande forståinga for dei underliggjande omgrepa (Birkeland et al., 2011). Mange elevar er t.d. kjend med ein modell for multiplikasjon som gjenteken addisjon og ein modell for divisjon som deling av ei mengde. Men desse modellane er ikkje gode nok for å byggja ei solid forståing av operasjonar på brøk (Lamon, 2005). I mi undersøking kjem det m.a. fram at fleire elevar har avgrensa erfaringar med multiplikasjon og divisjon. Dei er ikkje vane med å tolka multiplikasjon som «av». Dette kjem tydeleg fram når elevane skal rekna ut $\frac{1}{6}$ av $\frac{3}{4}$ (oppgåve 35d). Ni av 32 elevar greier dette.

Nokre tolkar «av» som subtraksjon, medan andre tolkar «av» som divisjon. Mange svarar ikkje på oppgåva og gjev uttrykk for at dei ikkje har vore bort i ei slik oppgåver før; ho gjev inga meining. Elevane har òg lita erfaring med målingsdivisjon. Fem av 32 elevar greier å omsetja rekneuttrykket $4\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ til ein realistisk situasjon (oppgåve 27). Den same tendensen finn ein hjå Brekke & Tinnes (2001). I den undersøkinga var det 23% av elevane som greidde å laga ei rekneforteljing til 4:0,5. Ei årsak til dette kan vera at målingsdivisjon er mindre vektlagd i skulen enn det delingsdivisjon er (McIntosh, 2007).

5.1.2. Feil bruk av idear knytt til heile tal

I datamaterialet mitt kjem det ofte fram at fleire elevar overfører kunnskap om bruk av dei naturlege tala til brøkrekning. Brøk vert t.d. ikkje sett på som ein einskap, men som to tal som kan handsamast kvar for seg. Dette kan føra til at elevane gjer feil både når brøk skal samanliknast og ved operasjonar med brøk (Petit et al., 2010). I undersøkinga mi kjem m.a. fylgjande feil og misoppfatningar knytt til denne heiltalstenkinga fram:

- brøk med den minste differansen mellom teljar og nemnar er størst
- brøk med den minste nemnaren er størst (teljaren har lite å seia for storleiken til brøken)
- ekvivalente brøkar kan verta sett på som ei rekkje med teljarar og ei rekkje med nemnarar
- det finst ingen brøkar mellom to «påfølgjande» brøkar ($\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$)
- ved addisjon av brøkar vert teljar addert med teljar og nemnar med nemnar
- multiplikasjon gjer større og divisjon gjer mindre
- vi kan ikkje dela eit lite tal på eit stort tal

Alle desse misoppfatningane er velkjende, og kjem m.a. fram i undersøkinga hjå Hart et al. (1981); McIntosh (2007); Nilsen (2008); Reys et al. (1995c); Lindegren et al. (2012); Pearn & Stephens (2004); Petit et al. (2010); Stafylidou & Vosniadou (2004).

Ei årsak til at elevar ukritisk overfører kunnskap om heile tal til brøkrekning, kan vera at i møte med det ukjende vil ein prøva å gripa tak i den kunnskapen ein har frå før. Ein elev har som bakgrunnskunnskap ei oppfatning om kva eit tal er og korleis det oppfører seg m.o.t. ordning og operasjonar før dei lærer om brøk (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Når talomgrepet so skal utvidast, vil den nye informasjonen ikkje passa med elevar si forståing av kva eit tal er. Dei eksisterande kognitive skjemaa må endrast slik at den nye informasjonen kan passa inn. Dette skjer, i følgje Piaget, ved assimilasjon og akkomodasjon. Denne prosessen kan vera vanskeleg, tidkrevjande og motstridande (ibid.). Feil og misoppfatningar kan difor oppstå når elevar prøver å assimilera ny informasjon i den eksisterande kunnskapen (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Ei anna årsak til at elevar brukar kunnskap om dei heile tala i situasjonar som ikkje passar, kan liggja i undervisninga dei har fått (Petit et al., 2010). Dersom ein elev berre har vorte utfordra med modellar av brøk som del av eit heile, kan dette forsterka denne heiltalstenkinga. Det kan gjelda både i situasjonar der eleven skal finna ein brøkdel frå ei mengde med objekt der nemnaren i brøken er lik talet på objekt i mengda, og i situasjonar der eleven skal finna brøkdelen av eit område der nemnaren er lik talet på delar den heile har vorte delt opp i (ibid., s.34). Det er difor viktig at ein elev, for ikkje å forsterka denne heiltalstenkinga, òg får erfaringar med t.d. å finna brøkdelen av ei mengde der nemnaren er ein faktor i talet på delar i den heile mengda. McIntosh (2007) meiner heiltalstenkinga berre kan rettast på ved å bruka god talforståing – bygd på erfaringar med ulike modellar av brøk. Skal ein elev sjå på brøk som ein storleik, kan variasjon i representasjonsformene vera til hjelp. Er ein utrygg på brøkomgrepet, vil ein lett kunna ta i bruk reknereglar som gjeld for dei naturlege tala (Lindegren et al., 2012; Hart et al., 1981).

5.1.3. Kva er den heile?

Alle brøkar er avhengig av ei eining, og det er viktig å ha klart for seg kva som er «ein heil» (Lamon, 2005). I datamaterialet mitt kjem det fram at nokre elevar er usikker på kva som er den heile når tallinja er nytta som modell. Når elevar skal plassera $\frac{3}{4}$ på tallinja, vert det plassert på $\frac{3}{4}$ av heile linja (oppgåve 13). Dei tolkar avstanden frå null til fire som det heile, i staden for å sjå at tallinja inneheld fire heile. Dette finn ein òg igjen hjå Kerslake (1986), og det er ein vanleg feil å gjera når ein har ei tallinje med gjentakande heile einingar (Petit et al., 2010).

Ei mogleg forklaring på dette kan vera at elevane har mindre erfaring med tallinja som modell. Tallinja skil seg m.a. frå andre brøkmodellar ved at eininga er representert ved ei lengde, at ho har symbol for å definera eininga og at einingane er kontinuerlege, dvs. at det er ingen visuell skilnad mellom dei (ibid., s. 99-100). Ei tallinje inneheld ofte meir enn ein heil, og då kan det vera lett å blanda saman det å måla ein brøkdel av ei linje og brøk som punkt på ei linje. Dersom ein elev har ein for snever tankemodell for brøk, t.d. at erfaringane er knytt opp mot brøk som del av eit heile, vil det vera naturleg å overføra denne kunnskapen til tallinja (Heron, 2014). Ein slik tankemodell for brøk kan igjen føra til at det vert vanskeleg å justera den mentale konstruksjonen slik at han passar med notasjonen brøk som tal (Kerslake, 1986).

Det er interessant å merka seg at når tala vert større enn ein, både når ein snakkar om uekte brøk og blanda tal, går desse elevane bort frå tolkinga av at ein skal finna brøkdelen av heile linja. Ei årsak til dette kan vera at i ein modell av brøk som del av eit heile, er brøken ei samanlikning mellom talet på delar ein har og det totale talet på delar den heile er delt opp i. I dette perspektivet må teljaren i brøken vera mindre enn nemnaren (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Når brøken vert større enn ein heil, går elevane bort frå denne modellen og over til brøk som målestorleik.

5.1.4. Oppdelingar

Å kunna dela opp eit heile eller ei mengde er grunnleggjande i brøkforståinga (Petit et al., 2010). I datamaterialet mitt kan ein sjå at fleire elevar strevar med dette. Nokre få elevar ser ikkje på storleiken på delane, men på kor mange delar det er, som t.d. i oppgåve 1. Ei misoppfatning om at brøkdelane ikkje treng ha same storleik kjem fram. Dette finn ein òg igjen hjå Petit et al. (2010). McIntosh (2007) meiner at kvardagsspråket kan vera ei årsak til dette – som t.d. i uttrykk som «den største halvdelen».

Eit anna døme som viser ei oppfatning om at brøkdelane ikkje treng ha same storleik, kjem fram når ein elev skal samanlikna $\frac{5}{4}$ og $\frac{7}{6}$ (oppgåve 2b). Eleven meiner brøkane er like store sidan begge inneheld ein heil og ein «bit» til. At «bitane» har ulik storleik spelar inga rolle. Svaret vert gjeve som ein restbit; eleven set ikkje namn på brøkdelane. Dette kan tyda på manglande forståing for brøk (Hart et al., 1985).

Ein kan òg sjå at tanken om ei rettferdig deling heller ikkje alltid vert overført til tallinja (oppgåve 22). Fleire elevar har ikkje full forståing for at avstanden mellom kvar strek på ei tallinje må vera den same. Ein einingsbrøk skal kunna brukast gjentekne gongar for å bestemma avstanden frå eit startpunkt, noko fleire elevar strevar med. Dette samsvarar med resultata som kom fram hjå Heron (2014). Den proporsjonale tenkinga når tallinja er nytta som modell har vist seg vera vanskeleg for mange elevar (ibid.).

I datamaterialet mitt kan ein sjå at nokre elevar kan streva med å identifisera ein brøkdel av eit heile når heila er delt inn i delar av ulik storleik. Dei er då ikkje alltid bevisst på kva som er eininga, noko som kan føra til at teljar og nemnar får ulike einingar. Dei kan òg visa liten fleksibilitet i å veksla mellom ulike einingar, noko som kom fram i oppgåve 11. Eit svar som at $\frac{4\frac{1}{2}}{12}$ av figuren er fargelagt er eit døme på dette. Her har elevane nytta kvadratet som eining, men dei greier ikkje å gjera det om til mindre delar, sjølv om kvart kvadrat består av to like store trekantar. Ein slik manglande fleksibilitet i å veksla mellom dei to einingane som er oppgjeve finn ein òg igjen hjå Hart et al. (1981). Eit av kjenneteikna på Sfard (1991) sitt kondensasjonsnivå er m.a. å kunna veksla mellom ulike representasjonar av eit omgrep, noko desse elevane strevar med.

Det kjem òg fram i datamaterialet mitt at fleire elevar manglar erfaringar med oppdeling av brøkar, då dei ikkje alltid ser kva samanhengar ein tek dette i bruk. To ekvivalente brøkar er to ulike namn/ symbol for same tal, men dette talet kan skrivast på uendeleg mange fleire måtar. Erfaringar med og forståing for dette kan takast i bruk når t.d. brøkar skal rangerast og samanliknast. Dette vart i nokon grad gjort i mi undersøking. Men ikkje alle elevar har ei forståing for at to likeverdige brøkar er uttrykk for same storleik. Nokre elevar trur ein har multiplisert ein brøk med to når ein har multiplisert teljar og nemnar med to. Dei ser ikkje at ein har både multiplisert og dividert med to, so talet er uendra. I følgje Petit et al. (2010), kan elevar tru at det ikkje kan vera same tal når multiplikasjon inngår i ein prosedyre. Andre elevar gjev uttrykk for at t.d. $\frac{2}{5}$ og $\frac{4}{10}$ har same verdi, samstundes som $\frac{4}{10}$ er dobbelt so stor som $\frac{2}{5}$. Denne misoppfatninga finn ein òg igjen hjå Kerslake (1986). Å forstå likeverdige brøkar krev m.a. at ein er trygg på at $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ osb., og at ein kan multiplisera to brøkar og forstå at $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = (1 \cdot 3):(2 \cdot 3)$ (McIntosh, 2007). Andre elevar igjen viser dei har ei dynamisk oppfatning av talomgrepet. Nokre brøkar er ikkje like, men dei kan verta like. Dette kjem fram i utsegn som at $\frac{2}{8}$ er ikkje $\frac{1}{4}$, men det kan verta $\frac{1}{4}$. Ei årsak til dette kan vera at elevane ikkje tolkar = som «er» eller «er det same som», men som «vert» (Utdanningsdirektoratet, 2013a). Likskapsteiknet er eit signal om at ein skal utføra ein rekneoperasjon, det er ein prosess.

Erfaringar med oppdeling av brøkar er òg naudsynt for å forstå tettleiken i dei rasjonale tala. 13 elevar i mi undersøking veit at det er uendeleg mange brøkar mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$ og kan namngje to brøkar i dette intervallet (oppgåve 21). Desse elevane utvidar dei oppgjevne brøkane for å finna brøkar som ligg imellom. Det mest vanlege feilsvaret er at det ikkje finst brøkar i dette intervallet. Ca. 28% av elevane gjev dette svaret. Ingen av desse elevane kjem på at dei kan utvida brøkane for å sjå at det ligg brøkar mellom her. Desse funna samsvarar m.a. med funna hjå Nilsen (2008) og Reys et al. (1995b). Kerslake (1986) påpeikar at sjølv om ein elev greier å laga ekvivalente brøkar, so betyr ikkje det at han kan bruka denne dugleiken til å løysa andre problem – t.d. å finna brøkar mellom to vilkårlege brøkar.

Tettleiken i dei rasjonale tala er vanskeleg for mange elevar (Petit et al., 2010). Undersøkinga mi viser at dei aller fleste har forstått at det er uendeleg mange tal i eit intervall der endepunkta er oppgjeve som desimaltal. Men dette greier dei ikkje overføra til intervall der endepunkta er oppgjeve som brøkar, noko som samsvarar med funn hjå Vamvakoussi & Vosniadou (2010). At brøk og desimaltal vert handsama ulikt, er eit døme på eit syntetisk omgrep (sjå punkt 2.2.3. – Omgrepsdanning). Brøk og desimaltal vert ikkje sett på som ulike representasjonar for same tal, men som om dei var ulike slags tal. Elevane viser altså her at dei ikkje har greidd å reorganisera kunnskapen sin om kva eit tal er.

Erfaringar med oppdelingar av brøk er òg naudsynt for å forstå operasjonar med brøk (Petit et al., 2010). I datamaterialet mitt kjem det fleire gongar fram at mange elevar ikkje forstår kvifor ein set brøkane på samnemnar ved addisjon og subtraksjon av brøkar. Det er berre ein regel dei har lært. Når ein ikkje forstår algoritmane, vil kunnskapen ofte vera avhengig av minnet (ibid.). Og det ein ikkje forstår, er lausrive kunnskap som lett vert gløymt (McIntosh, 2007). Sjå elles punkt 5.1.1. – Dugleikar utan forståing.

5.1.5. Vanskar med multiplikativ tenking

I datamaterialet mitt kjem det fram at nokre elevar fokuserer på ei additiv tolking av relasjonen mellom teljar og nemnar i staden for ei multiplikativ tolking – særleg når vi har med brøk som forhold å gjera. Når kakao og mjølk skal blandast og ein skal avgjera kva sjokolademjølk som er sterkast (oppgåve 20), ser ca. 28% av elevane på skilnaden mellom talet på skeier kakao og talet på desiliter mjølk. Det er ei skei meir enn desiliter i begge blandingane, difor må dei vera like sterke. Ein elev presiserer at vi får to like store brøkar. Dette samsvarar med funn hjå Brekke & Tinnes (2001). Ei ukorrekt additiv tenking finn vi òg igjen i oppgåve 26 der eit rektangulært databilete skal forstørrast opp. Sju elevar ser anten på skilnaden mellom høgdene i rektangla, og meiner det då må vera same skilnad på breddene, eller dei ser på skilnaden mellom bredda og høgda på det vesle biletet, og tenkjer det må vera same differanse mellom bredda og høgda på det store biletet. Som tidlegare nemnt kan dette tyda på at elevane manglar erfaringar med at ein figur vil endra form når ein adderer eit fast tal til sidene i figuren (Brekke & Tinnes, 2001).

Ei anna forklaring kan vera at elevar ikkje er medvitne om at to storleikar kan samanliknast på ulikt vis. Vi kan ha ei additiv samanlikning der ein ser på differansen mellom a og b, men oftast skjer ei samanlikning multiplikativt (Brown et al., 2010). Denne skilnaden er det viktig at elevar vert merksam på (Lamon, 2005). Ei multiplikativ tenking krev at ein må kunna finna eit forhold ut frå to korresponderande verdiar, og ein må kunna bruka dette forholdet for å finna ein ukjend verdi av ein variabel (Brown et al., 2010). Dette krev operasjonar med multiplikasjon og divisjon. Når eit omgrep som multiplikasjon skal utvidast, må elevane m.a. utvikla ei forståing for relasjon mellom tal. Ein modell for multiplikasjon som gjenteken addisjon er ikkje god nok for ei solid forståing av multiplikative strukturar (Lamon. 2005). Elevane må få ei grunnleggjande forståing for at vi har med ein relasjon mellom to mengder, og denne relasjonen endrar seg ikkje. Det kan verka som at nokre elevar i mi undersøking strevar med dette. Dette samsvarar òg med resultata hjå Brown et al. (2010). Dei peikar på undervisninga som mogleg årsak til dette, anten at ho ikkje har vorte relatert til ein elev si tidlegare forståing, eller at undervisninga ikkje har vara lenge nok. Multiplikative forhold har vist seg vera vanskeleg for mange elevar (McIntosh, 2007).

5.2. Diskusjon av metode og teori

I dette forskingsprosjektet har målet vore å få eit heilskapleg inntrykk av brøkforståinga hjå elevane. Kartleggingstesten og intervjua har til saman gjeve meg eit meir samansett bilete av det eg forska på, og ny innsikt til bruk i eiga undervisning. Eg meiner dette har vore eigna metodar for undersøkinga mi.

I kartleggingstesten har eg gått bredt ut med ulike oppgåver retta mot sentrale aspekt ved brøk. Oppgåvene var meint å testa prosedyreforståing og strukturforståing, samt avdekka kva misoppfatningar ein kan finna hjå elevar på dette alderstrinnet. Av omsyn til omfanget på undersøkinga, har det ikkje vore mogleg å testa utfyllande alle sider ved ulike brøkaspekt. Etter piloten snevra eg inn fokusområdet noko. Eg valde å konsentrera meg om oppgåver som testa den grunnleggjande forståinga, då det i pilotundersøkinga kom fram at brøkforståing generelt var sårbar hjå elevane. Resultata på testen og intervjua i sjølve undersøkinga stadfesta at dette var ei riktig prioritering. Brøkforståinga i denne klassen var, som i piloten, sårbar, og manglande forståing for grunnleggjande aspekt ved brøkomgrepet kom fram hjå fleire elevar. Hovudfokus i arbeidet mitt har difor vore retta mot grunnleggjande brøkforståing, meir enn på brøk som basis for forståing i andre emne i matematikken.

Etter pilotundersøkinga valde eg å ta bort oppgåver som tok føre seg brøk i sannsyn og trigonometri. Det same gjaldt dei fleste oppgåver som omhandla brøk i algebra. Dette vurderer eg no som ei rett prioritering. I etterpåklokskapens lys burde kanskje òg dei siste oppgåvene om brøk i algebra vorte kutta ut. Eg har ikkje prioritert å gå i djupna på desse oppgåvene i analysekapittelet då dette representerer uttrykk som går ut over den grunnleggjande forståinga. Det kan vera vanskeleg å avgjera kor vidt feila faktisk kan skuldast manglande brøkforståing eller manglande forståing for skrivemåten til algebraiske uttrykk. Ut frå resultata på testen kan eg generelt seia at når variablar vart innført i eit uttrykk, gjekk talet på elevar som svara rett ned. Oppgåve 33 viser at fleire elevar strevar med å forkorta uttrykk når bokstavar representerer generaliserte tal, og at nokre av elevane truleg ikkje ser på desse uttrykka som brøkar i det heile. I oppgåve 34 kjem misoppfatninga om at ein skal addera teljarane for seg og nemnarane for seg ved addisjon av brøkar tydlegare fram hjå fleire elevar når det vert innført ein variabel x i uttrykket. Ei grunnleggjande forståing for tal og rekneoperasjonar er naudsynt om ein skal kunna gjera seg opp generelle tankar om resultat frå rekneoperasjonar, og dermed få eit grunnlag for generaliseringar i algebra (Utdanningsdirektoratet, 2013a).

Testen inneheld mange oppgåver, og i etterpåklokskapens lys ser eg at det er fleire oppgåver eg kunne ha kutta ut utan at grunnlaget for refleksjonar kring generell forståing av brøkomgrepet hjå elevane vart svekka. Nokre av oppgåvene i testen viste seg vera lite informative, noko som òg kan avsløra ein urøynd forskar.

Det var ro i klasserommet då den skriftlege testen vart teke, og konsentrasjonen hjå elevane var god. Hjå nokre få elevar oppstod det likevel slurvefeil på nokre av oppgåvene, noko som kan påverka validiteten for akkurat desse oppgåvene. Fleire elevar retta seg sjølve då dei i intervjua gjekk gjennom oppgåvene på nytt. Dette kan både skuldast ei litt for rask lesing i prøvesituasjonen og det kan skuldast at 1P-elevane hadde repetert brøk og brøkrekning før dei vart intervjua, noko som kan ha ført til at dei lettare såg feila sine. Men det illustrerer like fullt at kunnskapen sit laust.

Nokre oppgåver har fleire elevar ikkje gjeve noko svar på. I samtalar med elevane i etterkant av testen spurte eg om kor vidt det var fordi dei var trøytte og ville bli ferdig med testen, eller om det var andre årsaker til dette. Det vart igjen presisert at det var viktig for forskinga at dei svara ærleg, og at det ikkje ville få noko konsekvens for eleven om det skulle koma fram at han ikkje hadde gjort sitt beste. Det som då kom fram var at dei ikkje forstod eller hugsa korleis desse oppgåvene skulle løysast. Difor lot dei vera å svara. Her har eg valt å stola på forklaringane elevane har gjeve, men eg er sjølvsagt klar over moglegheita for at elevane ikkje har turt å gje den verkelege grunnen på grunn av det skeive maktforholdet mellom ein lærar og elev. Totalt sett meiner eg at elevsvara på oppgåvene i testen er til å stola på.

Å forska på eigne elevar krev varsemd, særleg i situasjonar der intervju vert nytta som metode. Sjansen for at ein elev svarar det han trur læraren vil høyra i staden for sine eigne tankar, er til stades. Dessutan kan leiande spørsmål føra til svar som ikkje nødvendigvis er slik ein elev tenkjer. Eg har prøvd å unngå leiande spørsmål, og har gått gjennom intervjumaterialet mitt fleire gongar i ettertid for å sjå om dette likevel kan ha skjedd. Eit par situasjonar har eg måtta stoppa opp ved for å vurdera dette nærare, og eg kan ikkje sjå bort frå at det kan ha skjedd i akkurat desse situasjonane. Men ut frå ei totalvurdering av intervjusituasjonen vil eg likevel hevda at sjansen for at dette har skjedd er liten.

I denne oppgåva har brøkforståing vorte studert ut frå eit konstruktivistisk syn på læring. Underlaget er prosedyre- og omgrepsforståing, med misoppfatningar som indikator på manglande omgrepsforståing. Til saman har dette gjeve meg større innsikt i og auka kunnskap om korleis elevar tenkjer om brøk og brøkrekning. Eg har valt dette teoretiske perspektivet fordi eg gjennom mi erfaring som lærar kjente meg igjen i desse teoriane. Brøk og operasjonar på brøk kan for mange elevar verka ulogisk og vanskeleg å forstå, nokre av dei kan gje uttrykk for at operasjonar på brøk består av lausrivne reglar dei har lært og som ikkje gjev noko meining. Difor stod ei meir systematisk undersøking av prosedyreforståing og omgrepsforståing hjå elevar fram som mest relevant. Som lærar er det viktig å ha ei heilskapleg forståing av kva elevar meistrar og kva utfordringar dei kan ha når dei byrjar i den vidaregåande skulen. Ein kan då betre leggja til rette for ei undervisning som byggjer opp under ei solid brøkforståing hjå elevane.

Var so dette eit eigna teoretisk grunnlag? Omgrepsforståing og prosedyreforståing har ulike funksjonar; omgrepsforståing ordnar og organiserer erfaringar, medan prosedyreforståing er ei oppskrift på korleis ein skal nå eit mål (Byrnes & Wasik, 1991). Begge er naudsynt om ein t.d. skal forstå operasjonar på brøk (Petit et al., 2011). Å studera elevane si forståing av ulike aspekt ved brøk med eit slikt perspektiv har, som nemnt ovanfor, gjeve meg ei meir heilskapleg innsikt i kva elevar meistrar og kor utfordringane deira ligg. Samstundes ser eg at det ikkje alltid lar seg gjera å setja eit klårt skilje mellom prosedyreforståing og omgrepsforståing; desse to omgrepa heng i praksis saman. Å finna «reine» omgrepsoppgåver og prosedyreoppgåver var heller ikkje like lett. Dette registrerte eg allereie då eg laga oppgåvesettet, og eg har i arbeidet med å handsama resultata fått stadfesta denne observasjonen. Eit døme på dette er når ein t.d. skal avgjera kva brøkar som er størst. I følgje Hallett et al. (2010) er det ei oppgåve som testar omgrepsforståing. Samstundes kan dette dreia seg om prosedyreforståing for dei som nyttar seg av ein algoritme der ein set brøkane på same nemnar. Element av strukturforståing kan tilsvarande koma til syne når elevar løyser oppgåver som er meint å testa prosedyrar åleine. Dersom ein elev skal løysa oppgåva $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ og veit at det er to kvarte i ein halv, kan han addera alle firedelane utan å ha kjennskap til prosedyren om samnemnar. Eleven gjer då bruk av omgrepskunnskap (Hallett et al., 2010, s.395). Dette er døme på forhold som kan ha påverka resultata mine. Eg meiner likevel at intervjua langt på veg har sett meg i stand til å kompensera for at nokre oppgåver i utgangspunktet ikkje er tilstrekkeleg treffsikre.

Ei alternativ tilnærming med eit skarpare fokus på teori kring kjende misoppfatningar som grunnlag, ville opna for ei grundigare og meir systematisk undersøking av eit heilt sentralt element av den samla forståinga av brøk og brøkrekning enn det som har vorte gjort i mi oppgåve. Slik kunne ein søkja ei djupare forståing om hindringar som elevar kan møta. Dette hadde òg vore ei verdifull og interessant tilnærming.

Mitt val då eg starta med dette arbeidet var likevel å satsa på ei *breiare* tilnærming, med fokus på så vel meistring som mangel på dette. Dette har løyst ut eit stort og krevjande arbeid. Men for meg, som praktiserande lærar i den vidaregåande skulen, representerer dette mangfaldet og spennet den røynda eg møter kvar dag; ulike elevar med ulike grader av dugleikar og forståing av omgrep skal møtast, og alle har rett på ei tilpassa opplæring slik at dei kan få best mogleg utbytte av undervisninga. Dette krev m.a. at ein i undervisninga både må ta omsyn til kva ein elev meistrar og kor utfordringane for eleven ligg, og samstundes sjå dette i samanheng med brøkstrukturen og korleis elevar utviklar forståing for brøkomgrepet. Med ei smalare tilnærming, med hovudfokus på misoppfatningar, hadde eg kan henda fått ein enklare prosess og enno betre innsikt i hindringar elevar kan ha i møte med brøk, men eg hadde kanskje tapt den heilskapen som eg ser at eg treng. Samstundes ser eg at eit skjerpa blikk på misoppfatningar hadde vore ei naturleg *vidareutvikling* om eg hadde valt å gå vidare med dette arbeidet.

5.3. Konklusjon

Dataa samla inn i dette prosjektarbeidet kjem frå ei gruppe elevar som startar i den vidaregåande skulen med eit karaktersnitt godt over landsgjennomsnittet. Elevane er rekruttert frå ungdomsskular spreidd over heile Noreg. Undersøkinga mi viser stor spreiing med omsyn til forståing av brøkomgrepet og praktisk brøkrekning. Mange elevar viser prosedyreforståing ved at dei reint teknisk meistrar ulike prosedyrar; fokus ligg på reglar og algoritmar dei har pugga. Den strukturelle forståinga er ikkje like godt utvikla. Meistring utan forståing som fundament er laust fundamentert og midlertidig. Ein varig og etablert kunnskap er avhengig av forståing framføre automatisert bruk av prosedyrar.

Mangel på forståing gjev seg utslag i feil og kompenserande misoppfatningar. Elevar kan t.d. tolka brøk innanfor ramma for dei naturlege tala, noko som kan føra til feil val av strategi ved samanlikning av brøkar og ved operasjonar på brøk. Nokre strevar med oppdeling av brøkar og viser manglande evne til å sjå dette i ei større samanheng. Dette kan føra til misoppfatningar og feil ved t.d. ordning og samanlikning av brøkar, ekvivalens, tettleik og operasjonar på brøk. Dei avdekka misoppfatningane gjev samla innsyn i ein mangslungen labyrint av løysingsstrategiar, nytta i mangel av grunnleggjande omgrepsforståing.

5.4. Tankar for undervisninga

Elevane som deltok i denne undersøkinga har gått 10 år i grunnskulen med brøk som gjennomgåande tema i læreplanen. På tross av dette viser undersøkinga mi at forståinga av brøk er sårbar og ustabil. Ulike feil og misoppfatningar kjem til syne, og brøkoperasjonar handlar om reglar og prosedyrar som må hugsast utan at dei er forstått. Datamaterialet mitt seier ikkje noko om årsakene til dette, men ulike forklaringar kan ein finna i litteraturen. Ut frå dette gjer eg meg tankar om føringar for undervisninga slik at ein som lærar betre kan hjelpa elevar i prosessen med å konstruera si eiga brøkforståing.

Ein lærar må ha ein fagleg tryggleik som gjer at han kan leggja til rette for at ein elev skal kunna forstå, sjå samanhengar og skapa meining i det han gjer. Dette krev m.a. god innsikt i dei ulike emna i matematikk, i fagdidaktikk og pedagogisk teori. Når t.d. talomgrepet vert utvida til rasjonale tal, har dette vist seg vera vanskeleg for mange elevar. Læraren må då ta omsyn til korleis strukturen i lærestoffet og dei indre kognitive strukturane hjå eleven skal møtast. Nytt lærestoff må knytast til det ein elev veit frå før, og læraren må hjelpa til i arbeidet med å tydeleggjera likskapar og ulikskapar. Elevane må få varierte erfaringar og refleksjonar i etterkant som fører til at dei m.a. forstår at vi kan ha mange symbol for same tal, at det er uendeleg mange tal mellom to vilkårlege tal og at multiplikasjon ikkje alltid gjer svaret større og divisjon gjer svaret mindre. Diskusjon og refleksjon kan føra til at ein elev vert i stand til å korrigera det eksisterande omgrepet sitt om kva eit tal er, men dette kan ta tid (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004).

Det er òg viktig at ein i undervisninga legg vekt på ulike aspekt ved brøk og tydeleggjer dette for elevane. Det kan m.a. føra til at ein elev betre vil forstå kompleksiteten i brøkomgrepet og veit kva situasjonar dei kan brukast i. Ein for snever tankemodell for brøk kan gje mangelfull forståing (Bjerke et al., 2012). Har ein berre erfaringar med brøk som del av eit heile, vil det t.d. vera naturleg å overføra denne kunnskapen til tallinja, noko som igjen kan føra til at det vert vanskeleg å justera den mentale konstruksjonen slik at den passar med notasjonen brøk som tal.

Ein variert modellbruk i undervisninga kan òg hjelpa elevane mot ei betre brøkforståing (Petit et al, 2010). Å uttrykkja ein brøk på ulike måtar, som t.d. i ein arealmodell, på ei talline eller ved eit symbolspråk, og kunna veksla mellom dei, kan vera med på å utvikla ei meir fleksibel tenking rundt notasjon av brøk (ibid.). Det kan m.a. hjelpa ein elev til å sjå på brøk som ein storleik, til å forstå at eit tal kan skrivast på uendeleg mange ulike måtar og til å forstå addisjon og subtraksjon av brøkar. Ein elev må òg vera merksam på at ein brøk er ein relativ storleik der eininga/den heile vil variera frå situasjon til situasjon. Dei må difor få erfaringar med å samanlikna brøkar som er relatert til same heile og ulike heile.

Skal ein elev forstå operasjonar på brøk, må han forstå tala det skal opererast på. Vi som lærarar kan lett tru at den grunnleggjande brøkforståinga er på plass når elevar startar i den vidaregåande skulen. Undersøkinga mi viser at dette ikkje er tilfelle for mange av dei. Ser ein på lærebøkene i 1P/1T[14], vert brøk primært repetert som del av eit kontinuerleg heile, deretter

---

[14] Fylgjande lærebøker har vorte undersøkt:

Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2014). *Matematikk 1P* (s.20-28). Oslo: Aschehoug
Heir, O., Engeseth, J., Moe, H. & Borgan, Ø. (2014). *Matematikk 1T* (s.48-57). Oslo: Aschehoug
Oldervoll, T., Orskog, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2009). *Sinus Matematikk 1P* (s.58-66). Oslo: Cappelen Damm
Oldervoll, T., Orskog, O., Vaaje, A., Svorstøl, O. & Hals, S. (2014). *Sinus Matematikk 1T* (s.12-15). Oslo: Cappelen Damm
Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2013). *Sigma 1T Matematikk* (s.16-17). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag
Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Thorstensen, A., Thorstensen, R. & Skrindo, K. (2013). *Sigma 1P Matematikk* (s.16-17). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

vert ulike reglar for operasjonar på brøk presentert (med døme) og til sist kjem ein del reine rekneoppgåver som elevane skal løysa. Ein slik framgangsmåte vil, etter mi meining, truleg ikkje føra til at elevane får ei auka strukturell forståing. For mange elevar kan då brøkoperasjonar fortsatt handla om reglar og prosedyrar som må hugsast utan at dei er forstått. So lenge elevane berre har lært ei prosedyre, vil det vera vanskeleg å få ei solid forståing for brøkomgrepet (Sfard, 1991). Det er difor viktig at undervisninga vert lagt opp slik at elevane får både operasjonell- og strukturell forståing. For å forstå brøkreglane, må elevane forstå dei underliggjande omgrepa (sjå m.a. punkt 2.2.3. om Skemp sitt 2. hovudprinsipp for undervisning). Bjørnestad (2011) understrekar at ei tolking av multiplikasjonsteiknet som «av» kan føra til at multiplikasjon av brøk vert lettare å forstå. Skal ein forstå divisjon av brøk, kan erfaringar med målingsdivisjon føra til at dette gjev meir meining. Skal ein forstå og kunna finna eit forhold ut frå to korresponderande verdiar, må elevane forstå og sjå forskjell på additive og multiplikative endringar (Lamon, 2005). Ved ei multiplikativ endring vil relasjonen mellom to mengder ikkje endra seg. Her må ein lærar hjelpa til ved at han m.a. legg til rette for at elevar får varierte erfaringar med refleksjonar i etterkant, at han tydeleggjer ulike samanhengar, at han tydeleggjer når nye kontekstar vert teke i bruk og at han byggjer vidare på det elevane kan frå før.

Indresæter (1998) har undersøkt forståinga av brøk og brøkrekning hjå norske elevar på mellomtrinnet, og ho seier fylgjande:

> Undervisningen må bygge på elevenes eksisterende kunnskaper, kunnskaper om brøkstrukturen, kunnskaper om hvordan brøkstrukturen er knyttet til andre begrepsstrukturer og kunnskaper om hvordan elevene utvikler forståelse for brøkbegrepet. Hvis man ikke tar hensyn til dette, vil elevene kunne få unødvendige vansker når de skal konstruere sin brøkforståelse (Indresæter, 1998, s.108).

5.5. Vidare forsking

I denne undersøkinga har eg hatt ei open tilnærming til datamaterialet for å få eit meir heilskapleg bilete av brøkforståinga hjå elevane – hjå heile klassen eller deler av han. Resultata i undersøkinga kan ikkje generaliserast, sidan utvalet ikkje er representativt. Ein kan gjennomføra denne undersøkinga med fleire elevar som startar i den vidaregåande skulen på studieretningar som gjev generell studiekompetanse slik at utvalet vert representativt. På den måten vil det vera mogleg å generalisera funna som kjem fram.

Resultata i undersøkinga mi har vorte analysert ut frå eit konstruktivistisk syn på læring. I dette perspektiv kan det òg vera interessant å undersøkja meir grundig og systematisk nokre av feila som går igjen i datamaterialet mitt, som t.d. at elevar brukar idear knytt til heile tal feil, at dei strevar med å sjå når og kvifor ein tek i bruk oppdeling av brøkar eller vanskar dei har med den multiplikative tenkinga. Ei undersøking der ein går meir i djupna på nokre få aspekt ved brøkomgrepet kunne òg ha vore interessant, det same gjeld å sjå på brøk knytt opp mot eit anna matematisk innhald, som t.d. brøk i sannsyn, trigonometri eller algebra.

Eit anna teoretisk perspektiv enn det konstruktivistiske vil kunna få fram andre sider som påverkar ein elev si brøkforståing. I eit sosiokulturelt perspektiv flyttar ein fokus bort frå læring som ein individuell prosess til læring som ein sosial prosess. Ny kunnskap vert danna i samhandling med andre menneske, og fokus ligg på dei sosiale aspekta og konteksten rundt situasjonen. Ein kunne då t.d. ha sett på ulike typar undervisning og samanlikna brøkforståinga hjå elevane, eller ein kunne ha sett på kva rolle språket har i utviklinga av brøkforståinga sidan ein tenkjer at språk og tenking kan vera med på å utvikla kvarandre.

Det kunne òg ha vore interessant å undersøkt lærebøker og anna undervisningsmateriell som vert nytta i barne- og ungdomsskulen i dag for å sjå om sentrale brøkaspekt er teke med og konkretisert. Ei slik analyse av korleis brøk er presentert i lærebøker kan gje ein peikepinn på kva som vert vektlagt i undervisninga av brøk (Indresæter, 1998). Ei bevisstgjering av dette, saman med kunnskap om brøkstrukturen og vanskar elevar kan støyta på i møte med brøk, kan hjelpa ein som lærar slik at ein best mogleg kan leggja til rette for ei undervisning der brøkforståing står i sentrum.

6. Litteraturliste

Baroody, A. J., Feil, Y. & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115-131.

Behr, M., Harel, G., Lesh, R. & Post, T. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis – Emphasis on the Operator Construct. I T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Red.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (s. 13-47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E.A. (1983). Rational-Number Concepts. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s.91-126). New York: Academic Press.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). Algebra för alla. *Nämnaren TEMA.* Göteborg: Göteborgs universitet.

Birkeland, P. A., Breiteig, T. & Venheim, R. (2011). *Matematikk for lærere 1*. Oslo: Universitetsforlaget AS

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C. & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall. Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. I: I. Pareliussen, B.B. Moen, A.B. Reinertsen & T. Solhaug (Red.), *FoU i praksis 2012 conference proceedings*, (28-36). Trondheim: Akademia forlag.

Bjørnestad, Ø. (2011). Kan multiplikasjon innføres på en enhetlig måte? *Tangenten* (3), 6-8+39.

Botten, G. (1999). *Meningsfylt matematikk – nærhet og engasjement i læringen.* Bergen: Caspar Forlag.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret (LS). Henta frå http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf

Brekke, G. & Tinnes, M.N. (2001). *Kartlegging av matematikkforståing. Rettleiing til tal og talrekning. Grunnkurs Vidaregåande opplæring.* Oslo: Læringssenteret (LS).

Brown, M., Küchemann, D. & Hodgen, J. (2010). The struggle to achieve multiplicative reasoning 11-14. I M. Joubert & P. Andrews (Red.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* April 2010 (s.49-56).

Charalambous, C.Y, & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics,* (64), 293-316.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics,* (72), 127-138.

Dahl, H.H. & Nohr, M.E. (2010). Perlesnor og tom tallinje. *Tangenten* (1), 2-6.

Danielsen, A. G. (2013). Kunnskapsbygging i skolen via kvantitative verktøy – statistikk og spørreskjema. I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s.138-154). Oslo: Universitetsforlaget.

Dysthe, O. (2001a). Om samanhengen mellom dialog, samspel og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (s.9-30). Oslo: Abstrakt Forlag.

Dysthe, O. (2001b). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. I O. Dysthe (Red.), *Dialog, samspel og læring* (s.33-72). Oslo: Abstrakt Forlag.

Engstrøm, A. (1997). *Reflektivt tänkande i matematik. Om elevers konstruktioner av bråk.* Malmö: Graphic System AB

Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Henta frå: https://www.etikkom.no/globalassets/documents/publikasjoner-som-pdf/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi-2006.pdf

Frandsen, J. (1996). *Ægyptisk matematik.* Århus: Forlaget Systime A/S

Gjone, G. (1998). Simon Stevin (1548-1620) og desimaltallene. *Tangenten* (2), 15-18.

Gray, E. & Tall, D. (2007). Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 23-40.

Grønmo, L.S., Bergem, O.K., Kjærnsli, M., Lie, S. & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003.* Oslo: Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grønmo, L.S. & Onstad, T. (red.) (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub. Henta frå: http://www.timss.no/rapport2007/Hele_TIMSS2007.pdf

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag. Henta frå: http://www.timss.no/timss_2011_web.pdf

Hallett, D., Nunes, T. & Bryant, P. (2010). Individual Differences in Conceptual and Procedural Knowledge When Learning Fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395-406.

Hart, K., Brown, M., Kerslake, D., Küchemann, D. & Ruddock, G. (1984). *Chelsea Diagnostic Mathematics Tests. Teacher's guide.* Windsor (UK): NFER-Nelson.

Hart, K. M., Brown, M., Küchemann, D., Kerslake, D., Ruddock, G. & McCartney, M. (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* London: John Murray

Heron, M. (2014). The Number Line Model for Conceptual Understanding of Fractions. *Ohio Journal of School Mathematics* (69), s.7-11. Ohio: Ohio State University

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I J. Hiebert (Red.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics* (s.1-27). New York: Routledge

Holme, A. (2008). *Matematikkens historie 1. Fra Babylon til mordet på Hypatia*. Bergen: Fagbokforlaget.

Holme, A. (2004). *Matematikkens historie 2. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel.* Bergen: Fagbokforlaget.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden*. Oslo: Universitetsforlaget AS

Indresæter, G. (1998). *Hvorfor er brøk og brøkregning vanskelig å forstå? Undersøkelse på mellomtrinnet.* (Hovedfagsoppgave, Universitetet i Oslo). G. Indresæter, Oslo

Johansson, B.G. (2004). *Matematikens historia*. Lund: Studentlitteratur

Johnsbråten, H. (2013). Læringsstøttende prøver i matematikk. *Tangenten* (1), 31-34.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-Nelson

Kieren, T. (1980). Knowing Rational Numbers: Ideas and Symbols. I M. M. Lindquist (Red.), *Selected Issues in Mathematics Education* (s. 69-81). California: McCutchan Publishing Corporation.

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (Red.). (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2012.* Oslo: Universitetsforlaget. Henta frå: http://www.pisa.no/pdf/pisa 2012/pisa-rapport2012.pdf

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

Lamon, S. J. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for understanding. Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Lindegren, C., Welin, I. & Sönnerhed, W. (2012). Förståelse för tal i bråkform. *Nämnaren*, 3, 36-40.

Lindgren, I. (2011). *Räkna med bråk. Om gymnasieelevers kunskaper i multiplikation och division av bråk.* (Mastergradsavhandling, Linnéuniversitetet i Växjö). Henta frå: http://lnu.diva-portal.org/smash/get/diva2:425067/FULLTEXT01.pdf

Martinussen, G. & Smestad, B. (2010). Multiplikasjon og divisjon av brøk. *Tangenten* (1), 30-34.

McIntosh, A. (2007). *Alle teller. Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen. Kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området TALL og TALLFORSTÅELSE.* Trondheim: Matematikksenteret

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære*. Oslo: NKI

Nilsen, G. (2008). *Hvilken talloppfatning (god/ ikke god) hadde avgangselevene ved «min» skole i 2007?* (Mastergradsavhandling, Høgskolen i Oslo). G. Nilsen, Oslo

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*,79, 61-83. Publisert online: 6 juli 2011

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why You Have to Probe to Discover What Year 8 Students Really Think About Fractions. I I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Red), *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, s.430-437. Sydney, Australia: MERGA

Petit, M., Laird, R. & Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions.* New York: Routledge

Refvik, E. (2013*). Lærarar si oppfatning om deira undervisningskunnskap knyta til ulike representasjonar av brøk*. (Mastergradsavhandling, Universitetet i Stavanger). Henta frå: http://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/185850/Refvik%2c%20Eilen.Pdf?sequence=1

Reys, B., & Reys, R., (1995a). Perspektiv på Number sense och taluppfattning. *Nämnaren,* (1), 28-33.

Reys, B., Reys, R., Emanuelsson, G., Johansson, B., Maerker, L., Nilsson, G. & Rosén, B., (1995b). Svenska elevers taluppfattning. *Nämnaren*, (3), 34-40.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, (22), s.1-36

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middel School*, Vol.12, No.2 (s.88-95).

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth: Penguin Books

Sollid, H. (2013). Intervju som forskningsmetode i klasseromsforskning . I M. Brekke & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker. Innføring i forskningsarbeid i skolen* (s.124-137). Oslo: Universitetsforlaget.

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk.* Oslo: NKI

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004): The development of student's understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. I: P. Gates (Red.), *Issues in Mathematics Teaching* (147-165). London and New York: Routledge Falmer

Säljö, R. (2001). *Læring i praksis* (s.48-75). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Thompson, J. (red.) (2006). *Matematikkleksikon*. Oslo: Kunnskapsforlaget.

Tvete, K. (2006). Blir det gange eller dele her, lærer? I: *Stifinneren* s. 41-54. Bergen: Caspar Forlag AS

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Kartlegging i rekning for VG1. Rettleiing*. Henta frå: https://pas.udir.no/AuthenticationWeb/?RequestApplication=https%3a%2f%2fpas.udir.no%3a443%2fWeb%2fDefault.aspx&returnURL=%2fWeb%2fDefault.aspx [14]

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Henta frå: http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Hovedomraader/

Utdanningsdirektoratet. (2013a). *Læringsstøttande prøver. Algebra. Matematikk 5.-10. årstrinn. Ressurshefte.* Henta frå: https://pas.udir.no/AuthenticationWeb/?RequestApplication=https%3a%2f%2fpas.udir.no%3a443%2fWeb%2fDefault.aspx&returnURL=%2fWeb%2fDefault.aspx [15]

[14, 15] Nettsida krev passord

Utdanningsdirektoratet. (2013b). *Læringsstøttande prøver. Tal og talrekning. Matematikk 5.-10. årssteg. Ressurshefte.* Henta frå https://pas.udir.no/AuthenticationWeb/?RequestApplication=https%3a%2f%2fpas.udir.no%3a443%2fWeb%2fDefault.aspx&returnURL=%2fWeb%2fDefault.aspx [16]

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209.

Ånestad, G., Rodal, C. & Eriksen, E. (2014). Et innblikk i lærerstudenters forkunnskaper innen brøk. I: A. B. Reinertsen, B. Groven, A. Knutas & A. Holm: *FoU i praksis 2013 conference proceedings* (s.273-282). Trondheim: Akademia forlag.

[16] Nettsida krev passord

7. Vedlegg

1. Godkjenning frå NSD
2. Godkjenning frå rektor
3. Løyve til å bruka oppgåver frå CSMS-prosjektet
4. Informasjonsskriv til elevar og føresette
5. Intervjuguide
6. Brøktest
7. Oversikt over oppgåver; kjelde, kategorisering og resultat

Vedlegg 1

Godkjenning frå NSD

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
NORWEGIAN SOCIAL SCIENCE DATA SERVICES

NSD
Harald Hårfagres gate 29
N-5007 Bergen
Norway
Tel: +47-55 58 21 17
Fax: +47-55 58 96 50
nsd@nsd.uib.no
www.nsd.uib.no
Org.nr. 985 321 884

Christoph Kirfel
Matematisk institutt Universitetet i Bergen
Johannes Bruns gt. 12
5008 BERGEN

Vår dato: 10.10.2013 Vår ref: 35691 / 2 / KH Deres dato: Deres ref:

TILBAKEMELDING PÅ MELDING OM BEHANDLING AV PERSONOPPLYSNINGER

Vi viser til melding om behandling av personopplysninger, mottatt 29.09.2013. Meldingen gjelder prosjektet:

35691	*Kva kunnskap har elevar om brøk og brøkrekning når dei kjem i den vidaregåande skulen?*
Behandlingsansvarlig	*Universitetet i Bergen, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Christoph Kirfel*
Student	*Jorunn Antun*

Personvernombudet har vurdert prosjektet og finner at behandlingen av personopplysninger er meldepliktig i henhold til personopplysningsloven § 31. Behandlingen tilfredsstiller kravene i personopplysningsloven.

Personvernombudets vurdering forutsetter at prosjektet gjennomføres i tråd med opplysningene gitt i meldeskjemaet, korrespondanse med ombudet, ombudets kommentarer samt personopplysningsloven og helseregisterloven med forskrifter. Behandlingen av personopplysninger kan settes i gang.

Det gjøres oppmerksom på at det skal gis ny melding dersom behandlingen endres i forhold til de opplysninger som ligger til grunn for personvernombudets vurdering. Endringsmeldinger gis via et eget skjema, http://www.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/skjema.html. Det skal også gis melding etter tre år dersom prosjektet fortsatt pågår. Meldinger skal skje skriftlig til ombudet.

Personvernombudet har lagt ut opplysninger om prosjektet i en offentlig database, http://pvo.nsd.no/prosjekt.

Personvernombudet vil ved prosjektets avslutning, 15.06.2015, rette en henvendelse angående status for behandlingen av personopplysninger.

Vennlig hilsen

Vigdis Namtvedt Kvalheim

Kjersti Haugstvedt

Kontaktperson: Kjersti Haugstvedt tlf: 55 58 29 53
Vedlegg: Prosjektvurdering

Dokumentet er elektronisk produsert og godkjent ved NSDs rutiner for elektronisk godkjenning.

Avdelingskontorer / *District Offices*
OSLO: NSD. Universitetet i Oslo, Postboks 1055 Blindern, 0316 Oslo. Tel: +47-22 85 52 11. nsd@uio.no
TRONDHEIM: NSD. Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim. Tel: +47-73 59 19 07. kyrre.svarva@svt.ntnu.no
TROMSØ: NSD. SVF, Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø. Tel: +47-77 64 43 36. nsdmaa@sv.uit.no

Vedlegg 2

Godkjenning frå rektor

Fra: Oddvar [redacted]
Sendt: ma 28.10.2013 13:14
Til: Jorunn Antun
SV: Forskingsprosjekt ved [redacted]

Hei Jorunn.
Dette ser spennende ut. Søknaden innvilges. Lykke til!

Vennlig hilsen
Oddvar

Fra: Jorunn Antun
Sendt: 16. oktober 2013 21:57
Til: Oddvar [redacted]
Emne: Forskingsprosjekt ved [redacted]

Til rektor ved [redacted]:
Søknad om å få lov til å forska på elevane si brøkforståing.

Eg er no i gang med masteroppgåva mi i matematikkdidaktikk. Tema for oppgåva er brøk, og eg vil undersøkja kva forståing elevar har av brøk og brøkrekning når dei startar i den vidaregåande skulen. For å finna ut av dette, vil eg starta med ein kartleggingstest. Tidslengda på prøven vil vera ca. 60 minutt. Deretter ynskjer eg å intervjua nokre elevar. Elevane vil her verta beden om å fortelja korleis dei kom fram til svara på nokre av oppgåvene i testen. Ein dialog med eleven vil kunna gje meg større innsikt i og auka kunnskap om korleis eleven tenkjer og kva brøkforståing han har. Lengda på samtalane vil vera ca. 30 minutt.
Sjølve undersøkinga vil skje i september 2014, men eg ynskjer å utføra ein pilottest med elevane som går i VG1 dette skuleåret – no i oktober. Formålet med piloteringa er å testa ut metode og verktøy, slik at eg eventuelt kan gjera justeringar før den endelege datainnsamlinga skal gjennomførast. Omsynet til personvernet vert handsama på same vis som i det endelege oppsettet.
For meir utfyllande informasjon, sjå vedlegga.
Forskingsprosjektet er meldt til Personvernombudet for forsking, Norsk samfunnsvitenskaplig datatjeneste A/S. Godkjenning kom 16. oktober 2013.
Vonar på positivt svar.

Med helsing
Jorunn Antun

Løyve til å bruka oppgåver frå CSMS-prosjektet

Fra: Brown, Margaret [mailto:margaret.brown@kcl.ac.uk]
Sendt: 5. august 2014 16:04
Til: Jorunn Antun
Kopi: Küchemann, Dietmar
Emne: RE: Request for permission to use elements from the Chelsea Diagnostic Mathematics Tests - Fraction 2

Dear Jorunn
As Dietmar says, we're very happy to give you permission to use any questions you like, provided as you suggest that you provide a full citation.
We would be very interested to see your results and how they compare with ours. We have recently re-run several of the individual questions which link most closely to ratios - Dietmar can tell you I think which questions they are - in general students found them harder in 2008/9 than in the 1970s.
Good Luck
Margaret

From: Jorunn Antun [redacted]
Sent: 04 August 2014 18:56
To: Brown, Margaret
Cc: Küchemann, Dietmar
Subject: Request for permission to use elements from the Chelsea Diagnostic Mathematics Tests - Fraction 2

Dear Margaret Brown and Dietmar Küchemann!

My name is Jorunn Antun and I have been working in primary and secondary school in Norway for 26 years. Currently, I am employed at [redacted] (upper secondary school), while also performing studies aimed towards obtaining a master's degree at the University of Bergen, supervised by Christoph Kirfel, associate professor at Department of Mathematics. My subject is didactic methods in mathematics, and my topic revolves around the baseline understanding of fractions, including potential misconceptions, for students just before starting their studies at the upper secondary school level in Norway. My approach is a written test, followed by a qualitative interview, offering the students a possibility to further elaborate on the reasoning for their answers.

My current task is to put together the test based upon previous research in the field. During this, my literature studies revealed your approach presented in the "Chelsea Diagnostic Mathematics Tests – Fraction 2" - and I would be very pleased if you would grant me permission, with proper citation of course, to include eight elements of your tests into my battery of questions.

Yours sincerely,
Jorunn Antun

Vedlegg 4

Informasjonsskriv til elevar og føresette

Førespurnad om å delta i forskingsprosjekt i samband med ei masteroppgåve

Eg er student ved Universitetet i Bergen, og er no i gang med ei masteroppgåve i matematikkdidaktikk. Tema for oppgåva er brøk, og eg skal undersøkja kva forståing elevar har om brøk og brøkrekning når dei startar i den vidaregåande skulen. Eg ynskjer å få større innsikt i kvifor ein del elevar synes brøkomgrepet verkar ulogisk og er vanskeleg å forstå. Då brøk og brøkrekning inngår i mange emne i matematikken, er det viktig å ha ein solid kunnskap om desse utfordringane, slik at læraren kan hjelpa elevane best mogeleg.

For å finna ut av dette, ynskjer eg å starta med ein kartleggingsprøve. Oppgåvene skal testa ulike aspekta ved brøk. Prøven skal m.a. avdekka om elevane har misoppfatningar om brøkomgrepet og feilstrategiar ved brøkrekning. Tidslengda på prøven vil vera ca. 60 minutt.

I tillegg til den skriftlege testen ynskjer eg å intervjua nokon av elevane. Vi kjem til å samtala om nokre av oppgåvene i kartleggingsprøven. Eleven vil m.a. verta bedt om å fortelja korleis han kom fram til svaret på oppgåvene i testen. Ein dialog med eleven vil kunna gje meg større innsikt i og auka kunnskap om korleis eleven tenkjer og kva brøkforståing han har. Vi kjem til å bruka bandopptakar medan vi snakkar saman. Lengda på samtalen vil vera ca. 20-30 minutt.

Det er frivillig å delta, både på den skriftlege testen og på intervjuet. Då det ikkje vert registrert sensitive opplysningar i prosjektet, kan elevar over 15 år sjølv samtykka i å delta. Eleven kan trekkja tilbake samtykket når som helst, utan å måtta grunngjeva dette nærare. Det vil ikkje få konsekvensar for eleven i skulekvardagen om han ikkje ynskjer å delta.

I den skriftlege testen vert elevane identifisert med eit kodenummer. Berre eg har tilgang til kodelista. Opplysningane vert handsame konfidensielt og anonymisert. Ingen einskildpersonar vil dermed kunna kjenna seg igjen i den ferdige oppgåva. Alt innsamla materiale (skriftleg test, lydopptak og transkripsjonar av desse) vert sletta når oppgåva er ferdig, innan 15. juni, 2015.

Dersom det er noko de lurar på, kan de ta kontakt ved å ringja meg på tlf. 41 43 78 44, eller senda ein e-post til [redacted] De kan òg ta kontakt med rettleiaren min, førsteamanuensis Christoph Kirfel ved Universitetet i Bergen, Matematisk institutt, på tlf. 55 58 48 73.

Studien er meldt til Personvernombudet for forskning, Norsk samfunnsvitenskaplig datatjeneste A/S.

Med helsing
Jorunn Antun

Lærar ved [redacted]

Samtykke til å delta i prosjektet

Eg har motteke informasjon om forskingsprosjektet, og ynskjer å delta:
Set kryss.

____ Eg samtykker til å delta på den skriftlege testen

____ Eg samtykker til å delta på intervju

(Dato, Signatur)

Intervjuguide

Eg har vald eit delvis strukturert intervju med ein overordna intervjuguide som utgangspunkt. Spørsmål, tema og rekkefølgje vil variera. Då oppgåver frå den skriftlege testen vil vera utgangspunkt for samtalen, og kva oppgåve vi samtalar om vil varierer frå elev til elev, vil intervjuguiden skissert under vera nokså generell.

Innleiing:

- Takka for at eleven har sagt seg villig til å delta på intervjuet.
- Informera kort om prosjektet og at eg i hovudsak kjem til å knyta spørsmåla mine opp mot svara dei har gjeve på den skriftlege testen.
- Informera om at intervjuet vert teke opp på band og seinare transkribert. Dataene vert sletta etter bruk, og det er kun eg som skal høyra på opptaket.
- Informera om at dersom deler av dialogen vert sitert i oppgåva, vil eleven sin identitet vera anonymisert.
- Informera om at eleven når som helst kan trekkja seg frå intervjusituasjonen utan å måtta grunngjeva kvifor.
- Informera om lengda på intervjuet – ca. 30 min.

Intervjuspørsmål, bygd på Kvale & Brinkmann (2009,s.147-149) sine tankar kring det kvalitative forskingsintervju:

- Introduksjonsspørsmål:
    - Kan du fortelja meg korleis du kom fram til svaret på oppgåva?
- Oppfølgingsspørsmål:
    - Kvifor tenkte du slik?
    - Kvifor valde du bort dei andre svaralternativa?
- Inngåande spørsmål:
    - Kan du seia noko meir om dette?
    - Kan du gje meg døme på kva du meiner?
    - Kan dette gjerast på ein annan måte?
    - Kva ville du ha gjort dersom…? (endrar litt på oppgåva for å få fram heilskapsforståinga)
- Direkte spørsmål:
    - Når du snakkar om …, meiner du … eller …?
- Tolkande spørsmål:
    - Du meiner altså at …?

Avslutning:

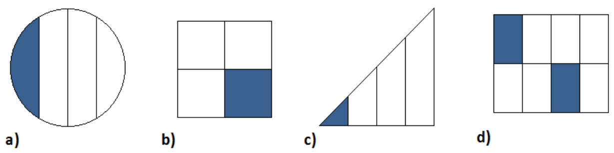
- Spørja om eleven har nokre spørsmål eller kommentarar til det vi har snakka om i intervjuet eller andre ting han meiner vi bør ta opp.

Vedlegg 6

Brøktest

Nummer:________

1 I kva figurar er $\frac{1}{4}$ av arealet fargelagt?

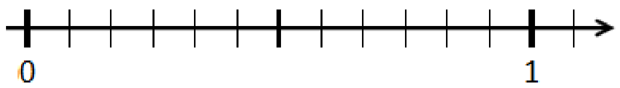


2 Set ein ring rundt den største brøken i kvart par.

(a) $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{11}$ (b) $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{6}$ (c) $\frac{89}{90}$ $\frac{90}{91}$

3 Plasser brøkane på tallina ved hjelp av strekar.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{13}{12}$



4 $\frac{2}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{10}{\triangle}$

(a) Kva tal skal stå i $\square$? ________

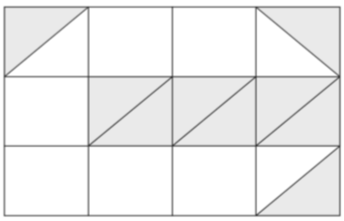
(b) Kva tal skal stå i $\triangle$? ________

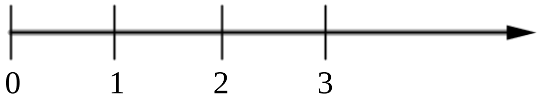
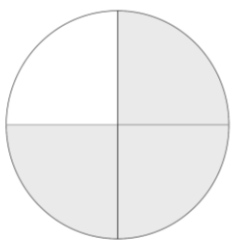
5 I eit bakeri vert $\frac{3}{8}$ av mjølet brukt til å baka brød, og $\frac{1}{5}$ av mjølet vert brukt til å baka kaker. Kva brøkdel av mjølet har vorte brukt?

Svar:____________________

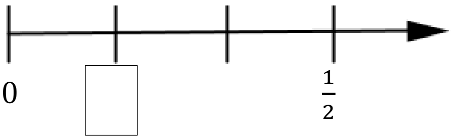
6 Set ring rundt ein brøk som er større enn $\frac{3}{4}$ men mindre enn 1.

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{3}$

7	Skriv eit tal i teljaren av brøken for å laga ein brøk som er større enn 2 og mindre enn 3. $\frac{\square}{8}$
8	Set ring rundt dei påstandar som er sanne om talet $\frac{2}{5}$. (a): Det er større enn $\frac{1}{2}$ (b): Det er det same som 2,5 (c): Det er lik 0,4 (d): Det er større enn $\frac{1}{3}$
9	Skriv >, = eller < på linja under, slik at setninga vert sann. 456 : 8 _____ $456 \cdot \frac{1}{8}$
10	I ei matoppskrift står det at vi skal bruka $1\frac{3}{4}$ kopp med mjøl. Kor mykje trengs det til ei dobbel oppskrift? Set ring rundt rett svaralternativ. (a) $1\frac{6}{8}$ kopp (b) $2\frac{1}{2}$ kopp (c) $2\frac{6}{8}$ kopp (d) $3\frac{1}{2}$ kopp
11	Du legg grå fliser på eit golv som vist under. Kva brøkdel av golvet har vorte flislagt?  Svar: _______________
12	Kva sum nedanfor er større enn 1? Du skal ikkje rekna ut svaret. Sett ring rundt rett alternativ. (a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$ (b) $\frac{1}{2}+\frac{4}{9}$ (c) $\frac{3}{8}+\frac{2}{11}$ (d) $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}$

13	Plasser desse tala på tallina under: 4 $\frac{3}{4}$ $1\frac{1}{4}$ $\frac{9}{4}$ 
14	John betalar $\frac{3}{5}$ av løna si i skatt. I tillegg betalar han $\frac{1}{10}$ av løna i husleige. Kva brøkdel av løna har han igjen etter at han har betalt skatt og husleige? Svar:______________________
15	Nora har 25 halsband. Dei veg til saman 2 $\frac{1}{2}$ kg. Kvart halsband veg like mykje. Kor mykje veg eit halsband? Vel rekneuttrykket eller rekneuttrykka som gjev rett svar på spørsmålet. (a) $25 \cdot 2\frac{1}{2}$ (b) $25 : 2\frac{1}{2}$ (c) $2\frac{1}{2} : 25$ (d) $2\frac{1}{2} \cdot 25$ (e) $25 - 2\frac{1}{2}$ (f) $2\frac{1}{2} + 25$
16	A, Fargelegg $\frac{1}{6}$ av det grå området.  B, Kor stor del av heile sirkelen har du fargelagt? Svar:__________________

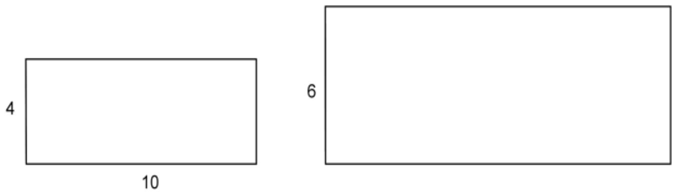
17	Kan du fullføra dette og forklara kva du har gjort? $\frac{9}{12} = \frac{12}{\square}$
18	John sparar $\frac{1}{4}$ av si eiga løn. Paul tener 600 kr og sparar $\frac{1}{3}$ av den. Kor mykje må John tena for å spara like mykje som Paul? Forklar korleis du tenkjer. Svar:_________________
19	Gjer om 60% som (a) ein brøk og (b) eit desimaltal (a) __________________ (Brøk) (b) __________________ (Desimaltal)
20	Maria og Karl lagar sjokolademjølk. Maria tek 3 skeier med kakao i 2 dl mjølk. Karl tek 4 skeier kakao i 3 dl mjølk. Kva sjokolademjølk er sterkast? Set ring rundt svaret ditt. (e) Karl si (f) Maria si (g) Begge er like (h) Det går ikkje an å rekna det ut
21	Kor mange ulike brøkar finst det mellom $\frac{2}{5}$ og $\frac{3}{5}$? Set ring rundt a, b eller c og fullfør svaret. (a): Ingen, fordi ____ (b): Ein, fordi ____ (c): Mange, to av dei er ____

<table>
<tr><td>22</td><td>Skriv det rette talet i boksen under.

</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Gjer om brøken $\frac{1}{20}$ til prosent, og set ring rundt riktig svaralternativ.

(a) 0,20% (b) 20% (c) 5% (d) 0,05%</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Ein stafettrunde er $\frac{1}{8}$ km. Kvar deltakar spring ein runde kvar. Kor mange deltakarar må vera med for å springa ein totaldistanse på $\frac{3}{4}$ km? Forklar korleis du tenkjer.

Svar:___________________________</td></tr>
<tr><td>25</td><td>Set desse tala i rekkefølgje med stigande verdi, det minste talet først.

$\frac{1}{3}$ 0,3 35% $\frac{1}{10}$

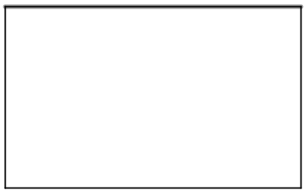
Svar:_____________________________</td></tr>
<tr><td>26</td><td>Eit databilete er 4 cm høgt og 10 cm breitt. Lise kopierer og forstørrar dette bilete i prosjektoppgåva si. I prosjektoppgåva er biletet 6 cm høgt. Kor breitt er det?


Svar:___________________

Forklar eller vis ved rekning korleis du har tenkt.</td></tr>
</table>

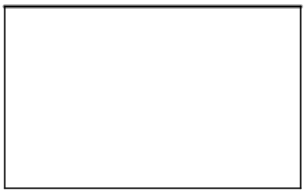
<table>
<tr><td>27</td><td>Lag ei tekstoppgåve som passar til fylgjande rekneuttrykk: $4\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>28</td><td>Arealet = 10 kvadratcentimeter. Lengda = 4 cm.

Kva er bredda av rektangelet?


Bredde
4 cm

Bredda = ____________________________</td></tr>
<tr><td>29</td><td>Arealet = $\frac{1}{3}$ kvadratcentimeter. Bredda = $\frac{3}{5}$ cm.

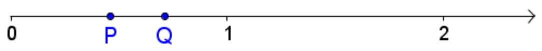
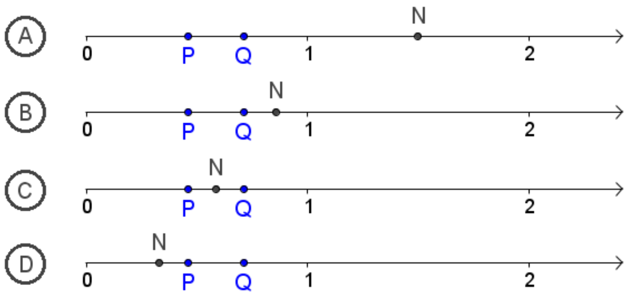
Kva er lengda av rektangelet?


$\frac{3}{5}$ cm
Lengde

Lengda = ____________________________</td></tr>
<tr><td>30</td><td>15 liter bær veg 10 kg. Kor mange kg veg 6 liter av dei same bæra?

Svar:____________________

Forklar eller vis ved rekning korleis du har tenkt.</td></tr>
</table>

31	 P og Q representerer to brøkar på tallina ovanfor. P · Q = N. Kva av tallinene under viser kor N ligg på tallina? 
32	Messing er ei blanding av sink og kopar i høve 1 : 4. Kor mange kg sink er det i 40 kg messing? Svar: ______________________________ Forklar korleis du rekna/ har tenkt for å koma fram til svaret ditt.
33	Forkort brøkane (a) $\frac{2y}{3y} =$ (b) $\frac{3b^3}{2b^2} =$
34	Skriv uttrykket $\frac{3x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2}$ so enkelt som mogleg. Vis korleis du kjem fram til svaret. Svar: ______________________________

35	Rekn ut:	
	(a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{5}$	Forklar korleis du tenkjer.
	(b) $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8}$	Forklar korleis du tenkjer.
	(c) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$	Forklar korleis du tenkjer.
	(d) $\frac{1}{6}$ av $\frac{3}{4}$	
	(e) $1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{5}$	
	(f) $2 \cdot 1\frac{3}{4}$	
	(g) $1\frac{5}{8} - \frac{3}{4}$	
	(h) $\frac{1}{3} : \frac{3}{5}$	

Vedlegg 7

Oversikt over oppgåver, kjelder, kategorisering, resultat

Oppg.	Kjelde	Kommentarar	Resultat	Ant.
1	Utdannings-direktoratet (2012) Litt justert etter pilot	Brøk som del av eit heile. Brøk og illustrasjonar. Omgrepsforståing: testar om eleven har forstått at brøk betyr deling i like store delar, og om han forstår at ulike brøkar kan ha same verdi. Moglege misoppfatningar kan vera: - Brøkdelane treng ikkje ha same storleik	**Rett svar: b og d**	**26**
			b	**1**
			a og b	3
			a, b og c	1
			a, b, c, d	1
2	Utdannings-direktoratet (2012) Ånestad et al. (2014)	Brøk som målestorleik. Samanlikning av brøkar. Omgrepsforståing: testar om eleven forstår den relative storleiken på ein brøk. Kan vera prosedyreforståing for elevar som nyttar seg av algoritmar, t.d. å utvida brøkane slik at dei får same nemnar. Moglege misoppfatningar kan vera: - Ein stor nemnar gjev ein stor brøk - Dess større summen av teljar og nemnar er, dess større er brøken - To brøkar er av lik verdi dersom differansen mellom nemnar og teljar er den same - Ein liten nemnar gjev ein stor brøk	**Rett svar på a:** $\frac{1}{5}$	**31**
			$\frac{2}{11}$	1
			Rett svar på b: $\frac{5}{4}$	**30**
			$\frac{7}{6}$	1
			Ikkje svart	1
			Rett svar på c: $\frac{90}{91}$	**9**
			$\frac{89}{90}$	16
			Like store	2
			Ikkje svart	5
3	Utdannings-direktoratet (2012)	Brøk som målestorleik. Tallinja. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven forstår den relative storleiken på brøkar og kan plassera dei på ei tallinje der inndelinga på linja er gjeve. Brøkane har ulike nemnarar, og elevane må difor kunna veksla mellom ulike representasjonar av same tal. Moglege misoppfatningar kan vera: - Heile linja utgjer den heile - Tel kvar strek på tallinja i staden for rommet mellom markeringane	**Alle tala rett plassert:**	**21**
			Alle tal rett, bortsett frå anten $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{12}$ eller begge to	5
			Alle tal rett, bortsett frå $\frac{3}{12}$ og $\frac{13}{12}$	1
			Alle tal rett, bortsett frå $\frac{5}{6}$ og $\frac{13}{12}$	1
			Kun $\frac{1}{2}$ og $\frac{13}{12}$ er plassert rett	2
			Kun $\frac{1}{2}$ er plassert rett	1
			Alle tala feil	1

4	Hart et al. (1984)	Brøk som målestorleik. Ekvivalens. Omgrepsforståing: testar forståing av ekvivalente brøkar der eleven må kunna veksla mellom ulike skrivemåtar for same tal. Oppgåve a kan løysast ved hjelp av prosedyreforståing, medan oppgåve b kan gjera det vanskelegare sidan ein må oversjå brøken framføre og sjå på den første og siste brøken. Moglege misoppfatningar kan vera: - Forstår ikkje at likeverdige brøkar er uttrykk for same storleik - Trur at å multiplisera ein brøk med t.d. $\frac{2}{2}$ er det same som å multiplisera brøken med to.	**Rett svar i □: 4**	**32**
			Rett svar i △: 35	**22**
			21 eller 28	2
			Andre svar: 3, 20, 25, 31, 100	5
			Ikkje svart	3
5	Hart et al. (1984)	Brøk som målestorleik. Addisjon. Tekstoppgåve. Oppgåva testar om ein elev kan addera to brøkar med ulik nemnar, og i denne oppgåva kan både prosedyreforståing og omgrepsforståing koma fram. Moglege misoppfatningar og feil: - Ein adderer teljarar med teljar og nemnar med nemnar - Forstår ikkje kvifor ein set brøkane på samnemnar	**Rett svar: $\frac{23}{40}$**	**26**
			$\frac{1}{10}$, $\frac{3}{8}$ eller 4	3
			Ikkje svart	3
6	McIntosh (2007)	Brøk som målestorleik. Brøk som tal. Oppgåva testar om eleven forstår den relative storleiken på brøk. Den kan løysast ved prosedyreforståing, ved at ein utvidar brøkane slik at dei får same nemnar. Moglege misoppfatningar kan vera: - To brøkar er av lik verdi dersom differansen mellom nemnar og teljar er den same - Ein liten nemnar gjev ein stor brøk	**Rett svar: $\frac{4}{5}$**	**20**
			$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ og $\frac{7}{10}$	1
			$\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$	3
			$\frac{7}{10}$	2
			$\frac{2}{3}$	3
			Ikkje svart	3
7	McIntosh (2007)	Brøk som målestorleik. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven kan skriva eit tal større enn ein som ein uekte brøk.	**Rett svar: 17-23**	**24**
			2 eller 7	3
			9 eller 12	2
			Ikkje svart	3
8	McIntosh (2007)	Brøk som målestorleik. Brøk som tal.	**Rett svar: c og d**	**18**
			c	**9**

		Omgrepsforståing: testar eleven si forståing for brøk, desimaltal og tilhøvet mellom dei. Moglege misoppfatningar: - Oppfattar brøkstreken som eit komma: $\frac{2}{5}$ = 2,5.	**d**	**3**
			b og d	1
			b	1
9	McIntosh (2007)	Brøk som kvotient. Brøk som operator. Omgrepsforståing: testar om eleven ser samanheng mellom brøk og vanleg divisjon, og forstår at brøkstreken kan tolkast som deleteikn. Testar òg om eleven veit at å dela på eit tal er det same som å multiplisera med den inverse verdien til talet. Moglege misoppfatningar kan vera: - Multiplikasjon gjer talet større og divisjon gjer talet mindre.	**Rett svar: =**	**16**
			>	9
			<	7
10	Utdannings-direktoratet (2012)	Brøk som operator. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar om ein elev greier å dobla eit blanda tal. Moglege misoppfatningar: - Når ein multipliserer eit heilt tal med eit blanda tal, multipliserer vi det heile talet med alle sifra i det blanda talet.	**Rett svar: d**	**17**
			c. Doblar det heile talet, teljar og nemnar	9
			b	6
11	Hart et al. (1984)	Brøk som del av eit heile. Brøk og illustrasjonar. Omgrepsforståing: oppgåva krev at ein elev må kunna identifisera eininga, og han må vita at delane må vera like. Eleven må kunna omsetja ein illustrasjon for brøk til eit skriftleg symbol. Illustrasjonen er oppdelt i to ulike storleikar, og eleven må ta omsyn til oppdelinga som er gjeve. Usikkerheit i kva som er delane kan gjera denne oppgåva vanskeleg.	**Rett svar: $\frac{9}{24}$ eller $\frac{3}{8}$**	**26**
			$\frac{4\frac{1}{2}}{12}$	3
			$\frac{4}{12}$	1
			$\frac{1}{2}$	1
			$\frac{8}{12} + \frac{1}{2}$	1
12	McIntosh (2007)	Brøk som målestorleik. Addisjon. Omgrepsforståing: elevar som har talforståing vil kunna samanlikna kvar talstorleik med ein halv. Prosedyreforståing: elevar som nyttar algoritmisk måte å tenkja på vil	**Rett svar: d**	**26**
			b og d	3
			c	1
			Ikkje svart	2

		prøva å leggja saman brøkane.		
13	Kerslake (1986)	Brøk som målestorleik. Tallinja. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven forstår den relative storleiken på heile tal, ekte brøkar, uekte brøkar og blanda tal, og kan plassera desse tala på ei tallinje. Eleven må sjølv skapa oppdelinga og vita kva som er eininga. Moglege misoppfatningar og feil: - Heile linja utgjer den heile - Tel kvar strek på tallinja i staden for rommet mellom markeringane - Forstår ikkje at ein einingsbrøk skal kunna brukast gjentekne gongar for å bestemma ein avstand frå eit punkt.	**Alle tala rett plassert:**	**22**
			Alle tala er rett plassert, bortsett frå $\frac{3}{4}$	4
			Alle tala rett plassert, bortsett frå $\frac{9}{4}$.	2
			Alle tala er rett plasssert, bortsett frå 4 som er plassert på 1	1
			$\frac{3}{4}$ og 4 er rett plassert	1
			$1\frac{1}{4}$ og $\frac{9}{4}$ er plassert rett, 4 på 3 og $\frac{3}{4}$ på 0	1
			Ingen tal rett plassert	1
14	Hart et al. (1984)	Brøk som målestorleik. Subtraksjon. Tekstoppgåve. Oppgåva testar om ein elev greier å omsetja problemet til eit reknestykke og om han greier å subtrahera to brøkar frå ein heil. Her kan både prosedyreforståing og omgrepsforståing koma fram. Moglege feil og misoppfatningar: - Ein subtraherer teljarar for seg og nemnarar for seg - Forstår ikkje kvifor ein set brøkane på samnemnar	**Rett svar: $\frac{3}{10}$**	**26**
			$\frac{1}{2}$	2
			$\frac{4}{15}$. Adderer teljar med teljar og nemnar med nemnar	1
			Ikkje svart	3
15	Utdannings-direktoratet (2013b) Litt justert	Brøk som kvotient. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar korleis eleven forstår rekneoperasjonane, og om han har ein tankemodell for delingsdivisjon. Moglege misoppfatningar: - Kan ikkje dela eit lite tal med eit stort tal. - Divisjon er kommutativ	**Rett svar: c**	**24**
			b	5
			b og c	2
			b og d	1
16	Hart et al. (1984)	Brøk som del av eit heile. Brøk og illustrasjonar. Omgrepsforståing: eleven må kunna omsetja ein illustrasjon for brøk til eit skriftleg symbol. Oppgåva krev ein fleksibilitet i kva som vert	**A, Rett fargelegging av det grå område**	**32**
			B, Rett svar på den fargelagte delen: $\frac{1}{8}$	**29**
			$\frac{0{,}5}{4}$	1

		oppfatta som eining, eleven må vita at han arbeider med brøkar av $\frac{3}{4}$ av sirkelen og heile sirkelen. Eleven må aktivt skapa ei oppdeling Moglege misoppfatningar kan vera: - Dei ulike delane treng ikkje vera like store	$\frac{1}{12}$ $\frac{1}{6}$	1 1
17	Kerslake (1986)	Brøk som målestorleik. Ekvivalens. Omgrepsforståing: testar forståing av ekvivalente brøkar. Eleven må kunna veksla mellom ulike skrivemåtar for same tal. Moglege misoppfatningar kan vera: - Forstår ikkje at likeverdige brøkar er uttrykk for same storleik - Trur at å multiplisera ein brøk med t.d. $\frac{2}{2}$ er det same som å multiplisera brøken med to. - Ser på skilnaden mellom teljar og nemnar	**Rett svar: 16** 9 15 Ikkje svart	**16** 4 4 8
18	Hart et al. (1984) (litt justert)	Brøk som operator. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: elevar må sjå samanheng mellom multiplikasjon og «av» og kunna rekna ut to operasjonar for å svara på dette spørsmålet.	**Rett svar: 800** 1200. 650 eller 900. 200. Finn $\frac{1}{3}$ av 600. Ikkje svart	**23** 1 2 1 5
19	McIntosh (2007)	Brøk som målestorleik. Brøk/desimaltal/prosent. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven ser samanheng mellom brøk, desimaltal og prosent og greier å veksla mellom desse. Kan vera prosedyreforståing for elevar som berre har lært ei oppskrift på korleis ein skal veksla mellom desse ulike skrivemåtane. Moglege feil og misoppfatningar: - Brøkstreken vert sett på som komma - Tolkingsfeil av nokre prosentar: 0,01%=$\frac{1}{100}$	**Rett svar på a: $\frac{60}{100}$, $\frac{6}{10}$ eller $\frac{3}{5}$** Ikkje svart på a **Rett svar på b: 0,6 eller 0,60**	**31** 1 **32**
20	McIntosh (2007)	Brøk som forhold. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar om eleven kan bruka forholdstal i praktiske	**Rett svar: b** c a d	**20** 9 2 1

		situasjonar og at han kan samanlikna to forhold. Moglege misoppfatningar kan vera: - Additiv tenking; ein ser på forskjellen mellom talet på skeier kakao og talet på desiliter mjølk		
21	McIntosh (2007)	Brøk som målestorleik. Tettleik. Omgrepsforståing: testar om eleven forstår at mellom to vilkårlege brøkar fins det alltid uendeleg mange brøkar. Eleven må forstå og kunna bruka kunnskap om likeverdige brøkar for å svara på denne oppgåva. Moglege misoppfatningar og feil: - Det fins ikkje brøkar mellom to «påfølgjande» brøkar - Eleven forstår ikkje poenget med å utvida brøkane, og ser ikkje på likeverdige brøkar som ulike representasjonar av same tal.	**Rett svar: c med to rette brøkar**	**13**
			c, ein brøk; $\frac{1}{2}$	3
			c, inga brøkar	2
			a	9
			Ikkje svart	5
22	Pantziara & Philippou (2012)	Brøk som målestorleik. Tallinja. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven forstår den relative storleiken på brøkar, og plasseringa deira på tallinja. Moglege feil og misoppfatningar: - Tel kvar strek på tallinja i staden for rommet mellom markeringane - Forstår ikkje at ein einingsbrøk skal kunna brukast gjentekne gongar for å bestemma ein avstand frå eit punkt.	**Rett svar: $\frac{1}{6}$**	**17**
			0,1666	**3**
			Ca. 0,15	1
			$\frac{1}{8}$	3
			$\frac{1}{4}$	2
			$\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, 0,25 eller 0,3	4
			Ikkje svart	2
23	Utdannings-direktoratet (2012) (litt justert)	Brøk som målestorleik. Brøk/desimaltal/prosent. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven ser samanheng mellom brøk og prosent. Ein elev si mangelfulle forståing av prosent som hundredel kan også avslørast her. Kan vera prosedyreforståing for elevar som berre har lært ei oppskrift på korleis ein skal veksla mellom desse ulike skrivemåtane.	**Rett svar: c**	**27**
			d	2
			b	1
			a	1
			Ikkje svart	1

		Moglege feil og misoppfatningar: - Brøkstreken vert sett på som komma - Tolkingsfeil av nokre prosentar: 0,01% = $\frac{1}{100}$		
24	Hart et al. (1984)	Brøk som kvotient. Brøk som operator. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar om eleven forstår rekneoperasjonane, og har ein tankemodell for målingsdivisjon.	**Rett svar: 6**	**24**
			$\frac{6}{8}$ deltakar	1
			Ikkje svart	7
25	McIntosh (2007) (litt justert)	Brøk som målestorleik. Brøk/desimaltal/prosent. Brøk som tal. Omgrepsforståing: testar om eleven kan veksla mellom representasjonane brøk, desimaltal og prosent, og greier å sortera dei etter stigande verdi. Moglege misoppfatningar kan vera: - Brøkstreken vert sett på som komma	**Rett rekkefølge:** $\mathbf{\frac{1}{10}}$ **0,3** $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **35%**	**25**
			35% er plassert rett etter $\frac{1}{10}$	1
			$\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{10}$ har bytta plass	1
			35% og $\frac{1}{3}$ har bytta plass	2
			$\frac{1}{3}$ og 0,3 har bytta plass	2
			Alle tal feil plassert	1
26	Brekke & Tinnes (2001)	Brøk som forhold. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar om eleven har ei forståing av formlike storleikar, og kan minska ein figur. Moglege misoppfatningar: - Eleven brukar differansen mellom høgdene og legg ho til den oppgjevne breidda.	**Rett svar: 15**	**22**
			12. Additiv tenking.	7
			12,5 eller 14	2
			Ikkje svart	1
27		Brøk som kvotient. Brøk som operator. Omgrepsforståing: testar om eleven kan tenkja på passande, realistiske samanhengar der brøk og rekneoperasjonar vert brukt på ein korrekt måte.	**Rett målingsdivisjon**	**5**
			Forteljing til 4 $\frac{1}{2}$: 4	5
			Forteljing til 4$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$	1
			Reknestykke på skulen	2
			Urealistisk kontekst / ufullstendig informasjon	6
			Ikkje svart	13
28	Hart et al. (1984)	Brøk som kvotient. Tekstoppgåve. Denne oppgåva er ei innleiande oppgåve til oppgåva under. Her er dei oppgjevne måla heile tal. Elevar som ikkje greier å løysa denne oppgåva, vil sannsynlegvis ikkje vera i stand til å svara på oppgåva under der dei oppgjevne måla er brøkar.	**Rett svar: 2,5,** $\mathbf{\frac{10}{4}}$	**25**
			Rett tenkt, men rotar i utrekninga på 10:4	1
			0,612 eller 2	3
			Ikkje svart	3

29	Hart et al. (1984)	Brøk som kvotient. Brøk som operator. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: i denne oppgåva er dividend mindre enn divisor, og ei mangel på forståing for brøk som kvotient kan avslørast her. Oppgåva krev meistring av divisjon av to brøkar. Moglege feil og misoppfatningar: - Talverdien på arealet er mindre enn talverdien på bredda. Elevar som har avgrensa erfaring med divisjon kan tru at denne oppgåva ikkje kan løysast. Multiplikasjon gjer større.	**Rett svar: $\frac{5}{9}$**	**5**
			0,55	**2**
			Utvidar areal og bredde til $\frac{5}{15}$ og $\frac{9}{15}$, stoppar opp.	8
			$\frac{4}{15}$. Differanse mellom $\frac{5}{15}$ og $\frac{9}{15}$	2
			$\frac{9}{5}$. Bredde: areal	2
			0,198, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{15}$ eller $\frac{6}{10}$	4
			Ikkje svart	9
30	Brekke & Tinnes (2001)	Brøk som forhold. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar om eleven har ei forståing av forhold som bind saman storleikar av ulike slag (rate). Moglege misoppfatningar kan vera: - Snur funksjonsoperatoren, då ein ikkje kan dela eit lite tal med på eit stort tal. - Ukorrekt addisjonsstrategi. Eleven brukar differansen mellom liter og kilo som ein konstant og adderer denne med seks.	**Rett svar: 4 kg.**	**10**
			3,996. Gjer om til desimaltal og reknar ut	**4**
			9 kg.	5
			1 kg. Subtraksjons-tenking	1
			4,8, 5, 5,5 eller 5,6.	4
			Set opp ei forholdslikning, stoppar opp	2
			Ikkje svart	6
31	TIMSS (2011) 8.trinn	Brøk som operator. Omgrepsforståing: testar om eleven greier å abstrahera ved å nytta symbol og ikkje tal, og om han trur at multiplikasjon automatisk gjer det opphavlege talet større. Moglege misoppfatningar: - Multiplikasjon gjer svaret større	**Rett svar: D**	**16**
			A	5
			B	4
			C	3
			Ikkje svart	4
32	Brekke & Tinnes (2001)	Brøk som forhold. Tekstoppgåve. Omgrepsforståing: testar om eleven har ei forståing av forhold mellom to delar av eit heile (del-del forhold). Moglege misoppfatningar kan vera: - Eleven oppfattar dette som eit forhold mellom ein del og eit heile. Teiknet : vert sett på som eit divisjonsteikn og	**Rett svar: 8**	**15**
			10. $\frac{1}{4}$ av blandinga er sink	11
			20 kg eller 120	2
			160. 40·4	1
			Ikkje svart	3

		ikkje som eit symbol for eit del-del forhold.		
33	Utdannings-direktoratet (2013a)	Brøk i algebra. Ekvivalens. Testar om eleven ser på slike oppgåver som brøkar, og om dei greier å forkorta brøkuttrykk der bokstavar representerer generaliserte tal. Ein må ha ei forståing for ekvivalente brøkar for å kunna forstå og handtera algebraiske omskrivingar. Prosedyreoppgåve. Moglege misoppfatningar kan vera: - Addisjon/ subtraksjonstenking av teljar og nemnar	**Rett svar på a: $\frac{2}{3}$**	**12**
			$\frac{1}{y}$ eller y. Tenkjer at 2y=y.y	2
			$\frac{y}{2y}$ eller y. Subtraksjons-tenking	7
			$\frac{1y}{1,5y}$.	1
			Ikkje svart på oppgåve a	10
			Rett svar på b: $\frac{3b}{2}$	**10**
			$\frac{3}{2}$	2
			$\frac{1b^3}{b^2}$. Subtraksjonstenking	1
			$\frac{2b^3}{b}$	1
			b eller $\frac{b}{b}$	2
			$6\frac{3}{4}$	1
			Ikkje svart på oppgåve b	15
34	TIMSS (2011) 8.trinn	Brøk i algebra. Addisjon. Prosedyreforståing: testar om elevane greier å addera tre brøkar som inneheld variabelen x i teljar. Moglege misoppfatningar kan vera: - Adderer teljar med teljar og nemnar med nemnar	**Rett svar: $\frac{9x}{8}$ eller $1\frac{1}{8}$x**	**20**
			x$\frac{x}{8}$	1
			$\frac{5x}{14}$. Addisjon av teljarar og nemnarar	5
			Ikkje svart	6
35	Hart et al. (1984) McIntosh (2007) (litt justert)	Brøk og dei fire rekneartane. Brøk som målestorleik. Brøk som operator. Brøk som kvotient. Prosedyreforståing: dugleiksoppgåver, nokre av dei skal gjenspegla tekstoppgåver gjeve tidlegare i testen. Moglege feil og misoppfatningar: - Ein adderer teljar med teljar og nemnar med nemnar - Tolkar $1\frac{5}{8}$ som $1\cdot\frac{5}{8}$ - Ved multiplikasjon mellom eit heilt tal og eit blanda tal, vil ein multiplisera det heile talet med alle sifra i det blanda talet. - Snur den første brøken ved divisjon av to brøkar - Blandar saman ulike	**Rett svar på a: $\frac{23}{40}$**	**25**
			$\frac{4}{13}$	2
			$\frac{23}{80}$	1
			$\frac{4}{5}$	1
			Ikkje svart på a	3
			Rett svar på b: $\frac{10}{72}$ eller $\frac{5}{36}$	**23**
			$\frac{10}{81}$.	4
			$\frac{5}{7}$	1
			$\frac{16}{35}$	1
			Ikkje svart på b	3
			Rett svar på c: 6 eller $\frac{24}{4}$	**24**
			$\frac{1}{6}$	2
			$\frac{3}{32}$	1

		prosedyrar	$\frac{5}{8}$	1
			Ikkje svart på c	4
			Rett svar på d: $\frac{1}{8}$ eller $\frac{3}{24}$	**9**
			12,5	1
			$\frac{7}{12}$. Subtraksjon.	4
			$4\frac{1}{2}$. Divisjon.	2
			$\frac{2}{12}$. $\frac{2}{12}$ av $\frac{9}{12} = \frac{2}{12}$.	2
			$\frac{1}{18}$, $\frac{45}{100}$, $1\frac{1}{6}$, 6.	4
			Ikkje svart på d	10
			Rett svar på e: $\frac{3}{10}$	**21**
			$1-\frac{7}{10}$	2
			$\frac{1}{2}$	1
			Ikkje svart på e	8
			Rett svar på f: $3\frac{1}{2}$	**15**
			$2\frac{3}{4}$ eller $2\frac{6}{8}$	7
			2,75 eller 2,4	2
			2, 3 eller $\frac{56}{16}$.	3
			Ikkje svart på f	5
			Rett svar på g: $\frac{7}{8}$	**21**
			$1-\frac{1}{8}$. Stoppar her.	2
			$2\frac{3}{8}$. Addisjon	1
			Ikkje svart på g	8
			Rett svar på h: $\frac{5}{9}$	**21**
			$\frac{9}{5}$ eller $1\frac{4}{5}$	2
			$\frac{1}{5}$	1
			Utvidar brøkane, stoppar opp	2
			Ikkje svart på h	6